网络现代场论

陈燊年　何煜光　陈洁　著

電子工業出版社

网络现代场论

shēn

陈燊年　何煜光　陈　洁　著

電子工業出版社

序　　言

现代社会离不开电子工程，而网络理论这个学科是电子工程的核心。非线性网络是从线性网络发展而来的，这个学科的伟大先驱们，如麦克斯韦和基尔霍夫等主要依靠的是物理理解，但他们的后继者给网络理论赋予了数学的语言，把它完全建立在近代拓扑学分支概念的基础上。

诚然，拓扑学对网络理论的建立与发展做出了重大的贡献，但由于脱离了物理基础，一方面不能阐明线性网络基本规律的本质，另一方面当从线性网络发展为非线性网络时，单纯依靠对线性网络的拓扑性质的推广已不能解决由物质非线性所带来的一系列新的物理问题，从而使当今非线性网络理论的基础部分仍缺乏包括对非线性网络元件可进行解析描述的网络阻抗等基本方程。如果说，线性网络现在已经有了一个可资应用的解析理论的话，那么非线性网络现在还没有这样一个可资应用的解析理论。

网络现代场论的观点与上面介绍的大不相同。我们认为场论概念是核心思想，网络内电磁场与构成网络元件的各种线性或非线性介质材料之间的相互作用，只不过是一般电磁场与物质间的相互作用的一种特例。因此，从麦克斯韦方程组和物质电磁性质方程出发，并考虑到网络线图一些基本关系，可以揭示出线性网络及至非线性网络中所有基本规律及其本质。

其次，我们把线性网络和非线性网络都统一看作是一个分布有能量和电荷、电流的系统。因此，在麦克斯韦电磁场理论中，能量转换与守恒定律和电荷守恒定律成为网络现代场论中的两条立论根据，可以把网络理论列为场论的一门分支。这样，就大大增强了网络理论这门学科的科学性和逻辑性。

当然，我们不仅只是用场论去完全表述在当今网络理论中已经得到公认的那些基本理论，而且更主要的目的，在于用新理论去揭示那些在当今网络理论中尚未认识的内容。它应该包括一些新概念、新基本公式以及这些概念和公式在某些方面的初步应用。

因此，本书共有七章，由上述三部分内容组成。第二章、第三章和第七章虽有大量完全用场论表述的网络理论中的基本理论，但也有新概念、新公式以及它们的初步应用。其它各章则侧重于网络现代场论在某些方面的应用。对七章主要内容介绍如下：

第一章提供研究网络基本理论的场论基础，从麦克斯韦方程组和物质电磁性质方程出发，导出能用于线性网络和非线性网络的电磁场能量转换与守恒定律和电荷守恒定律。

第二章介绍把上述两个守恒定律在直流网络里联立求解并利用D定理和 $D_{ik'}$ 定理得到网络中最基本的积分形式的基尔霍夫两定律。其中树、树支和链支等拓扑学基本概念用场论语言加以表述。在证明D定理和 $D_{ik'}$ 定理时仅用到行列式的知识就够了。至于网络三个基本矩阵及其方程则是作为积分形式的基尔霍夫两定律的理论推导结果。

第三章介绍把第二章所述的场论方法推广到线性交流网络中的方法及在推广过程中发现的一些新的结果。其中包括给出了网络元件复阻抗率的新概念，推广了欧姆定律的微分形式，给出四种基本网络元件复阻抗的统一积分公式和一个新的电容基本公式，以及在包含互感的RLC网络中证明了包含互感的复阻抗矩阵等等。这些新的结果显示出了把网络基础理论建立在场论基础上的合理因素，给人新的启迪。本章最后在第二节通过计算说明了对复阻抗概念在求螺线管自感系数方面的应用。

第四章是网络现代场论对网络分析的系统方法的应用。在第三章的基础上，进一步推导出独立割集矩阵和网孔矩阵，从而通

过非线性图途径得到网络分析中全部七种矩阵分析法的三个基本矩阵方程。在此体系中可压缩许多内容，不必引进诸如完全关联矩阵、完全回路矩阵、完全割集矩阵等许多矩阵。除了四种基本矩阵都经推导或通过公式来定义外，还对几个主要概念，如节点电压和割集电压、网孔电流和回路电流等也统一地定义在一定的表示式中。此外，还得到可按行列式来计算独立割集矩阵元素和独立回路矩阵元素的基本公式。利用这两个公式，可以在网络变量数目较少的四种主要分析法中，把其中两种方法的优点结合起来，提供两种综合性方法。

第五章是网络现代场论对计算电容给出一个理论古朴浅显，方法简便易行的应用。在第三章得到一个电容新公式的启示下，首先介绍三种古朴浅显的推导方法和介质作多层分布和多区分布的电容计算公式，以便使该公式在一般场合下可以得到推广应用，然后介绍它在三个方面的初步应用。其中包括对常规形状的、具有某种对称形状的和二维任意形状的电容器的电容的计算。最后把此电容公式推广成为线性各向异性的倒电容公式。

第六章把上一章最后一节的方法推广到磁线性各向异性介质中。前部分内容是关于在磁线性各向异性介质中矢势 $\vec{A}$ 所满足的微分方程及其解，后部分内容是在得到磁各向异性的矢势 $\vec{A}$ 的积分公式后，除介绍与下一章内容有关的磁各向异性电路的自感和互感公式的应用外，还介绍在物理上磁各向异性个别问题的应用、求磁各向异性的毕奥-萨伐尔定律和求磁各向异性的磁多极展开。

第七章是对非线性网络基本元件的特性公式和运动方程本质的场论研究。前一部分内容是把第五章最后一节的方法推广到非线性电路中，分别建立纯电阻、纯电容和纯自感的非线性电路的基本方程，从而分别得到上述三种非线性元件的特性公式。其中非线性电路的自感和互感特性公式是在作出一定的近似条件下得到的近似表示式。后一部分内容是把第三章的方法推广到非线性网络中，同样可得非线性网络中积分形式的基尔霍夫两定律，从而

建立非线性网络的场论。在此理论中，除现有非线性网络具有代数方程形式的基本方程得到完全推导外，同时也导出其它一些新的结果，其中包括具有矩阵方程形式的非线性网络基本方程、具有标量和张量两种形式的非线性网络元件的参量表示式以及此二种形式间的转换关系等。利用转换关系，我们解释了非线性网络元件具有各向异性但它们的参量却都是一个标量的疑难问题。本章理论可以过渡到线性网络的特殊情况，因而实际上是初步给出一个非线性网络与线性网络的统一场论，其内容包含推导非线性电阻流控多项式和压控多项式以及非线性电容变容二极管特性方程等应用问题。

在本书的编写过程中，得到中山大学郭硕鸿教授，北京科技大学黄源倜教授和福建师范大学杨亚天教授的热忱关心，他们提出了不少改进意见，对此，我们表示衷心感谢。由于我们水平有限，书中难免有缺点或错误之处，敬希读者批评指正。

陈燊年
一九八九年十一月
于华侨大学

目　　录

第一章　电网络理论的场论基础

§1　麦克斯韦方程组和物质电磁性质方程

网络场论是把电网络理论的基础建立在麦克斯韦方程组和物质电磁性质方程上。首先写出麦克斯韦方程组和物质电磁性质方程，然后把物质电磁性质方程从线性介质推广到非线性介质，使它们成为建立网络场论的出发点。

已知麦克斯韦方程组的微分形式

$$\left.\begin{aligned} \nabla\times\boldsymbol{E} &= -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \\ \nabla\times\boldsymbol{H} &= \boldsymbol{j}+\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \\ \nabla\cdot\boldsymbol{D} &= \rho \\ \nabla\cdot\boldsymbol{B} &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{1-1}$$

及其复数形式

$$\left.\begin{aligned} \nabla\times\dot{\boldsymbol{E}} &= -\frac{\partial \dot{\boldsymbol{B}}}{\partial t} \\ \nabla\times\dot{\boldsymbol{H}} &= \dot{\boldsymbol{j}}+\frac{\partial \dot{\boldsymbol{D}}}{\partial t} \\ \nabla\times\dot{\boldsymbol{D}} &= \dot{\rho} \\ \nabla\cdot\dot{\boldsymbol{B}} &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{1-2}$$

若引用广义正交坐标变量u_1、u_2和u_3，则实时量$\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{j}$等与其复数量$\dot{\boldsymbol{E}}$、$\dot{\boldsymbol{j}}$等的关系是

$$
\left.\begin{aligned}
E(u_1u_2u_3t) &= \mathrm{Re}[\dot{E}(u_1u_2u_3t)] \\
&= \mathrm{Re}[E(u_1u_2u_3)e^{i(\omega t+\theta_e)}] \\
&= \mathrm{Re}[\dot{E}(u_1u_2u_3)e^{i\omega t}] \\
j(u_1u_2u_3t) &= \mathrm{Re}[\dot{j}(u_1u_2u_3t)] \\
&= \mathrm{Re}[j(u_1u_2u_3)e^{i(\omega t+\theta_j)}] \\
&= \mathrm{Re}[\dot{j}(u_1u_2u_3)e^{i\omega t}]
\end{aligned}\right\} \tag{1-3}
$$

我们讨论的变化电磁场只限于角频率ω不是很高的似稳电磁场，因而在电网络内的所有各点上，每一时刻的电磁场以及电流、电荷的分布都可以看成完全一样，只不过它们一起同步地作缓慢的变化。在此情况下式(1-3)中的幅量 $E(u_1u_2u_3)=E_0$，$j(u_1u_2u_3)=j_0$等都可作为常矢量看待。

又知，当物质为线性各向同性时，对于电介质、磁介质和导体，它们的电磁性质方程分别是

$$
\left.\begin{aligned}
D &= \varepsilon^{(0)}E \\
B &= \mu^{(0)}H \\
j &= \frac{1}{\rho^{(0)}}(E+K)
\end{aligned}\right\} \tag{1-4}
$$

式中，K是交变电源的电动势强度，而$\varepsilon^{(0)}$、$\mu^{(0)}$和$\rho^{(0)}$分别代表介电常数、磁导率和电阻率。

为了以后研究非线性网络的需要，现在必须把电磁性质方程从介质为线性各向同性推广到介质为线性各向异性以至介质为非线性的普遍形式。以下以方程式(1-4)中的第一式为示范，说明电介质情况的推广工作。

首先，选取直角坐标系，并以D或E的方向为正x轴的方向，则在此坐标系中方程式(1-4)中的第一式告诉我们D_x仅是E_x的函数

$$D_x = D_x(E_x)$$

现在若介质是线性各向异性，则很自然地认为D_x是E_x、E_y和E_z的函数

$$D_x = D_x(E_x、E_y、E_z) \tag{1-5}$$

上式可依E_x、E_y、E_z的幂次展成级数，当限于线性项时得

$$D_x = \varepsilon_{xx}^{(0)} E_x + \varepsilon_{xy}^{(0)} E_y + E_{xz}^{(0)} E_z$$

对于D的y和z分量，同理也可得

$$D_y = \varepsilon_{yx}^{(0)} E_x + \varepsilon_{yy}^{(0)} E_y + \varepsilon_{yz}^{(0)} E_z$$

$$D_z = \varepsilon_{zx}^{(0)} E_x + \varepsilon_{zy}^{(0)} E_y + \varepsilon_{zz}^{(0)} E_z$$

以上三式合并为

$$D_m = \sum_{n=1}^{3} \varepsilon_{mn}^{(0)} E_n \quad (m=1、2、3) \tag{1-6}$$

下标1、2、3分别代表 x、y、z分量。由式(1-6)可见，表征线性各向异性的介电常数已不再是一个标量$\varepsilon^{(0)}$，而是由 9 个量组成的张量$\varepsilon_{mn}^{(0)}$，表为矩阵为

$$[\varepsilon_{mn}^{(0)}] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11}^{(0)} & \varepsilon_{12}^{(0)} & \varepsilon_{13}^{(0)} \\ \varepsilon_{21}^{(0)} & \varepsilon_{22}^{(0)} & \varepsilon_{23}^{(0)} \\ \varepsilon_{31}^{(0)} & \varepsilon_{32}^{(0)} & \varepsilon_{33}^{(0)} \end{bmatrix} \tag{1-7}$$

当介质进一步成为非线性介质时，把式(1-5)展成级数，很自然地应取到E_x、E_y、E_z的二次式、三次式等更高次项

$$D_1 = \sum_{n=1}^{3} \varepsilon_{1n}^{(0)} E_n + \sum_{n=1}^{3} \sum_{l=1}^{3} \varepsilon_{1nl} E_n E_l + \sum_{n=1}^{3} \sum_{l=1}^{3} \sum_{p=1}^{3} \varepsilon_{1nlp} E_n E_l E_p + \cdots$$

同理，可得到其它两个分量D_2和 D_3 的高次项展开式，与上式合并后写成

$$D_m=\sum_{n=1}^{3}\varepsilon_{mn}^{(0)}E_n+\sum_{n=1}^{3}\sum_{l=1}^{3}\varepsilon_{mnl}E_nE_l$$
$$+\sum_{n=1}^{3}\sum_{l=1}^{3}\sum_{p=1}^{3}\varepsilon_{mnlp}E_nE_lE_p+\cdots \qquad (1\text{-}8)$$
$$(m=1、2、3)$$

式中第一项为线性项，它包括线性各向同性和各向异性。从第二项开始为非线性项。

仿此方法也可把式(1-4)中的第二式和第三式从介质为线性推广到非线性，得

$$B_m=\sum_{n=1}^{3}\mu_{mn}^{(0)}H_n+\sum_{n=1}^{3}\sum_{l=1}^{3}\mu_{mnl}H_nH_l$$
$$+\sum_{n=1}^{3}\sum_{l=1}^{3}\sum_{p=1}^{3}\mu_{mnlp}H_nH_lH_p+\cdots \qquad (1\text{-}9)$$
$$(m=1、2、3)$$

$$E_m=\sum_{n=1}^{3}\rho_{mn}^{(0)}j_n+\sum_{n=1}^{3}\sum_{l=1}^{3}\rho_{mnl}j_nj_l$$
$$+\sum_{n=1}^{3}\sum_{l=1}^{3}\sum_{p=1}^{3}\rho_{mnlp}j_nj_lj_p+\cdots \qquad (1\text{-}10)$$
$$(m=1、2、3)$$

以上，式(1-8)～(1-10)是在直角坐标系中得到的。如把它们推广到更一般的广义正交坐标系统中显然也成立。此时$E_m(m=1,2,3)$就表示E在广义正交坐标系统中的三个分量。

§2 电荷守恒定律和能量转换与守恒定律

本节将由麦克斯韦方程组和物质电磁性质方程导出对今后研究电网络基础理论有密切联系的两个守恒定律，一个是电荷守恒定律，一个是电磁场的能量转换与守恒定律。由于这两个定律对

确立电网络的导电规律都是最基本的，所以有时也称为网络中的两个基本的守恒定律。

为了导出电荷守恒定律，只需把麦克斯韦方程组(1-1)中的第二式两边取散度

$$\nabla\cdot j+\nabla\cdot\frac{\partial D}{\partial t}=0$$

再用式(1-1)中的第三式代入，得

$$\nabla\cdot j=-\frac{\partial\rho}{\partial t}$$

这就是电荷守恒定律的微分形式。它的积分形式是

$$\oint j\cdot dS=-\frac{\partial}{\partial t}\int\rho d\Omega \tag{1-11}$$

式中右边的体积分是对封闭面所包容的体积积分。

与此类似，由复数形式的麦克斯韦方程组(1-2)中的第二式和第三式出发，可得电荷守恒定律的复数形式为

$$\oint \dot{j}\cdot dS=-\frac{\partial}{\partial t}\int\dot{\rho}\, d\Omega \tag{1-12}$$

电荷守恒定律原是大量实验的概括，现在把它看作是由麦克斯韦方程组导出的一个结论，目的是使我们清楚地看到，电网络的基础理论是建立在麦克斯韦方程组和物质电磁性质方程的基础上的。

众所周知，在电网络的任一节点处，从各支路汇集到该节点的电流分配关系都必须严格遵循电荷守恒定律。因而电荷守恒定律成为理论研究电网络基本问题所必不可少的基本定律之一。

此外，当电路作为一种实现能量传输和转化的手段时，电网络内各支路间的能量分配关系都必须严格遵循电磁场能量转换与守恒定律。因而此定律也成为理论研究电网络基本问题必不可少的基本定律之一。

下面将导出电磁场能量转换与守恒定律的实时和复数的两种形式。该定律通常称为**坡印廷定理**。

为了导出实时式，先取$E\times H$的散度

$$\nabla\cdot(E\times H)=\nabla\times E\cdot H-E\cdot\nabla\times H$$

然后用麦克斯韦方程组(1-1)中的第一式和第二式代入上式右边二项，得

$$\nabla\cdot(E\times H)=-\frac{\partial B}{\partial t}\cdot H-E\cdot\frac{\partial D}{\partial t}-E\cdot j$$

如设介质是线性各向同性的，则可用物质电磁性质方程式(1-4)中的三个方程分别代入上式右边的三项中，得

$$\nabla\cdot(E\times H)=-\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{H\cdot B}{2}+\frac{D\cdot E}{2}\right)-\rho j\cdot j+K\cdot j$$

这就是坡印廷定理的微分形式。它的积分形式是

$$-\oint(E\times H)\cdot dS=\frac{\partial}{\partial t}\int\frac{1}{2}(H\cdot B+D\cdot E)d\Omega+\int\rho^{(\ )}j^{2}d\Omega$$
$$-\int K\cdot jd\Omega \qquad (1\text{-}13)$$

当我们需要坡印廷定理的复数形式时，仿照式(1-3)和(1-4)，写出物质电磁性质方程的复数形式如下：

$$\dot{B}(u_1u_2u_3t)=\mu^{(0)}H(u_1u_2u_3)e^{i(\omega t+\theta_H)}$$

$$\dot{D}(u_1u_2u_3t)=\varepsilon^{(0)}E(u_1u_2u_3)e^{i(\omega t+\theta_E)}$$

因此，复数形式的麦克斯韦方程组(1-2)表为

$$
\left.\begin{aligned}
&\nabla\times\dot{E}(u_1u_2u_3)=-i\omega\mu^{(0)}\dot{H}(u_1u_2u_3)\\
&\nabla\times\dot{H}(u_1u_2u_3)=\dot{j}(u_1u_2u_3)+j\omega\varepsilon^{(0)}\dot{E}(u_1u_2u_3)\\
&\nabla\cdot\dot{E}(u_1u_2u_3)=\frac{\dot{\rho}(u_1u_2u_3)}{\varepsilon^{(0)}}\\
&\nabla\cdot\dot{H}(u_1u_2u_3)=0
\end{aligned}\right\} \quad (1\text{-}14)
$$

把上式第一式的两边与$\dot{H}$的共轭$\dot{H}^*$作点乘

$$\nabla\times\dot{E}\cdot\dot{H}^*=-i\omega\mu^{(0)}\dot{H}\cdot\dot{H}^*$$

再把第二式的两边先取它们的共轭再与$\dot{E}$作点乘

$$(\nabla\times\dot{H}^*)\cdot\dot{E}=\dot{j}^*\cdot\dot{E}-i\omega\varepsilon^{(0)}\dot{E}^*\cdot\dot{E}$$

由于

$$\nabla\cdot(\dot{E}\times\dot{H}^*)=\nabla\times\dot{E}\cdot\dot{H}^*-\nabla\times\dot{H}^*\cdot\dot{E}$$

故前两式相减，有

$$\nabla\cdot(\dot{E}\times\dot{H}^*)=i\omega\varepsilon^{(0)}\dot{E}\cdot\dot{E}^*-i\omega\mu^{(0)}\dot{H}\cdot\dot{H}^*-\dot{j}^*\cdot\dot{E}$$

以物质电磁性质方程式(1-4)的第三式的复数形式

$$\dot{i}=\frac{1}{\rho^{(0)}}(\dot{E}+\dot{K})$$

代入上式右边最末一项，得

$$\nabla\cdot(\dot{E}\times\dot{H}^*)=i\omega\varepsilon^{(0)}\dot{E}\cdot\dot{E}^*-i\omega\mu^{(0)}\dot{H}\cdot\dot{H}^*$$
$$-\rho^{(0)}\dot{j}^*\cdot\dot{j}+\dot{j}^*\cdot\dot{K}$$

这就是坡印廷定理微分形式的复数形式。它的积分形式是

$$-\oint_{s}(\dot{E}\times\dot{H}^{*})\cdot dS = i\omega\int_{\Omega}(\mu^{(0)}\dot{H}\cdot\dot{H}^{*}-\varepsilon^{(0)}\dot{E}\cdot\dot{E}^{*})d\Omega$$

$$+\int_{\Omega}\rho^{(0)}\dot{j}\cdot\dot{j}^{*}d\Omega-\int_{\Omega}\dot{j}^{*}\cdot\dot{K}d\Omega \qquad (1\text{-}15)$$

§3 介质为线性各向异性的坡印廷定理

当电介质为线性各向异性时，物质电磁性质方程式（1-6）的复数形式是

$$\dot{D}_m=\sum_{n=1}^{3}\varepsilon_{mn}^{(0)}\dot{E}_n \qquad (1\text{-}16)$$

对于线性各向异性的磁介质，同样有

$$\dot{B}_m=\sum_{n=1}^{3}\mu_{mn}^{(0)}\dot{H}_n \qquad (1\text{-}17)$$

用式(1-3)中的复数量

$$\left.\begin{aligned}\dot{E}_n&=E_{n0}e^{i(\omega t+\theta_E)}\\ \dot{H}_n&=H_{n0}e^{i(\omega t+\theta_H)}\end{aligned}\right\} \qquad (1\text{-}18)$$

代入，分别求得

$$\frac{\partial\dot{D}}{\partial t}=\sum_{m=1}^{3}e_m\frac{\partial\dot{D}_m}{\partial t}=i\omega\sum_{m=1}^{3}\sum_{n=1}^{3}\varepsilon_{mn}^{(0)}\dot{E}_n e_m \qquad (1\text{-}19)$$

$$\frac{\partial\dot{B}}{\partial t}=i\omega\sum_{m=1}^{3}\sum_{n=1}^{3}\mu_{mn}^{(0)}\dot{H}_n e_m \qquad (1\text{-}20)$$

当选用广义正交坐标系统时，式中e_m($m=1$、2、3）代表广义正交三个坐标轴的单位矢量。

现取复数形式的麦克斯韦方程组（1-2)中的第二式的共轭复