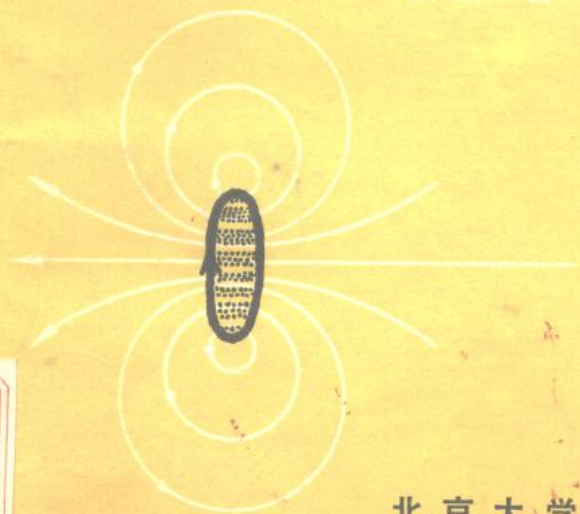


高等学校教学参考书

《电 磁 学》 习 题 选 解

周岳明 史超凤 编
马庆荣 曹树石



北 京 大 学 出 版 社

高等学校教学参考书

《电磁学》习题选解

周岳明
冯庆荣

史凤起
曹树石 编

北京大学出版社

• ZPS1/06

《电磁学》习题选解

北京大学出版社出版

(地址: 北京大学院内)

新华书店北京发行所发行

北京海淀印刷厂印刷

787×1092 毫米 32开本 3.75印张 67,000字

1980年7月第一版 1981年7月第二次印刷

印数: 110,001—160,000册

统一书号: 13209·4 定价: 0.40元

前 言

本书是赵凯华、陈熙谋编《电磁学》(人民教育出版社出版)一书中部分习题的解答。编写工作是受赵凯华、陈熙谋同志的委托,并在他们的指导下完成的。选题的原则有二:一是典型题,二是难题。我们从原书中各类重要的典型题中,选出一些作了解答或给出提示;另有部分难题,或解法有特殊技巧的题,其中有些虽超出了课程的基本要求,也列入本集。本集主要是为了供教师参考,因此解答不都给出详尽步骤。本集中章、节及所引公式都是原书的编号。原书中部分习题及答案凡与本集不符的,均以本集为准。由于编者水平有限,错误在所难免,望读者批评指正。

编 者

1979年12月于北京大学

目 录

前 言

第一章 静电场·····	1
第二章 静电场中的导体和电介质·····	13
第三章 稳恒电流·····	29
第四章 稳恒磁场·····	42
第五章 电磁感应和暂态过程·····	65
第六章 磁介质·····	80
第七章 交流电·····	90
第八章 麦克斯韦电磁理论和电磁波·····	101
附 录·····	107

第一章 静 电 场

§ 2 电 场 电 场强度

(上册26—28页)

3. 在早期(1911年)的一连串实验中,密立根在不同时刻观察在单个油滴上呈现的电荷,其测量结果(绝对值)如下:

6.568×10^{-19} 库仑	8.204×10^{-19} 库仑
11.50×10^{-19} 库仑	13.13×10^{-19} 库仑
16.48×10^{-19} 库仑	18.08×10^{-19} 库仑
19.71×10^{-19} 库仑	22.89×10^{-19} 库仑
26.13×10^{-19} 库仑	

根据这些数据,可以推得基本电荷 e 的数值为多少?

〔解〕 将相邻数据依次相减,所得差值中有数值彼此相近的两批,一批的数值刚好约为另一批的两倍。设较小的一批差值 $\simeq e$,较大的一批差值为 $2e$,然后将结果相加,共得

$$12e = 19.562 \text{ 库仑},$$

因而平均值为 $e = 1.630$ 库仑。

6. 如附图所示,一电偶极子的电偶极矩 $\mathbf{p} = q\mathbf{l}$, P 点到偶极子中心 O 的距离为 r , $\mathbf{r}$ 与 $\mathbf{l}$ 的夹角为 θ 。在 $r \gg l$ 时,求 P 点的电场强度 $\mathbf{E}$ 在 $\mathbf{r} = \overrightarrow{OP}$ 方向的分量 E_r 和垂

直于 r 方向上的分量 E_θ 。

〔解〕 设 P 点到 $\pm q$ 的距离分别为 r_+ 及 r_- (参看夸大了比例的右图),

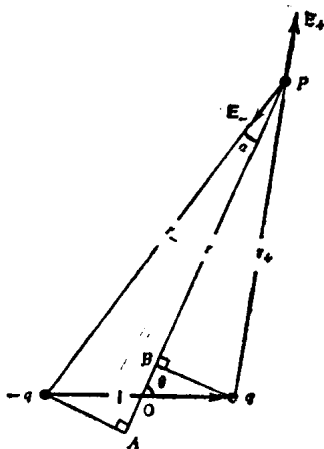
$$r_+ \simeq PB = r - \frac{1}{2}l \cos \theta,$$

$$r_- \simeq PA = r + \frac{1}{2}l \cos \theta.$$

则 $\pm q$ 单独存在时 P 点产生的场强大小分别为

$$E_+ = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{r_+^2},$$

$$E_- = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{r_-^2}.$$



(习题6)

$$(1) \quad E_r = E_+ \cos \alpha - E_- \cos \alpha \simeq E_+ - E_-$$

$$= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_+^2} - \frac{1}{r_-^2} \right),$$

注意上式中 $\cos \alpha = 1 + O(l^2/r^2) \simeq 1$. 将 r_+ 、 r_- 代入上式, 在展开式中忽略 $O(l^2/r^2)$ 项, 即

$$\frac{1}{r_\pm^2} = \frac{1}{r^2} \left(1 \mp \frac{l}{2r} \cos \theta \right)^{-2}$$

$$\simeq \frac{1}{r^2} \left(1 \pm \frac{l \cos \theta}{r} \right),$$

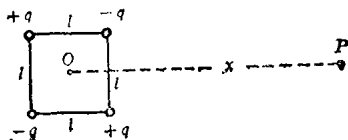
于是得
$$E_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{2p \cos \theta}{r^3}.$$

(2) $E_\theta = E_+ \sin \alpha + E_- \sin \alpha,$

而 $\sin \alpha \approx \frac{l}{2r} \sin \theta$, $r_\pm \approx r$ [因 $\sin \alpha \sim O(l/r)$, $r_\pm$ 中 $O(l/r)$ 项可忽略], 最后得

$$E_\theta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{p \sin \theta}{r^3}.$$

9. 附图中所示是另一种电四极子, 设 q 和 l 都已知, 图中 P 点到电四极子中心 O 的距离为 x , PO 与正方形的一对边平行, 求 P 点的电场强度 E .



当 $x \gg l$ 时, $E = ?$

(习题9)

[解] 将 P 点场强看作四个点电荷场的迭加, 可求得

$$E = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{1}{\left[\left(x - \frac{l}{2} \right)^2 + \frac{l^2}{4} \right]^{3/2}} - \frac{1}{\left[\left(x + \frac{l}{2} \right)^2 + \frac{l^2}{4} \right]^{3/2}} \right\},$$

方向垂直 OP 向上。当 $x \gg l$ 时, 括弧内因子按 l/x 幂次展开后, $O(l^2/x^2)$ 项可忽略, 因而

$$E = \frac{3pl}{4\pi\epsilon_0 x^4}.$$

13. 半径为 R 的圆面上均匀带电, 电荷的面密度为 σ_e .

(1) 求轴线上离圆心的坐标为 x 处的场强;

(2) 在保持 σ_e 不变的情况下, 当 $R \rightarrow 0$ 和 $R \rightarrow \infty$ 时结果各如何?

(3) 在保持总电荷 $Q = \pi R^2 \sigma_e$ 不变的情况下, 当 $R \rightarrow 0$ 和 $R \rightarrow \infty$ 时结果各如何?

〔解〕以圆心为坐标原点, 垂直于圆面指向场点的方向为 x 轴正方向, 取一电荷元 $dq = \sigma_e ds = \sigma_e dr \cdot dl$, 该电荷元在 P 点产生的电场只有 x 轴分量对总场强有贡献, 因而总场强为

$$\begin{aligned} E &= \int_0^R \int_{(l)} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\sigma_e x}{(x^2 + r^2)^{3/2}} dl \cdot dr \\ &= \int_0^R \frac{\sigma_e 2\pi x}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{r dr}{(x^2 + r^2)^{3/2}} \\ &= \frac{\sigma_e}{2\epsilon_0} \left(1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + R^2}} \right). \end{aligned}$$

当 $Q = \pi R^2 \sigma_e$ 不变, 而 $R \rightarrow 0$ 时, 将上式括号内第二项作泰勒展开, 取一级近似 $O(R^2/x^2)$, 即可得

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 x^2}.$$

§ 3 高 斯 定 理

(上册 49·51 页)

2. 均匀电场与半径为 a 的半球面的轴线平行, 试计算

通过此半球面的电通量。

〔提示〕用球坐标计算，注意坐标极轴应选在半球轴线（即电场）方向。

4. 根据量子理论，氢原子中心是一个带正电 q_e 的原子核（可以看成是点电荷），外面是带负电的电子云。在正常状态（核外电子处在 s 态）下，电子云的电荷密度分布是球对称的：

$$\rho_e(r) = -\frac{q_e}{\pi a_0^3} e^{-2r/a_0},$$

式中 a_0 为一常数（它相当于经典原子模型中 s 电子圆形轨道的半径，称为玻尔半径）。求原子内的电场分布。

〔解〕原子内的电场是原子核的电场 E_+ （按点电荷计算）和电子云的电场 E_- 的迭加。电子云的电场可利用高斯定理的结果，

$$E_-(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^2} \iiint \rho_e(r') dV,$$

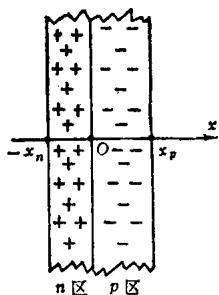
积分范围为 $0 \leq r' \leq r$ ，在球坐标中 $dV = r'^2 \sin\theta dr' d\theta d\varphi$ ，计算结果为

$$E_- = -\frac{q_e}{4\pi\epsilon_0 r^2} \left[\left(\frac{2r^2}{a_0^2} + \frac{2r}{a_0} + 1 \right) e^{-2r/a_0} - 1 \right],$$

所以原子核内总电场为

$$E = -\frac{q_e}{4\pi\epsilon_0 r^2} \left(\frac{2r^2}{a_0^2} + \frac{2r}{a_0} + 1 \right) e^{-2r/a_0}.$$

14. 在半导体 $p-n$ 结附近总是堆积着正、负电荷, 在 n



(习题14)

区内有正电荷, p 区内有负电荷, 两区电荷的代数和为零。

我们把 $p-n$ 结看成是一对带正、负电荷的无限大平板, 它们相互接触 (见附图)。取坐标 x 的原点在 p 、 n 区的交界面上, n 区的范围是 $-x_n \leq x \leq 0$, p 区的范围是 $0 \leq x \leq x_p$ 。设两区内电荷体分布都是均匀的;

$$\begin{cases} n \text{ 区: } \rho_e(x) = N_D e, \\ p \text{ 区: } \rho_e(x) = -N_A e. \end{cases} \quad (\text{突变结模型})$$

这里 N_D 、 N_A 是常数, 且 $N_A x_p = N_D x_n$ (两区电荷数量相等)。试证明电场的分布为

$$\begin{cases} n \text{ 区: } E(x) = \frac{N_D e}{\epsilon_0} (x_n + x), \\ p \text{ 区: } E(x) = \frac{N_A e}{\epsilon_0} (x_p - x). \end{cases}$$

并画出 $\rho_e(x)$ 和 $E(x)$ 随 x 变化的曲线来。

〔解〕用高斯定理分别求出 p 区及 n 区单独存在时的场强分布, 然后迭加。考虑到 $p-n$ 结外总场强为零, 因而只写出结区的场强。 p 区单独存在时的场强分布为

$$E_p = \frac{N_A e}{2\epsilon_0} x_p \quad (x \text{ 在 } n \text{ 区}),$$

$$E_p = \frac{N_A e}{\varepsilon_0} \left(\frac{1}{2} x_p - x \right) \quad (x \text{ 在 } p \text{ 区}),$$

n 区单独存在时的场强分布为

$$E_n = \frac{N_D e}{\varepsilon_0} \left(x + \frac{1}{2} x_n \right) \quad (x \text{ 在 } n \text{ 区}),$$

$$E_n = \frac{N_D e}{2\varepsilon_0} x_n \quad (x \text{ 在 } p \text{ 区}).$$

迭加后即可求得总场强分布。

15. 如果在上题中电荷的体分布为

$$\begin{cases} p-n \text{ 结外: } \rho(x) = 0, \\ -x_n \leq x \leq x_p: \rho(x) = -e a x, \end{cases} \quad (\text{线性缓变结模型})$$

这里 a 是常数, $x_n = x_p$ (为什么?), 统一用 $\frac{x_n}{2}$ 表示。试证明电场的分布为

$$E(x) = \frac{ae}{8\varepsilon_0} (x_n^2 - 4x^2),$$

并画出 $\rho_e(x)$ 和 $E(x)$ 随 x 变化的曲线来。

〔解〕分割成许多无限薄层迭加。在 x' 处厚度为 dx' 的一层上面电荷密度为 $\sigma_e = \rho_e(x') dx'$, 它在场点 x 处产生的场强为 $dE = \pm \frac{\rho_e(x') dx'}{2\varepsilon_0}$ ($x' < x$ 时取正号, $x' > x$ 时

取负号), 在 x 处的总场强为

$$E = \frac{1}{2\epsilon_0} \left[\int_{-x_m/2}^x \rho_e(x') dx' - \int_x^{x_m/2} \rho_e(x') dx' \right]$$

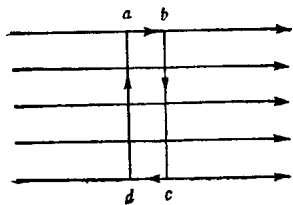
$$= \frac{ae}{8\epsilon_0} (x_m^2 - 4x^2).$$

§ 4 电位及其梯度

(上册71—76页)

3. 证明：在静电场中凡是电力线都是平行直线的地方，电场强度的大小必定处处相等；或者换句话说，凡是电场强度的方向处处相同的地方，电场强度的大小必定处处相等。

〔解〕 当电力线是平行直线时，以某一电力线为柱轴作一只包括该电力线的柱状高斯面，通过端面的电通量和场强相等，从而证明，同一电力线上任意两点场强相等。



(习题3)

对于不在同一电力线上的两点，取如图矩形环路，矩形长边垂直于电力线。当 ab 、 cd 均很小时，可认为 b 点与 a 点场强相等， c 点与 d 点场强相等，用环

路定理即可证明

$$E_a = E_d.$$

这就说明了凡电力线为平行直线处，电场强度大小必定处处相等。

13. 一电四极子如附图所示。证明：当 $r \gg l$ 时，它在 $P(r, \theta)$ 点产生的电位为

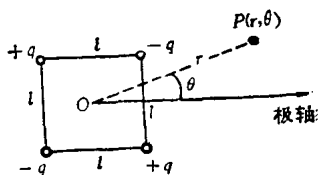
$$U = -\frac{3ql^2 \sin\theta \cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} \quad (r \gg l),$$

图中极轴通过正方形中心 O 点，且与一对边平行。

〔解〕 将 P 点电位看作四个点电荷电位的迭加。

先将四个点电荷的电位在直角坐标系（以图中极轴为 x 轴）中表示出来，然后分别

作泰勒展开后相加， l/r 的零级和一级项全部抵消，取二级近似，求得



(习题13)

$$U = -\frac{3ql^2 \sin\theta \cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^3}.$$

注意不能用两个偶极子的近似场强公式迭加，因这里要求正确给出 $O(l^2/r^2)$ 的系数，而在偶极子场强公式中对 $O(l^2/r^2)$ 量级的项已作某种忽略。

24. 电量 q 均匀地分布在长为 $2l$ 的细直线上，求下列各处的电位 U ：

(1) 中垂面上离带电线段中心 O 为 r 处，并利用梯度求 E_r ；

(2) 延长线上离中心 O 为 z 处，并利用梯度求 E_z 。

〔解〕 (1) 以细直线中心 O 为原点，延长线为 z 轴建立柱坐标系，中垂面上电位和场强分别为

$$U = \int_{-l}^l \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{2l\sqrt{r^2+z^2}} dz$$

$$= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 l} \ln \frac{l + \sqrt{r^2 + l^2}}{r},$$

$$E_r = -\frac{\partial U}{\partial r} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{r^2 + l^2}}.$$

(2) 延长线上的电位, 当 $z > l$ 时为

$$U = \frac{q}{8\pi\epsilon_0 l} \ln \frac{z+l}{z-l},$$

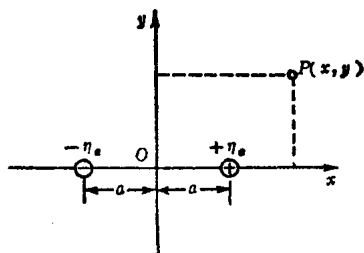
当 $z < -l$ 时,

$$U = \frac{q}{8\pi\epsilon_0 l} \ln \frac{z-l}{z+l},$$

两式可统一表示为

$$U = \frac{q}{8\pi\epsilon_0 l} \left| \ln \frac{z+l}{z-l} \right|.$$

而
$$E_z = -\frac{\partial U}{\partial z} = \frac{\pm q}{4\pi\epsilon_0 (z^2 - l^2)},$$



(习题27)

当 $z > l$ 时为正,

$z < -l$ 时为负.

27. 如附图所示, 两条均匀带电的无穷长平行直线 (与图纸垂直), 电荷的线密度分别为 $\pm \eta_e$, 相距为 $2a$, 求空间任一点 $P(x, y)$ 的电位.

〔提示〕可利用一根无限长带电线的电位分布公式，然后迭加。但应注意，此时不能选无穷远点为电位参考点，可对两导线选一共同参考点，譬如O点。最后可看出O点电位与无穷远处相等。

28. 证明在上题中电位为 U 的等位面是半径为 $r = \frac{2ka}{k^2-1}$ 的圆筒面，筒的轴线与两直线共面，位置在 $x = \frac{k^2+1}{k^2-1}a$ 处，其中 $k = \exp(2\pi\epsilon_0 U/\eta_c)$ (有关等位面图，参见上册图1-46)。 $U=0$ 的等位面是什么形状？

〔解〕 上题中电位相等的点满足方程

$$\frac{(x+a)^2 + y^2}{(x-a)^2 + y^2} = e^{4\pi\epsilon_0 U/\eta_c} = \text{常数},$$

这是一圆柱面方程。将上式中的常数称作 k^2 ，即

$$k = e^{2\pi\epsilon_0 U/\eta_c}.$$

将上述圆柱面方程化为标准形式，利用解析几何知识可找出圆柱面的柱轴位置和半径。当 $k^2=1$ 时，即求得 $U=0$ 的等位面是 $x=0$ 的平面。

§ 5 带电体系的静电能

(上册85—86页)

4. 利用虚功原理重新解 § 2 习题 7.

〔解〕 先求出偶极子 $\mathbf{p}$ 在 Q 的电场中的电位能 $W = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E} = -pE \cos\theta$ ，然后根据上册(1.55)、(1.56)式分

别求 $\mathbf{p}$ 受的力及力矩。

(1) 当 $\mathbf{p}$ 与 $\mathbf{E}$ 平行, $\mathbf{p}$ 只受到 $\mathbf{E}$ 方向的力 F_r ,

$$\begin{aligned} F_r &= -\frac{\partial W}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{pQ\cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} \right) \\ &= -\frac{2Qp\cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^3}, \end{aligned}$$

此时 $\theta = 0$, $\cos\theta = 1$, 因而

$$F_r = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{2Qp}{r^3},$$

负号表示 $\mathbf{F}$ 的方向与 $\mathbf{E}$ 相反。

(2) 当 $\mathbf{p}$ 与 $\mathbf{E}$ 垂直, $\mathbf{p}$ 受到力矩为

$$\begin{aligned} L_\theta &= -\frac{\partial W}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{pQ\cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} \right) \\ &= -\frac{Qp\sin\theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}, \end{aligned}$$

这时 $\sin\theta = 1$, 因而

$$L_\theta = -\frac{Qp}{4\pi\epsilon_0 r^2},$$

负号表示 $\mathbf{L}$ 的方向与 $\mathbf{E} \times \mathbf{p}$ 的方向相反。

运算时, 应先写出 W 的普遍表达式, 取偏微商后再代入 r 或 θ 的特殊值。