

应力波基础

王礼立 编著 朱兆祥 校

国防工业出版社



应力波基础

王礼立 编著
朱兆祥 审校

国防工业出版社

内 容 简 介

本书系统地叙述了固体介质中应力波传播理论的基础知识，这对于涉及爆炸、冲击和地震等动载荷条件下的军事技术、科学研究以及工农业生产等，都有着广泛的应用价值。为适合初学者，本书由浅入深地从杆中一维应力弹性波、塑性波、冲击波、卸载波等，逐步讨论到粘弹性波和弹粘塑性波，再进而讨论到一维应变平面波，球面波和柱面波，其中又分别包含弹性波、塑性波和粘塑性波等内容；最后介绍了一般的弹性波理论。全书以固体中的非线性波问题为重点。

本书读者对象是高等院校和科研单位有关科研人员，大学教师，工程技术人员，研究生和高年级大学生。

应 力 波 基 础

王礼立 编著

朱兆祥 审校

责任编辑 崔金泰

国防工业出版社出版

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

国防工业出版社印刷厂印装

787×1092¹/₁₆ 印张16 368千字

1985年5月第一版 1985年5月第一次印刷 印数：0,001—4,000册

统一书号：15034·2769 定价：2.95元

序 言

近四十年来，应力波理论越来越受到人们的重视。这一方面是由于在生产和军事技术上、在科学研究上要求对应力波传播起重要作用的地震现象、高速撞击、爆炸和武器效应，以及冲击载荷下材料和结构的反应等作出深入而准确的解释；另一方面也是由于应力波理论发展内在矛盾的需要，要求由浅入深，由简单到复杂，由特殊到一般。这样就由线性弹性波的研究发展到大变形的非线性弹性波，由低压的弹性波和极高压的流体应力波的研究发展到弹塑性波和粘塑性波；由单纯波发展到复合波；由连续波的研究发展到具有各阶间断的奇异面的传播如冲击波和加速度波等。应力波知识的大量积累又开辟了应力波在自然探索和技术开发等方面应用的广阔前景。例如利用爆炸后地应力波的传播、反射和折射来研究地球内部结构，查明地表地层分布和勘探石油资源等；用超声波进行无损探伤，利用声发射监视断裂的进展；用高速撞击产生的应力波研究材料的动态力学性能；用应力波铆接金属板件；利用应力波的破坏机制研制破碎装甲的武器以至击碎人体内结石以达到治疗的目的，等等，这些应用工具的发展又反过来进一步促进应力波理论的深入研究。这一切说明应力波理论是当前固体力学中极为活跃的前沿，是现代声学、地球物理学、爆炸力学和材料力学性能研究的重要基础。

应力波理论最早是从弹性波开始发展起来的。出乎人们意料之外的是，最初推动弹性波理论发展的强大力量竟来自光的本性研究的需要。1821年著名的物理学家 Fresnel 宣称，关于偏振光干涉的实验事实只能用横向振动假设来解释。他证明：以中心力相联结的分子所组成的介质可以实现这种横向振动并传播这种横波。在当时的自然科学界还从来没有在介质内部可以传播横波的概念。所以这一问题立刻吸引了两位第一流数学家 Cauchy 和 Poisson 的注意。通过他们的努力，前者建立了目前形式的弹性力学普遍方程组，后者据此发现了在弹性介质中可以传播两种性质不同的波，即纵波和横波。虽然这个发现给刚刚出现一线希望的光传播的弹性以太说带来了新的困难，但是毕竟从此开创了应力波理论。其后，用弹性波理论研究光波被球体或球腔衍射的还不乏其人，包括著名的物理学家 Clebsch (1863), Lorenz (1890), Lamb (1900) 等，甚至光的电磁理论的提出也没有阻止这种势头。直到爱因斯坦相对论的出现从根本上否定了弹性以太的存在才停止。菲涅耳的光学冲击诞生弹性应力波理论，然而它没有完成原来期望由它完成的任务，徒劳成长了。

第二个冲击来自碰撞问题。早期用振动中的正态模型来处理弹性固体的碰撞问题，没有获得成功。赫兹所处理的碰撞问题是质点动力学和接触问题的揉合。开始用应力波传播的概念来处理碰撞问题是 Poisson (1828) 和 Saint-Venant (1883)，他们分别讨论了重块对直杆的撞击和二杆对撞问题。后来六十年中除开解法的改进之外，几乎没有实质的进展，这可能是由于当时的力学还只擅长于线性问题，不足以处理实际中强烈撞击引起的塑性变形问题所致。

下继的巨大冲击来自地震。泊松论证弹性体中纵波和横波的存在是在 1831 年，四十

六年后 Rayleigh (1887) 论证了表面波的存在。到 1900 年 Oldham 终于在远震记录中识别出这三种波的存在, 从此地震学找到了有力的理论工具。地震记录中表面水平偏震横波的存在和弥散促使 Love (1911) 提出地表覆盖层的模型而发现了勒夫波。兰姆在 1904 年发表了一篇影响深远的文章, 论述地表和内源初始局部扰动所产生的应力波系, Sommerfeld (1909) 在电磁波研究中发现沿层间界面传播的折射波, 这二者促使 Mohorovičić (1909) 导出大陆地壳的分层。H. Jeffreys (1926) 解决了这个“折射震相”问题理论上的困难, 就使爆炸地震勘探法无可怀疑地被广泛应用了。弹性波在两个半无限空间和层状空间中的传播问题吸引了二十年代和三十年代许多数学家、力学家和地震学家, 其中有著名的苏联的索勃列夫和日本的妹泽克惟等。

第二次世界大战期间, 由于军事技术上的要求开辟了应力波理论的新局面。为提高装甲强度等所推动, 英国的 G. I. Taylor (1942), 美国的 Karman (1942), 苏联的 Рахматулин (1945) 各自独立地创立了塑性波理论。非线性加载波的传播问题可以用当时已经发展成熟的气体动力学中特征线方法来解决, 困难在于卸载时材料遵循不同的本构关系, 如何确定由于应力应变曲线所包含的间断引起的弹塑性边界的传播轨迹成为塑性波理论中一个核心问题。后继的讨论者如 E. H. Lee (1953), Clifton (1968), 丁启财 (1968-71) 不断改进研究结果, 直到最近才把一维应力和一维应变中的问题解决得比较完备了 (参见本书有关章节)。复合应力波的研究是塑性波理论发展的一个必然趋向, 从压缩剪切复合, 二剪切复合到压缩和二剪切复合, 在薄管中的压扭复合, 最后是复合应力柱面波。在六十年代里, 当时一些著名的塑性动力学专家几乎都参加了这方面的工作, 丁启财在 1973 年提出了平面和柱面复合应力波的统一理论作为总结。在复合波中最重要的是发现了弹塑性耦合的快波和慢波, 复合波中弹塑性边界的处理是饶有兴趣的, 这方面的工作只能说刚刚开了一个头。与此同时, 各向同性和各向异性材料中三维弹塑性波的理论框架也建立起来了。

对弹塑性波理论的实验验证表明有些应变率敏感材料在冲击载荷之下波传播的性能是和理论的预测不符的。Сокаловский (1948) 和 Malvern (1951) 观察到材料的动态应力应变曲线一般高于静态曲线, 他们假定塑性应变率是超出部份应力的函数。由这种广义 Maxwell 本构关系的粘塑性波理论预言增量应力波以弹性波速传播, 这和实验观察相符。从弹塑性波和粘塑性波的理论建立和实验验证过程中可以看到, 在应力波基本方程组中必须包含合适的材料本构方程才能正确地预测应力波波形, 而材料动态本构关系的函数形式和其中的材料常数只有通过应力波波形数据的分析处理才能确定。应力波理论和材料本构关系之间这种“狗咬尾巴”的关系当然会给研究工作带来困难。实践证明了这两门学科之间存在的血缘联系, 力学家只有不断克服这种循环周转的困难才能前进。

用应力波作为实验工具来确定材料动态力学性能的方法, 由于在第二次世界大战期间电子仪器的发展使得精密的瞬态测量成为可能, 才蓬勃发展起来。这时发展了用超声波来测量材料的动态弹性系数和粘性耗散的办法, 又在 Hopkinson (1914) 压杆的基础上发展了 Davis 杆、Kolsky 杆等测量材料的动态应力应变曲线。许多实验家也以杆撞击的应力波数据反推材料的本构关系或者作计算机实验试凑的依据。

四十年代核武器的研制和防护研究大大推动了对材料在高压和高速变形下力学性能

的研究,发展了用爆炸驱动的或轻气炮驱动的平板撞击技术来测定材料的冲击绝热数据。由于测试仪器分辨力的不断提高,平板撞击技术已发展到可以用毫微秒展开的应力波形来确定弹粘塑性材料的本构函数,用以研究应力波引起的层裂现象。最近又发展了用平板斜撞击技术来研究复合应力波和动态屈服条件。

核爆炸又推动了弹性介质中球腔爆炸波的研究以及应力波的绕射和孔壁动态应力集中问题,特别是大大推动了固体中冲击波理论的研究,以及在流体弹塑性介质中应力波传播的数值计算等。

最后值得提一提奇异面理论在应力波研究中的巨大作用。一百年以来,许多数学家和理论力学家在这方面作出了巨大的贡献。最早是由 Christoffel (1877) 和 Hugoniot 提出的,把波看成严格地限制在一个曲面上的扰动。Hadamard (1900) 建立了奇异面的完整理论。这一理论在冷落了六十年之后,在六十年代初期又突然复兴了,用此研究了线性弹性体、非线性弹性体、粘弹性体、弹塑性体,以及热弹性体、磁弹性体中各阶间断面的传播,其中冲击波和加速度波的传播特别引人注目,成果很丰富,以致无法列上众多作家的名字。

国内近三十年来在应力波研究方面也获得了丰硕的成果,如中国科学院地球物理研究所傅承义教授领导下的地震波的研究,声学研究所应崇福教授领导下的弹性波散射和超声波的研究,力学研究所郑哲敏教授领导下的流体弹塑性体模型及其在核爆炸和穿甲方面应用的研究以及材料动态力学性能的研究,工程力学研究所在刘恢先教授领导下的弹塑性波的有限元计算和动态应力集中问题的研究,太原工学院在杨桂通教授领导下的关于塑性动力学的研究,北京大学在王仁教授领导下的动态屈曲和高速撞击的研究等。中国科学技术大学进行了应力波引起的层裂、弹塑性边界的传播,以及金属和高分子材料动态力学性能的研究。为了适应应力波理论日新月异迅速发展的局面,使学习固体力学和爆炸力学的学生在面临冲击载荷下材料和结构的反应问题时具备必需的基础知识,中国科学技术大学近代力学系从1962年开始开设“应力波”课程。曾经用过的课程名字有“弹性动力学”,“塑性动力学”,“塑性波理论”,“冲击波物理”,“爆炸固体力学”,“应力波”等,而其内容基本上都是固体中的应力波。先后参与讲座的教师有尹祥础、王礼立、杨振声、郭汉彦、李永池、王肖钧等,我也有机会参与其事。近二十年来,在许多教师的共同努力之下,先后编著了许多版本的讲义和讲稿,逐步形成了应力波课程的体系。现在由王礼立教授执笔,把讲义中较为基础和实用的部份如一维应力和一维应变的弹塑性波、粘弹性波和粘塑性波,柱面和球面的弹塑性波,三维线性弹性波基础等整理出来,编辑成书,定名为《应力波基础》,正式出版,以应各方面的迫切需要。至于应力波理论中较现代的部份,待以后继续整理出版。在这本书稿中凝结了许多人的经验和智慧。我有机会从头到尾校读了全书的原稿,觉得有些话要向广大读者交代,也应该向为本门课程的形成作过贡献的老师們表示感谢,向为本书原稿的誊写、画图、提供问题的老师們表示感谢,故为之序。

朱兆祥

1983年6月4日于中国科学技术大学

目 录

第一章 绪论	1
第二章 一维杆中应力波的初等理论	5
§2.1 物质坐标和空间坐标	5
§2.2 物质坐标描述的杆中纵波的控制方程	7
§2.3 特征线和特征线上相容关系	9
§2.4 半无限长杆中的弹塑性加载纵波	12
1. 线性弹性波	12
2. 弹塑性加载波	16
§2.5 空间坐标描述的控制方程	18
§2.6 强间断和弱间断, 冲击波和连续波	21
§2.7 波阵面上的守恒条件	25
§2.8 横向惯性引起的弥散效应	29
§2.9 杆中扭转波	32
第三章 弹性波的相互作用	36
§3.1 两弹性杆的共轴撞击	36
§3.2 两弹性波的相互作用	37
§3.3 弹性波在固定端和自由端的反射	38
§3.4 有限长弹性杆的共轴撞击	39
§3.5 弹性波在不同介质界面上的反射和透射	42
§3.6 弹性波在变截面杆中的反射和透射	44
§3.7 Hopkinson 压杆和飞片	46
§3.8 应力波引起的断裂	47
第四章 弹塑性波的相互作用	51
§4.1 弹塑性加载波的相互作用	51
1. 强间断弹塑性波的迎面加载	51
2. 弱间断弹塑性波的迎面加载	53
§4.2 弹塑性加载波在固定端的反射	55
§4.3 卸载波的控制方程和特征线	58
§4.4 强间断卸载扰动的追赶卸载	60
1. 线性硬化杆中强间断波的突然卸载	60
2. 线性硬化杆中连续波的突然卸载	65
3. 塑性中心波的突然卸载	68
§4.5 弱间断卸载扰动的追赶卸载	72
1. 塑性中心波的连续卸载	73
2. 线性硬化材料中冲击波的衰减	74

§4.6	冲击波在追赶卸载作用下的衰减	77
§4.7	半无限长杆中卸载边界的传播特性	79
§4.8	迎面卸载	86
§4.9	有限长杆在刚砧上的高速撞击	89
	1. 线性硬化杆的撞击	90
	2. 递增硬化杆的撞击	94
	3. 递减硬化杆的撞击	97
§4.10	弹塑性边界的一般传播特性	99
	1. 加载边界和卸载边界	99
	2. 作为奇异面的弹塑性边界	100
	3. 强间断弹塑性边界	101
	4. 一阶弱间断边界	101
	5. 二阶弱间断边界	105
	6. 高于二阶的弱间断边界的讨论	107
	7. 弹塑性边界上的高阶孤立点	109
	8. 加载边界上的补充条件	114
第五章	刚性卸载近似	117
§5.1	半无限长杆中的刚性卸载	117
§5.2	有限长杆中的刚性卸载	123
§5.3	冲击波传播中的刚性卸载	126
第六章	一维粘弹性波和弹粘塑性波	130
§6.1	粘弹性本构关系	130
§6.2	应力波在粘弹性杆中的传播	135
§6.3	弹粘塑性本构关系	139
§6.4	应力波在弹粘塑性杆中的传播	143
第七章	一维应变平面波	146
§7.1	控制方程	146
§7.2	一维应变弹性波	147
§7.3	一维应变下的弹塑性本构关系	149
§7.4	一维应变弹塑性波	154
§7.5	反向屈服对于弹塑性波传播的影响	156
§7.6	固体高压状态方程	159
§7.7	高压下固体中的冲击波	164
	1. 冲击突跃条件	165
	2. 冲击绝热线	168
§7.8	高压下固体中冲击波的相互作用, 反射和透射	175
§7.9	流体弹塑性介质中的平面波	180
§7.10	流体弹塑性介质中冲击波的衰减	185
§7.11	一维应变弹粘塑性波	190
第八章	球面波和柱面波	194

§8.1	连续方程和运动方程	194
§8.2	弹性球面波和柱面波	196
§8.3	弹塑性球面波	201
§8.4	球形弹壳破碎的近似分析	206
§8.5	弹粘塑性球面波和柱面波	208
第九章	一般线弹性波	213
§9.1	无限介质中的线弹性波	213
§9.2	弹性平面波的斜入射	216
§9.3	表面波	223
附录	228
附录 I	压力或应力单位换算表	228
附录 II	习题	228
参考文献	241
索引	245

第一章 绪 论

在生产技术、军事技术和科学研究等广泛领域的一系列实际问题中，甚至就在日常生活中，人们都会遇到各种各样的冲击载荷问题，并且可以观察到，物体在冲击载荷下的力学响应往往与静载荷下的有显著不同。例如，飞石打击在窗玻璃上时往往首先在玻璃的背面造成碎裂崩落。碎甲弹对坦克装甲的破坏正类似于此。又如，对一金属杆端部施加轴向静载荷时，变形基本上是沿杆均匀分布的，但当施加轴向冲击载荷时（如打钎，打桩……），则变形分布极不均匀，残余变形集中于杆端。子弹着靶时，变形呈蘑菇状也正类似于此。固体力学的动力学理论的发展正是与解决这类力学问题的需要分不开的。

为什么在冲击载荷下会发生诸如此类的特有现象呢？为什么这些现象不能用静力学理论来给以说明呢？固体力学的动力学理论与静力学理论的主要区别是什么呢？

首先，人们知道，固体力学的静力学理论所研究的是处于静力平衡状态下的固体介质，以忽略介质微元体的惯性作用为前提。这只是在载荷强度随时间不发生显著变化的时候，才是允许和正确的。而冲击载荷以载荷作用的短历时为其特征，在以毫秒、微秒甚至毫微秒计的短暂时间尺度上发生了运动参量的显著变化。例如核爆炸中心压力可以在几微秒内突然升高到 $10^7 \sim 10^8$ 巴量级；炸药在固体表面接触爆炸时的压力也可在几微秒内突然升高到 10^5 巴量级；子弹以 $10^2 \sim 10^3$ 米/秒的速度射击到靶板上时，载荷总历时约几十微秒，接触面上压力可高达 $10^4 \sim 10^5$ 巴量级。在这样的动载荷条件下，介质的微元体处于随时间迅速变化着的动态过程中，这是一个动力学问题。对此必须计及介质微元体的惯性，从而就导致了对应力波传播的研究。

事实上，当外载荷作用于可变形固体的某部份表面上时，一开始只有那些直接受到外载荷作用的表面部份的介质质点离开了初始平衡位置。由于这部份介质质点与相邻介质质点之间发生了相对运动（变形），当然将受到相邻介质质点所给予的作用力（应力），但同时也给相邻介质质点以反作用力，因而使它们也离开了初始平衡位置而运动起来。不过，由于介质质点具有惯性，相邻介质质点的运动将滞后于表面介质质点的运动。依次类推，外载荷在表面上所引起的扰动就这样地在介质中逐渐由近及远传播出去而形成应力波。扰动区域与未扰动区域的界面称为波阵面，而其传播速度称为波速。常见材料的应力波波速约为 $10^2 \sim 10^3$ 米/秒量级。必须注意区分波速和质点速度。前者是扰动信号在介质中的传播速度，而后者则是介质质点本身的运动速度。如果两者方向一致，称为纵波；如果两者方向垂直，则称为横波。根据波阵面几何形状的不同，则有平面波、柱面波、球面波等之分。地震波，固体中的声波和超声波，以及固体中的冲击波等都是应力波的常见例子。

一切固体材料都具有惯性和可变形性，当受到随时间变化着的外载荷的作用时，它的运动过程总是一个应力波传播、反射和相互作用的过程。在忽略了介质惯性的可变形固体的静力学问题中，只是允许忽略或没有必要去研究这一在达到静力平衡前的应力波

的传播和相互作用的过程，而着眼于研究达到静力平衡后的结果而已。在忽略了介质可变形性的刚体力学问题中，则相当于应力波传播速度趋于无限大，因而不必再予考虑。对于冲击载荷条件下的可变形固体，由于在与应力波传过物体特征长度所需时间相比是同量级或更低量级的时间尺度上，载荷已经发生了显著变化，甚至已作用完毕，而这种条件下可变形固体的运动过程常常正是我们关心所在，因此就必须考虑应力波的传播过程。

其次，强冲击载荷所具有的在短暂时间尺度上发生载荷显著变化的特点，必定同时意味着高加载率或高应变率。一般，常规静态试验中的应变率为 $10^{-5} \sim 10^{-1} \text{秒}^{-1}$ 量级，而在必须计及应力波传播的冲击试验中的应变率则为 $10^2 \sim 10^4 \text{秒}^{-1}$ ，甚至可高达 10^7秒^{-1} ，即比静态试验中的高得多。大量实验表明，在不同应变率下，材料的力学性能往往是不同的。从材料变形机理来说，除了理想弹性变形可看作瞬态响应外，各种类型的非弹性变形和断裂都是以有限速率发展、进行的非瞬态响应（如位错的运动过程，应力引起的扩散过程，裂纹的扩展和传播过程等等），因而材料的力学性能本质上是与应变率相关的。通常表现为：随着应变率的提高，材料的屈服限提高，强度极限提高，延伸率降低，以及屈服滞后和断裂滞后等现象变得明显起来等等。因此，除了上述的介质质点的惯性作用外，物体在冲击载荷下力学响应之所以不同于静载荷下的另一个重要原因，是材料本身在高应变率下的动态力学性能与静态力学性能的不同，即由于材料本构关系对应变率的相关性。从热力学的角度来说，静态应力应变关系接近于等温过程，而高应变率下的动态应力应变关系则接近于绝热过程。

这样，如果将一个结构物在冲击载荷下的动态响应与静态响应相区别的话，则实际上既包含了介质质点的惯性效应，也包含着材料本构关系的应变率效应。当我们处理冲击载荷下的固体动力学问题时，实际上面临着两方面的问题：其一是已知材料的动态力学性能，在给定的外载荷条件下研究介质的运动，这属于应力波传播规律的研究；其二是借助于应力波传播的分析来研究材料本身在高应变率下的动态力学性能，这属于材料力学性能或本构关系的研究。问题的复杂性正在于：一方面应力波理论的建立要依赖于对材料动态力学性能的了解，是以已知材料动态力学性能为前提的；而另一方面材料在高应变率下动态力学性能的研究又往往需依赖于应力波理论的分析指导。因此，应力波的研究和材料动态力学性能的研究之间有着特别密切的关系。

虽然从本质上说材料本构关系总是或多或少地对应变率敏感的，但其敏感程度视不同材料而异，也视不同的应力范围和应变率范围而异。在一定的条件下，有时可近似地假定材料本构关系与应变率无关。在此基础上建立的应力波理论称为应变率无关理论。其中，根据应力应变关系是线弹性的、非线性弹性的、塑性的等，则分别称为线弹性波、非线性弹性波、塑性波理论等。反之，如果考虑到材料本构关系的应变率相关性，相应的应力波理论则称为应变率相关理论。其中，根据本构关系是粘弹性的、粘弹塑性的、弹粘塑性的等，则分别称为粘弹性波、粘弹塑性波、弹粘塑性波理论等。

应力波理论的发展，首先是从应变率无关理论开始的。线弹性波理论是在十九世纪三十年代由 Poisson, Остроградский, Stokes 等人，以及随后由 Rayleigh 等人，与弹性振动的研究相联系而发展起来的（参见 Kolsky (1953)^[49]）。

塑性波理论的建立几乎比线弹性波理论晚了整整一百年。关键在于需要解决两个难

题：一是由于塑性加载时的非线性应力应变关系，相应地需要发展非线性加载波理论；二是由于塑性变形的不可逆性，卸载与加载时分别遵循不同的应力应变关系，相应地需要发展卸载波理论。从这一角度出发，最早的塑性波的研究可追溯到 Donnell(1930)^[29]的工作。但塑性波理论的真正建立和发展，是直到第二次世界大战时由于军事技术的需要，由 Von Kármán 等 (1942)^[45]在美国，Taylor, G.I (1940)^[81]在英国和 Рахматулин (1945)^[70]在苏联分别独立发展的，直到战后才公开宣布。从理论发展的思路来说，他们所建立的一维杆塑性波理论，是沿着把较低应力下的线弹性波理论推广到较高应力下的塑性波理论这一途径发展的。

另一方面，在第二次世界大战期间，人们又沿着另一途径发展了塑性波理论，即把很高压力下的固体当作可压缩流体来处理而忽略其剪切强度，从而把流体动力学中有关冲击波的研究推广到高压固体，发展了固体冲击波理论（流体动力学近似），其典型代表是 Rice, McQueen 和 Walsh 等在四十年代所作的大量工作^[73]。此后这一理论又推广到中等压力下以计及固体剪切强度的影响，从而建立和发展了一维应变塑性波理论（流体弹塑性模型）^[19,52]。

至于与应变率相关的粘塑性波理论，是五十年代前后由 Соколовский (1948)^[78]及 Malvern (1951)^[69]等提出弹粘塑性波一维理论后才开始发展起来的。Perzyna (1963)^[68]把这一理论推广到了三维情况。

近三十年来，应力波的研究和应用取得了迅速发展，广泛地应用于地震研究，工程爆破（开矿、修路、筑坝），爆炸加工（成型、复合、焊接、硬化），爆炸合成（人造金刚石，人造氮化硼……），超声波和声发射技术，机械设备的冲击强度，工程结构建筑的动态响应，武器效应（弹壳破片的形成、聚能破甲、穿甲、碎甲、核爆炸和化学爆炸的效应及其防护……），微陨石和雨雪冰沙等对飞行器的高速撞击，地球和月球表面的陨星坑的研究，材料在高应变率下的力学性能和本构关系的研究，动态断裂的研究，动态高压下材料力学性能（包括固体状态方程）、电磁性能和相变等的研究，高能量密度粒子束如电子束、 α 射线、激光等对材料的作用的研究等。

本书从第二章开始将首先讨论一维杆中应力波的初等理论。在建立基本关系式以后，将由浅入深地依次对弹性波（第三章）、弹塑性加载波和卸载波（第四章）、刚性卸载（第五章）、粘弹性波和弹粘塑性波（第六章）等逐一加以讨论。内容的取舍不追求包罗万象而取决于系统叙述的需要，并且不停留于原文献的转述或简单综合，而是按照统一的逻辑系统和处理方法进行的。书中主要采用 Lagrange 描述法，但对 Euler 描述法也作了介绍。我们希望通过这样的叙述使读者对应力波理论有一个初步而又比较系统的了解。

对于初次接触应力波理论的读者来说，这前五章是基础性的。虽然其内容限于简单的一维运动，由于数学处理上较简单，就更便于初学者掌握和理解应力波的概念和解题方法。应力波理论主要关心的是介质不断随坐标和时间变化着的非均匀、非定常运动，着重于动载荷对介质的局部效应和早期效应的分析。应力波分析中要注意载荷与介质之间的耦合作用，要注意应力波和材料动态力学性能之间相互依赖的密切关系。这些正是固体力学动力学与静力学理论的主要不同之处。

在第七章中讨论了一维应变平面波传播理论。这里应变是一维的，但应力是三维

4

的，因而本构关系就比较复杂了。讨论是从两个方面进行的。一方面从较低应力下的一维应变弹性波着手，进而讨论较高应力下的一维应变弹塑性波。另一方面从高压下忽略固体剪切强度(流体模型)的固体冲击波理论着手，进而讨论在应力逐渐降低情况下的一维应变弹塑性波(流体弹塑性模型)。为此还简要地讨论了一下固体高压状态方程。

在第八章中讨论了球面和柱面波。由于两者在数学处理和传播特性上的相似性，可以合在一起讨论。在这里，也是从讨论弹性波开始，进而讨论弹塑性波，最后讨论弹粘塑性波。另外还介绍了一个刚塑性分析的例子。

最后，为了对一般情况下应力波的传播有初步了解，在第九章中简要地讨论了均匀无限介质中的线弹性波，线弹性波在斜入射时的反射和透射，以及 Rayleigh 表面波。

应力波理论的内容当然远不止此。上述内容只能说为更深一步的钻研提供了一个基础，更详细更专门的内容可在所附参考文献中找到。

当前应力波研究的主要动向是：进一步由一维理论向二维、三维理论发展，向复合载荷条件下的应力波研究发展；由小变形的应力波理论向大变形的应力波理论发展；由应变率无关理论向应变率相关理论发展；由纯力学的应力波向热-力学耦合的应力波研究发展；由各向同性介质中的应力波向各向异性介质和复合材料中的应力波研究发展；以及在应力波传播分析中更广泛采用电子计算机数值计算和寻找发展新的实验技术。

第二章 一维杆中应力波的初等理论

§ 2.1 物质坐标和空间坐标

在研究杆的运动前，先要选定坐标系。

在连续介质力学中，可以采用两种不同的观点和方法来研究介质的运动，即：Lagrange法和Euler法。

连续介质力学的基本出发点之一是不从微观上考虑物体的真实物质结构而只在宏观上数学模型化地把物体看作由连续不断的质点所构成的系统，即把物体看作质点的连续集合。质点的存在以其占有空间位置来表现。不同的质点在一定时刻占有不同的空间位置。一个物体中各质点在一定时刻的相互位置的配置称为构形。为了使质点能相互区别，就需要对质点命名，而为了描述质点所占的空间位置，就需要一个参考的空间坐标系。

以我们即将研究的杆的一维运动为例。设质点以 X 来表示（即其命名），其在空间所占的位置以 x 来表示。介质的运动表现为质点 X 在不同的时间 t 取不同的空间位置 x ，即 x 是 X 和 t 的函数

$$x = x(X, t). \quad (2.1)$$

固定 X ，上式给出质点 X 如何随时间运动，即其空间位置随时间的变化；固定 t ，则上式给出时刻 t 时各质点所占的空间位置。一般，在给定时刻下一个质点只能占有一个空间位置，一个空间位置上也只能有一个质点。所以，反过来也可以从某一时刻 t 时所占的空间位置来确定质点。换言之，只要运动是连续和单值的，式(2.1)就可反演为

$$X = X(x, t). \quad (2.2)$$

一个简单方便的命名质点的方法是用参考时刻 t_0 时在参考空间坐标系中质点所占位置 x_0 来命名质点，把它记作 X 。这时，式(2.1)和(2.2)给出了质点在参考时刻 t_0 时的位置和 t 时刻时的位置两者间的相互转换关系。附带说明两点：可以取 $t_0 = 0$ ，即选初始时刻作为上述的参考时间，但也可选其他适当的时刻；用来命名质点的 t_0 时刻的参考空间坐标系可以和描述运动所用的空间坐标系一致，但也可以不同。这些都取决于研究问题的方便。

这样，当研究介质运动时，可以采用两种方法：一种是随着介质中固定的质点来观察物质的运动，所研究的是在给定的质点上各物理量随时间的变化，以及这些量由一质点转到其他质点时的变化，也就是把物理量 Ψ 看作质点 X 和时间 t 的函数： $\Psi = F(X, t)$ 。这种方法称为拉格朗日方法，自变量 X 称为Lagrange坐标或物质坐标。

另一种是在固定空间点上来观察物质的运动，所研究的是在给定的空间点上以不同时刻到达该点的不同质点的各物理量随时间的变化，以及这些量由一空间点转到其他空间点时的变化，也就是把物理量 Ψ 看作空间点 x 和时间 t 的函数： $\Psi = f(x, t)$ 。这种方法称为欧拉方法，自变量 x 称为Euler坐标或空间坐标。

注意到式 (2.1) 和 (2.2), 也就是 t 时刻物质坐标和空间坐标之间相互变换的关系式, 则以物质坐标描述的物理量 Ψ 的函数 $F(X, t)$ 可藉此变成以空间坐标描述的函数 $f(x, t)$

$$f(x, t) = F[X(x, t), t],$$

或相反地,

$$F(X, t) = f[x(X, t), t].$$

与之相应地有两种时间微商, 即在给定的空间位置 x 上量 Ψ 对时间 t 的变化率, 记作

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} \equiv \left(\frac{\partial f(x, t)}{\partial t} \right)_x, \quad (2.3)$$

称为空间微商 (Euler 微商); 以及跟随着给定质点 X 来观察的量 Ψ 对时间 t 的变化率, 记作

$$\frac{d\Psi}{dt} \equiv \left(\frac{\partial F(X, t)}{\partial t} \right)_X, \quad (2.4)$$

称为物质微商 (Lagrange 微商), 或随体微商。把式中 $F(X, t)$ 看作 (x, t) 的复合函数 $F[X(x, t), t]$, 利用复合函数求微商的连锁法则, 可得

$$\begin{aligned} \frac{d\Psi}{dt} &= \left(\frac{\partial F[X(x, t), t]}{\partial t} \right)_x + \left(\frac{\partial F[X(x, t), t]}{\partial x} \right)_t \left(\frac{\partial x}{\partial t} \right)_x \\ &= \left(\frac{\partial f(x, t)}{\partial t} \right)_x + \left(\frac{\partial f(x, t)}{\partial x} \right)_t \left(\frac{\partial x}{\partial t} \right)_x, \end{aligned}$$

这里的 $\left(\frac{\partial x}{\partial t} \right)_x$ 是质点 X 的空间位置 x 对时间 t 的物质微商, 正是质点的速度 v :

$$v = \left(\frac{\partial x}{\partial t} \right)_x \equiv \frac{dx}{dt}. \quad (2.5)$$

因之不言自明地略去下标时可得

$$\frac{d\Psi}{dt} = \frac{\partial \Psi}{\partial t} + v \frac{\partial \Psi}{\partial x}. \quad (2.6)$$

当 Ψ 为质点速度 v 时, 它的物质微商正是质点的加速度 a ,

$$a = \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)_x \equiv \frac{dv}{dt}. \quad (2.7)$$

而由式 (2.6) 可知:

$$a = \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x}, \quad (2.8)$$

右边第一项是质点速度在空间位置 x 处对时间 t 的变化率, 称为局部加速度, 在定常场中此项为零; 第二项是质点速度由于空间位置改变而引起的时间变化率, 称为迁移加速度, 在均匀场中此项为零。

在应力波传播的研究中还应注意波速的描述与坐标系的选择密切相关。如果在物质坐标中来观察应力波的传播, 设在 t 时刻波阵面传播到质点 X 处, 以 $X = \Phi(t)$ 表示波阵面在物质坐标中的传播规律, 则

$$C = \left(\frac{dX}{dt} \right)_w = \dot{\Phi}(t) \quad (2.9a)$$

称为物质波速 (Lagrange 波速), 或内禀波速。如果在空间坐标中来观察应力波的传播, 设在 t 时刻波阵面传播到空间点 x 处, 以 $x = \varphi(t)$ 表示波阵面在空间坐标中的传播规律, 则

$$c = \left(\frac{dx}{dt} \right)_w = \dot{\varphi}(t) \quad (2.9b)$$

称为空间波速 (Euler 波速)。这两种波速虽然都是对同一个波的传播速度的描述, 由于在不同的坐标系中量度, 因而除非波阵面前方介质是静止而无变形的, 一般说来, 两种波速的值是不等的。

在定义了波速之后, 还可以讨论一下在应力波研究中常用的第三种时间微商, 即跟随着波阵面来观察的任一物理量 Ψ 对时间 t 的总变化率 $\left(\frac{d\Psi}{dt} \right)_w$, 称为随波微商。类似于空间坐标中的随体微商 (式 2.6), 在空间坐标中的随波微商为

$$\left(\frac{d\Psi}{dt} \right)_w = \left(\frac{\partial\Psi}{\partial t} \right)_x + c \left(\frac{\partial\Psi}{\partial x} \right)_t, \quad (2.10a)$$

而在物质坐标中的随波微商为

$$\left(\frac{d\Psi}{dt} \right)_w = \left(\frac{\partial\Psi}{\partial t} \right)_X + C \left(\frac{\partial\Psi}{\partial X} \right)_t. \quad (2.10b)$$

式 (2.10a) 和 (2.10b) 也是用不同坐标系表述的同一物理现象。当式 (2.10b) 中 Ψ 具体指质点的空间位置 $x(X, t)$ 时, 再注意到在一维运动中

$$\left(\frac{\partial x}{\partial X} \right)_t = (1 + \varepsilon),$$

此处 ε 为工程应变, 即可得到平面波传播时空间波速 c 和物质波速 C 间的下述关系:

$$c = v + (1 + \varepsilon)C. \quad (2.11)$$

对于在初始质点速度为零和初始应变为零的介质中传播的平面波, 空间波速和物质波速显然相同。

§ 2.2 物质坐标描述的杆中纵波的控制方程

在物质坐标中来研究一等截面的均匀杆的纵向运动。取变形前 ($t = 0$ 时) 的质点的空间位置作为物质坐标, 并选杆轴为 X 轴 (图 2.1)。这时, 杆在变形前的原始截面积 A_0 , 原始密度 ρ_0 和其他材料性能参数都与坐标无关, 截面形状一般也无限制。

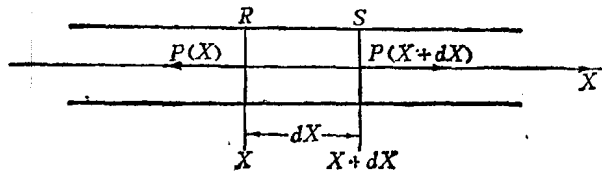


图 2.1

作第一个基本假定: 杆在变形时横截面保持为平面, 沿截面只有均布的轴向应力。于是各运动参量都只是 X 和 t 的函数, 整个问题简化为一维问题。在下面的讨论中, 位移 u 、应变 $\varepsilon = \frac{\partial u}{\partial X}$ 、质点速度 $v = \frac{\partial u}{\partial t}$ 和应力 σ 等均直接表示 X 方向的分量, 除特殊情况外不再加下标 X 来标明。这里的应力是工程应力 (即名义应力), 应变是工程应变, 并且在一维情况下, 物质型伸长度 $\frac{\partial u}{\partial X}$ 并无小变形的限制。

基本方程的组成包括运动学条件（连续方程或质量守恒方程），动力学条件（运动方程或动量守恒方程）以及材料本构关系（物性方程）。在目前的具体条件下可按下述方法分别求得：

注意到应变 ε 和质点速度 v 分别是位移 u 对 X , t 的一阶导数，由位移 u 的单值连续条件就可得到联系 ε 和 v 的相容性方程即连续方程：

$$\frac{\partial v}{\partial X} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} \quad (2.12)$$

考察杆的一长度为 dX 的微元体（图 2.1）。在截面 R 上作用有总力 $P(X, t)$ ，而在截面 S 上作用有总力

$$P(X+dX, t) = P(X, t) + \frac{\partial P(X, t)}{\partial X} dX.$$

根据牛顿第二定律，应有

$$\rho_0 A_0 dX \frac{\partial v}{\partial t} = P(X+dX, t) - P(X, t) = \frac{\partial P}{\partial X} dX,$$

再引入工程应力 $\sigma = P/A_0$ ，即得运动方程：

$$\rho_0 \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial \sigma}{\partial X} \quad (2.13)$$

注意，在目前的物质坐标表述中，式 (2.12) 和 (2.13) 中的 $\frac{\partial}{\partial t}$ 已包含着 X 不变之意，是对时间的随体微商，没有必要再用 $\frac{d}{dt}$ 表出。

关于材料本构关系，先限于讨论应变率无关理论，则作第二个基本假定：应力只是应变的单值函数，即材料本构关系可写成

$$\sigma = \sigma(\varepsilon). \quad (2.14)$$

由于应力波波速很高，在应力波通过微元体的时间内，微元体还来不及和邻近的微元体及周围介质交换热量，因此可近似地认为过程是绝热的。这里写出的本构关系实质上是指绝热的应力应变关系。正是由于这样一种考虑，我们就无需列出能量守恒方程而得到关于变量 σ 、 ε 、 v 的封闭的控制方程组 (2.12)~(2.14)。杆中纵向应力波的传播问题就是从这些基本方程，按给定的初始条件和边界条件，来求解三个未知函数 $\sigma(X, t)$ 、 $\varepsilon(X, t)$ 和 $v(X, t)$ 。

在以上的讨论中及以后，规定应力和应变均以拉为正，而质点速度以 X 轴向为正，反之为负。

一般， $\sigma(\varepsilon)$ 是连续可微函数，引入

$$C^2 = \frac{1}{\rho_0} \frac{d\sigma}{d\varepsilon}, \quad (2.15)$$

就可由式 (2.13) 和 (2.14) 消去 σ ，得

$$\frac{\partial v}{\partial t} = C^2 \frac{\partial \varepsilon}{\partial X}; \quad (2.16)$$

或由式 (2.12) 和 (2.14) 消去 ε ，得

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} = \rho_0 C^2 \frac{\partial v}{\partial X}. \quad (2.17)$$