工学硕士入学考试

数学复习指导及模拟练习

张元德　胡金德　编

清华大学出版社

工学硕士入学考试
数学复习指导及模拟练习

张元德　胡金德　编

清华大学出版社
1994年

(京)新登字 158 号

内 容 提 要

本书是在对历年入学试题详细分析，对考生成绩分布比较了解，又多年参加举办各类“报考研究生数学辅导班”教学的基础上，结合国家教委制定的考试大纲编写而成，是报考工学硕士复习与应考的指南. 全书共分三部分，前两部分为高等数学和线性代数，包括各部分内容提要、例题分析及自我练习题. 第三部分为 1994 年工学硕士入学试题分析与两份模拟试题.

本书适宜于应考考生，对各类职工业余大学的学员与教师也有参考价值.

图书在版编目(CIP)数据

工学硕士入学考试数学复习指导及模拟练习/张元德，胡金德编. —北京：清华大学出版社，1994

ISBN 7-302-01544-9

Ⅰ. 工… Ⅱ. ①张… ②胡… Ⅲ. 数学-高考试-试题-模拟-研究生 Ⅳ. O1-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(94)第 05615 号

出版者：清华大学出版社(北京清华大学校内，邮编 100084)

印刷者：北京密云胶印厂

发行者：新华书店总店北京科技发行所

开　本：787×1092 1/32　印张：20.5　字数：460 千字

版　次：1994 年 9 月第 1 版　1994 年 9 月第 1 次印刷

书　号：ISBN 7-302-01544-9/O・153

印　数：0001—3000

定　价：16.00 元

前言

随着改革开放的进一步发展，国民经济的迅速增长，科学教育事业蒸蒸日上，最近几年来报考研究生人数逐年增加，为了帮助考生复习数学，根据我校的有利条件，一是有十多年来举办的各类“报考硕士研究生数学辅导班”的实践经验及大量辅导资料；二是历年来北京市的硕士生数学试卷由我校统一组织阅卷工作．我们对历年数学试题有过详细的分析研究，对考生的成绩分布也比较清楚．在此基础上，结合国家教委制定的硕士研究生入学考试数学大纲的要求编写了本书，本书共分三部分，第一部分为高等数学；第二部分为线性代数；第三部分为 1994 年工学硕士研究生入学考试数学试题分析及两份模拟试题．

在编写过程中力求使本书具有下列特点：重视基本训练：通过适量的基本题分析使读者熟练地掌握基本概念、基本计算、基本方法、基本证题思路．提高应考能力：通过典型例题，对较难的证明题、应用题、综合题，着重分析题目类型，用什么概念，什么定理，重点放在证题（解题）思路上，同时也注意某些技巧的运用，以培养考生的分析问题解决问题的能力，力求触类旁通．

书中例题除一部分自编外都选自历年各高校研究生试题；我校的期中期末试题．本书中附有阶段性自我练习题与模拟试题以便检查自己的复习效果．

本书对各类职工业余大学的学员及教师也有参考价值.

由于我们水平有限、时间仓促,难免有不当之处,望读者提出宝贵意见.

编　者

目　　录

第一部分　高等数学 …… 1
第一章　函数 …… 1
第二章　极限　连续 …… 12
2-1　极限 …… 12
2-2　函数的连续性 …… 25
自我练习(一) …… 32
第三章　一元函数微分学 …… 35
3-1　导数与微分的概念及其计算 …… 35
3-2 导数的应用 …… 54
自我练习(二) …… 99
第四章　一元函数积分学 …… 102
4-1　不定积分 …… 102
4-2　定积分 …… 129
4-3　定积分应用 …… 147
4-4　广义积分 …… 157
自我练习(三) …… 166
第五章　常微分方程 …… 169
5-1　一阶微分方程的解法 …… 169
5-2　二阶可降阶的微分方程 …… 182
5-3　高阶线性微分方程的解法 …… 185
5-4　微分方程应用题 …… 202
自我练习(四) …… 211
第六章　多元函数微分学 …… 214

6-1 空间解析几何 …… 214
6-2 多元函数基本概念 …… 224
6-3 多元函数微分法 …… 232
6-4 多元函数的极值 …… 241
6-5 方向导数与梯度介绍 …… 250
自我练习(五) …… 254
第七章 重积分 …… 257
7-1 二重积分 …… 257
7-2 三重积分 …… 273
第八章 曲线积分与曲面积分 …… 290
8-1 曲线积分 格林公式 …… 290
8-2 曲面积分 奥氏公式与斯氏公式 …… 311
8-3 场论初步 …… 340
自我练习(六) …… 344
第九章 无穷级数 …… 348
9-1 数项级数 …… 348
9-2 幂级数的收敛域及和函数 …… 366
9-3 函数 $f(x)$在点 x_0 处展成幂级数 …… 384
9-4 函数 $f(x)$展开为富里哀级数 …… 394
自我练习(七) …… 401

第二部分 线性代数 …… 405
第一章 行列式 …… 405
第二章 矩阵 …… 437
第三章 向量和矩阵的秩 …… 460
第四章 线性方程组 …… 489
第五章 向量空间 内积 正交阵 …… 517
第六章 特征值 特征向量 …… 531

第七章　二次型 …………………………………………………… 560

第三部分　1994年工学硕士数学入学试题分析及模拟试题 …………………………………………………… 593

数学试卷一　试题分析 …………………………………………… 595
数学试卷二　试题分析 …………………………………………… 619
数学试卷三　试题分析 …………………………………………… 623
模拟试题一 ……………………………………………………… 640
模拟试题二 ……………………………………………………… 644

第一部分　高等数学

第一章　函　　数

一、内容提要

1.　正确理解函数概念、函数的定义域、基本初等函数的定义域及其图形的特点、反函数概念、隐函数概念、复合函数概念、初等函数概念.

2.　函数的几个重要特性

1°　有界性.设存在正数 G,使得对于一切 $x\in(a,b)$都有 $|f(x)|\leqslant G$ 成立,则称函数 $f(x)$在区间(a,b)上有界.

注意所谓 $f(x)$有界,一定要指出 x 的一个变化范围及一个正数 G.例如问 $y=1/x$ 有界吗?就没有意义.当 $x\in[1,+\infty]$时有界,$|1/x|\leqslant 1$;当 $x\in(0,1)$时就无界.

2°　单调性.若对于任意的 $x_1<x_2\in(a,b)$都有 $f(x_2)-f(x_1)>0$,则称函数 $f(x)$在区间(a,b)上单调增加,若 $f(x_2)-f(x_1)<0$,则称函数 $f(x)$在区间(a,b)上是单调减小的.

3°　奇偶性.设函数 $f(x)$在$(-l,l)$上有定义,若 $f(-x)=f(x)$,则称 $f(x)$为偶函数,其图形对称 y 轴.若 $f(-x)=-f(x)$,或 $f(-x)+f(x)=0$,则称函数 $f(x)$为奇函数,其

图形对称原点，并有 $f(0)=0$.

4° 周期性. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有定义，若存在正数 T，使得 $f(x+T)=f(x)$，则称函数 $f(x)$ 是以 T 为周期的周期函数.

二、例题分析

要求对基本题做到概念清楚、计算熟练、结果正确.

1.1 已知 $f(x)=ax^2+bx+5$，且 $f(x+1)-f(x)=8x+3$. 求 a 与 b 的值.

解
$$\begin{aligned} f(x+1)-f(x) &= [a(x+1)^2 \\ &\quad + b(x+1)+5] \\ &\quad -(ax^2+bx+5) \\ &= 2ax+a+b=8x+3, \end{aligned}$$

所以 $\begin{cases} 2a=8, \\ a+b=3, \end{cases}$

解得 $a=4$，$b=-1$.

1.2 已知 $f\left(\sin\dfrac{x}{2}\right)=1+\cos x$，求 $f\left(\cos\dfrac{x}{2}\right)$.

解 对 $f(x)=1+x$，求 $f\left(\cos\dfrac{x}{2}\right)$，读者并不感到困难，只需将 x 换成 $\cos\dfrac{x}{2}$ 即可，$f\left(\cos\dfrac{x}{2}\right)=1+\cos\dfrac{x}{2}$. 本题的关键是先将 $f\left(\sin\dfrac{x}{2}\right)=1+\cos x$ 进行变形，变成我们熟悉的形式.

法 1：变外面

$$f\left(\sin\frac{x}{2}\right)=1+\cos x=2\cos^2\frac{x}{2}=2\left(1-\sin^2\frac{x}{2}\right)，得到$$

$f\left(\sin\dfrac{x}{2}\right)=2\left(1-\sin^2\dfrac{x}{2}\right)$，于是

$f\left(\cos\dfrac{x}{2}\right)=2\left(1-\cos^2\dfrac{x}{2}\right)=2\sin^2\dfrac{x}{2}=1-\cos x.$

法 2：变里面

$f\left(\cos\dfrac{x}{2}\right)=f\left[\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{x}{2}\right)\right]=f\left(\sin\dfrac{\pi-x}{2}\right)$，

由 $f\left(\sin\dfrac{x}{2}\right)=1+\cos x$ 就可得到

$f\left(\sin\dfrac{\pi-x}{2}\right)=1+\cos(\pi-x)=1-\cos x$，即

$f\left(\cos\dfrac{x}{2}\right)=1-\cos x.$

这里将 $\cos\dfrac{x}{2}$ 转化为 $\sin\dfrac{\pi-x}{2}$，然后将 $\pi-x$ 看成整体，再利用已知条件，即可得到要求的结果.

注意两种方法的核心是“变形”，变形的目的是向自己熟悉的形式靠近，从而达到解决问题的目的.

1.3 求 $y=\sqrt{2x-1}\ln|x-2|$ 的定义域.

解 $\sqrt{2x-1}$ 的定义域为 $2x-1\geqslant0$，即 $x\geqslant\dfrac{1}{2}$；

$\ln|x-2|$ 的定义域为 $|x-2|>0$，即 $x\neq2$，

所以 $y=\sqrt{2x-1}\ln|x-2|$ 的定义域为 $\left[\dfrac{1}{2},2\right)$，$(2,+\infty)$

1.4 求 $y=\dfrac{2x-3}{3x+2}$ 的反函数.

解 $x=\dfrac{2y-3}{3y+2}$，　$3xy+2x=2y-3$，

$2y-3xy=2x+3$，$y=\dfrac{3+2x}{2-3x}$ 即为所求的反函数.

求反函数的步骤是:将原函数中的 y 换成 x,x 换成 y,再解出 y 即可.

1.5 已知 $f(x)=\begin{cases}1 & \text{当}|x|\leqslant 1,\\ 0 & \text{当}|x|>1,\end{cases}$

$$g(x)=\begin{cases}2-x^2 & \text{当}|x|\leqslant 1,\\ 2 & \text{当}|x|>1.\end{cases}$$

求 $f[g(x)]$与 $g[f(x)]$的表达式.

解 这是两个分段函数的复合,核心问题是抓住中间变量的值域.

$f[g(x)]$的函数关系是

$$\begin{matrix} f & - & g & - & x \\ \text{因} & & \text{中} & & \text{自} \end{matrix}$$

由 $g(x)=\begin{cases}2-x^2 & |x|\leqslant 1\\ 2 & |x|>1\end{cases}$ 得到 $g(x)$的取值范围. 当 $|x|\leqslant 1$ 时,$1\leqslant 2-x^2\leqslant 2$;$x=1$ 时 $g(1)=1$; $x=-1$ 时 $g(-1)=1$;当 $|x|>1$ 时,$g(x)=2$.

由此得到 $f[g(x)]=\begin{cases}1 & |x|=1,\\ 0 & |x|\neq 1.\end{cases}$

同样,对于 $g[f(x)]$,当 $|x|\leqslant 1$ 时 $f(x)=1$,$g(1)=1$,当 $|x|>1$ 时 $f(x)=0$,$g(0)=2$,所以有

$$g[f(x)]=\begin{cases}1 & |x|\leqslant 1,\\ 2 & |x|>1.\end{cases}$$

1.6 设 $f(x)=\dfrac{x}{x-1}$,$x\neq 1$.

求 $f\left[\dfrac{1}{f(x)}\right]$,$f\{f[f(f(x))]\}$.

解 $f(x)=\dfrac{x}{x-1}$, 则$\dfrac{1}{f(x)}=\dfrac{x-1}{x}$.

$$f\left(\frac{1}{f(x)}\right)=\frac{\frac{x-1}{x}}{\frac{x-1}{x}-1}=1-x, x\neq 0, x\neq 1$$

$$f_2(x)=f[f(x)]=\frac{\frac{x}{x-1}}{\frac{x}{x-1}-1}=x,$$

$f_3(x)=f[f_2(x)]=\dfrac{x}{x-1}$, $f_4(x)=f[f_3(x)]=x$. 如此我们可以得到 $f_{2n}(x)=x$, $f_{2n-1}(x)=\dfrac{x}{x-1}$ $n\geqslant 1$.

1.7 证明 $f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$ 为奇函数.

证 只需证明 $f(-x)=-f(x)$，或 $f(-x)+f(x)=0$ 即可.

$$\begin{aligned}f(-x)&=\ln(-x+\sqrt{1+x^2})\\&=\ln\frac{(\sqrt{1+x^2}-x)(\sqrt{1+x^2}+x)}{x+\sqrt{1+x^2}}\\&=\ln\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\\&=-\ln(x+\sqrt{1+x^2})=-f(x).\end{aligned}$$ ■

这里有些读者并不一定想得到有理化分子. 因此利用 $f(-x)+f(x)=0$ 来证明比较自然.

$$\begin{aligned}&f(-x)+f(x)\\&=\ln(-x+\sqrt{1+x^2})+\ln(x+\sqrt{1+x^2})\\&=\ln(-x+\sqrt{1+x^2})(x+\sqrt{1+x^2})\\&=\ln 1=0.\end{aligned}$$

1.8 若 $z=\sqrt{y}+f(\sqrt[3]{x}-1)$，已知 $y=1$ 时 $z=x$. 求

函数 f 及 z 的表示式.

解 本题属于二元函数,由 $y=1$ 时 $z=x$ 得到

$f(\sqrt[3]{x}-1)=x-1$,令 $\sqrt[3]{x}-1=t$ 则 $x=(t+1)^3$.

所以 $$f(t)=(t+1)^3-1=t^3+3t^2+3t,$$

故 $$f(x)=x^3+3x^2+3x,$$

$$z=\sqrt{y}+(x-1).$$

综合题与证明题,这是读者感到为难的题,要求做到解题时思路清楚,条件应用得当,推理严谨,适当注意方法和技巧.

1.9 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有定义,$f(0)=f(1)$,且对在 $[0,1]$ 中任意两个不同的点 $x_1,x_2,(x_1\neq x_2)$,都有

$$|f(x_2)-f(x_1)|<|x_2-x_1|.$$

证明: $$|f(x_2)-f(x_1)|<\frac{1}{2}.$$

证 可分两步来证.

第一步:当 $|x_2-x_1|\leqslant\frac{1}{2}$ 时,结论显然成立,此时

$$|f(x_2)-f(x_1)|<|x_2-x_1|\leqslant\frac{1}{2}.$$

第二步:当 $|x_2-x_1|>\frac{1}{2}$ 时,不妨设 $x_2>x_1$,那么

$|x_1-0|+|1-x_2|=1-(x_2-x_1)<\frac{1}{2}$. 此时

$$\begin{aligned}|f(x_2)-f(x_1)|&=|f(x_1)-f(0)+f(1)-f(x_2)|\\&\leqslant|f(x_1)-f(0)|+|f(1)-f(x_2)|\\&\leqslant|x_1-0|+|1-x_2|<\frac{1}{2}.\end{aligned}$$ ■

说明:此证明简明扼要,第一步立即可以得出,第二步是

关键，由于$|x_2-x_1|>\frac{1}{2}$，那么$[0,x_1]$，$[x_2,1]$的长度之和必小于 1/2、注意到 $f(0)=f(1)$，第二步的证明就比较自然了.

下面我们将$|f(x_2)-f(x_1)|<|x_2-x_1|$变形可得到

$$\left|\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\right|<1,$$

即$(x,f(x_1))$，$(x_2,f(x_2))$两点连线斜率的绝对值小于 1. 那么所有这样的点都将落入图 1-1 所示正方形中.

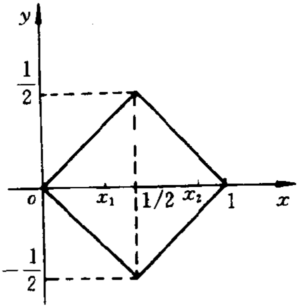

图　1-1

不失一般性可设 $f(0)=f(1)=0$，当$|x_2-x_1|\leqslant\frac{1}{2}$时，结论显然成立. 当 $x_2-x_1>\frac{1}{2}$时.

(1) $f(x_2)$与 $f(x_1)$同号

显然有$|f(x_2)-f(x_1)|<\frac{1}{2}$成立.

(2) $f(x_2)$与 $f(x_1)$异号时，

必有$|f(x_1)|<x_1$，$|f(x_2)|<1-x_2$，

$|f(x_2)-f(x_1)|\leqslant|f(x_1)|+|f(x_2)|$

$$<1-x_2+x_1=1-(x_2-x_1)<\frac{1}{2}. \quad \blacksquare$$

1.10 当 $x\neq 0$ 时 $f(x)$满足

$$af(x)+bf\left(\frac{1}{x}\right)=2x+\frac{3}{x}, \qquad ①$$

且 $f(0)=0,|a|\neq|b|$.

证明 $f(x)$为奇函数.

证 我们的目的是证明 $f(-x)=-f(x)$. 为此首先找出函数 $f(x)$的表示式. 在①式中令 $x=1/t$,然后再将 t 改为 x,得到

$$af\left(\frac{1}{x}\right)+bf(x)=\frac{2}{x}+3x, \qquad ②$$

方程组① ②是关于 $f(x)$与 $f(1/x)$的二元一次方程组

①$\times a-$②$\times b$ 得到

$$(a^2-b^2)f(x)=(2a-3b)x+(3a-2b)\frac{1}{x},$$

$$f(x)=\frac{1}{a^2-b^2}\left[(2a-3b)x+(3a-2b)\frac{1}{x}\right],$$

因为 $a^2-b^2\neq 0$,且 $2a-3b,3a-2b$ 不同时为零,又 $f(0)=0$,故 $f(-x)=-\frac{1}{a^2-b^2}\left[(2a-3b)x+(3a-2b)\frac{1}{x}\right]=-f(x)$,即 $f(x)$为奇函数. $\blacksquare$

1.11 若 $f(x)$为定义在$(-\infty,+\infty)$上的偶函数,且图形关于直线 $x=2$ 对称. 试证明 $f(x)$为周期函数,并求出周期 T.

证 要证 $f(x)$为周期函数,只需证明 $f(x)$满足关系式 $f(x+T)=f(x)$即可.

由题可知:

$f(x)$为偶函数，即 $f(-x)=f(x)$ ①

图形关于直线 $x=2$ 对称，即 $f(x)=f(4-x)$ ②

在②式中用 $-x$ 代替 x 得到 $f(-x)=f(x+4)$ ③

将①式代入③式就有 $f(x+4)=f(x)$，即 $f(x)$是以 4 为周期的周期函数，$T=4$. ■

说明：考生常常从图形上分析可以看出 $f(x)$是以 4 为周期的周期函数. 但不善于将条件用解析式子来表示，因此不能给出严格的理论证明，影响了考试的成绩.

1.12 若 $f(x)$是定义在$(-\infty,+\infty)$上的奇函数，且图形关于直线 $x=2$ 对称，证明 $f(x)$为周期函数.

证 奇函数 $f(x)=-f(x)$ ①

关于直线 $x=2$ 对称 $f(x)=f(4-x)$ ②

在式①中用 $x-4$ 代替 x，得到

$$f(4-x)=-f(x-4) \quad ③$$

在式②中用 $-x$ 代替 x，得到

$$f(-x)=f(4+x) \quad ④$$

将式②代入式③ $f(x)=-f(x-4)$ ⑤

由式①得到 $f(4+x)=f(x-4)$ ⑥

再令 $x-4=u$，则 $x=4+u$，式⑥转化为 $f(u+8)=f(u)$，即 $f(x+8)=f(x)$，即 $f(x)$是以 8 为周期的周期函数. ■

1.13 设函数 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上有定义，且满足下面两个条件.

(1) $f(x+\pi)=f(x)+\sin x$;

(2) 当 $0\leqslant x\leqslant\pi$ 时，$f(x)\equiv 0$.

证明 $f(x)$为周期函数，并在$[-2\pi,2\pi]$上作出其图形.

证 本题的证明思路大致有两种.