內 容 提 要

本書从应用立場論述双曲綫函数。內容共分六章，前三章叙述双曲綫函数的基本性質，微分积分及复素角双曲綫函数，从解析函数論的立場肯定了双曲綫函数在数学物理方程中的应用价值，后三章介紹了双曲綫函数在非欧几何学，电学及运动学，彈性理論，流体力学等方面的应用。

本書可供高等学校学生、工程技術人員、研究人員作参考用。

双 曲 綫 函 数 論

著 者 閻喜傑

*

科 学 技 術 出 版 社 出 版
(上海建國西路336弄1号)
上海市書刊出版業營業許可證出079号
大众文化印刷厂印刷 新華書店上海發行所总經售

*

統一書号: 13119 · 76
开本 787×1092 粍 1/27 · 印張 8 2/27 · 字数 165,000
1957年3月第1版
1957年3月第1次印刷 · 印数 1—6,200

定价：(10) 1.40元

目　　錄

第一章　双曲綫函数的基本性質

§1.　双曲綫函数的定义

基本双曲綫函数也象三角函数那样一共有六个，但其中最基本的双曲綫函数却只有两个：

$$\sinh ax = \frac{e^{ax} - e^{-ax}}{2}$$

及

$$\cosh ax = \frac{e^{ax} + e^{-ax}}{2}$$

从这两个函数中能仿照三角函数那样導出以下这几个函数：

$$\tanh ax = \frac{\sinh ax}{\cosh ax} = \frac{e^{ax} - e^{-ax}}{e^{ax} + e^{-ax}};$$

$$\coth ax = \frac{\cosh ax}{\sinh ax} = \frac{e^{ax} + e^{-ax}}{e^{ax} - e^{-ax}};$$

$$\operatorname{sech} ax = \frac{1}{\cosh ax} = \frac{2}{e^{ax} + e^{-ax}};$$

$$\operatorname{csch} ax = \frac{1}{\sinh ax} = \frac{2}{e^{ax} - e^{-ax}}.$$

上边这六个函数無論从排列順序上看也好，从函数之間的关系看也好，都与三角函数相似。所以我們也可用类似三角函数的命名法來分別称 $\sinh ax$ 为双曲正弦，$\cosh ax$——双曲余弦，$\tanh ax$——双曲正切，$\coth ax$——双曲余切，$\operatorname{sech} ax$——双曲正割，$\operatorname{csch} ax$——双曲余割。

以后为了研究方便起見可設 e^{ax} 和 e^{-ax} 中的指数系数 $a=1$，这样函数的形式就比較簡單了，变成：

$$\sinh x = \frac{e^{x} - e^{-x}}{2};$$

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2};$$

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x};$$

$$\coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x};$$

$$\operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x};$$

$$\operatorname{csch} x = \frac{1}{\sinh x}.$$

§ 2. 基本双曲綫函数的几何学的定义

在这節里我們只研究一下 $\sinh x$ 和 $\cosh x$ 的几何学的定义。根据上節所講我們已經知道:

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

从等号左边的 $\frac{e^x - e^{-x}}{2}$ 來看,很顯然双曲正弦乃是二指数函数 e^x 及 e^{-x} 差的二分之一。根据这一关系从坐标面上我們就不难找出 sinh 的圖綫(見圖 1),只要作出 e^x 和 $-e^{-x}$,然后在 e^x 曲綫上的 a 点和 e^{-x} 曲綫的 b 点联綫,求出联綫 ab 的中点 m 就成,但要注意的是綫段 ab 与 y 軸平行。根据这样关系可知,如果在坐标面上已作出曲綫 e^x 和 $-e^{-x}$ 时,只要平行 y 軸引若干条綫,求出一系列的

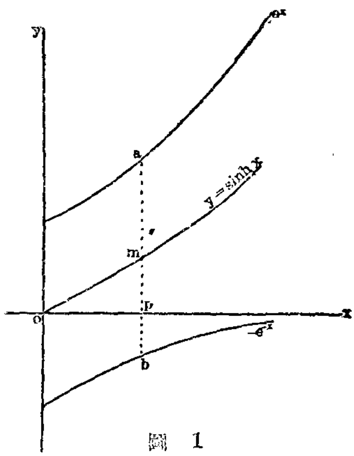

圖 1

$a_1, a_2\cdots, a_n$ 及 $b_1, b_2\cdots, b_n$, 然后將各綫段 a_1b_1, $a_2b_2\cdots$, a_nb_n 二等分求出 $m_1, \cdots m_n$, 并將各 m 点联結,这样所得的曲綫就是我們

所要求的 $\sinh x$ 的曲綫。

双曲余弦 $\cosh x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$，从它的定义中我們可以看出双曲余弦等于二指数函数 e^x 及 e^{-x} 和的二分之一，换言之，等于 e^x 及 e^{-ax} 的算術平均值。从圖示來看它的情形如圖 2 所画：

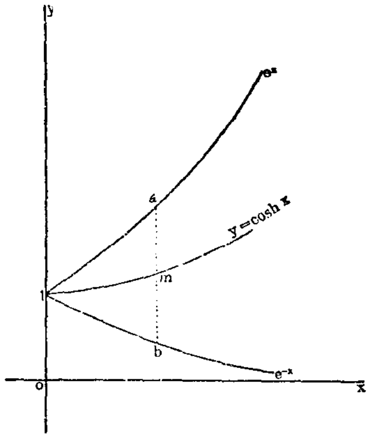

圖 2

在坐标面上先作出曲綫 e^x 及 e^{-x}，然后平行 y 軸引一直綫——ab，a、b 分别为 e^x 及 e^{-x} 曲綫上的点。这时將 ab 二等分求出它的等分点 m，根据定义來看 m 点必在 $\cosh x$ 曲綫上，所以求曲綫 $\cosh x$ 时需要引出若干条平行 y 軸的綫段，作出 $a_1, a_2, \cdots a_n$ 及 $b_1, b_2\cdots, b_n$ 等点，最后將綫段 a_1b_1，$a_2b_2\cdots$，a_nb_n 二等分求出 $m_1, m_2\cdots m_n$ 并联綫。这样就求出了 $\cosh x$ 曲綫。

总观以上所講，从几何学的立場看來：基本双曲綫函数 $\sinh n$ 及 $\cosh n$ 乃是由一指数函数 e^x 及其倒数 e^{-x} 的和或差之半决定的。

从圖示中的函数变化关系上可以看出：当 $x=0$ 时，$\sinh x=0$，$\cosh x=1$；当 x 增加时，$\sinh x$ 增大；$\cosh x$ 也增大。也就是說：当 e^x 無限增大时，e^{-x} 則無限减小，达到一定程度时我們就可將 e^{-x} 略而不計，于是可知

$$\cosh x\approx\frac{e^x}{2},$$

$$\sinh x\approx\frac{e^x}{2}\approx\cosh x.$$

所以說：当 x 無限增大时双曲正弦和双曲余弦趋于相等。

其次再看一看，当 x 非常小时的情形，为了研究 $\sinh x$ 及

$\cosh x$ 的关系方便起見，我們須先將 e^x 及 e^{-x} 按級数形式展开，即

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots$$

$$e^{-x}=1-x+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots$$

由于 x 远小于 1，所以 e^x 及 e^{-x} 的展开式中的二次方以上的項可略而不計，这样一來，則

$$e^x\approx 1+x;\qquad e^{-x}\approx 1-x$$

將此两結果代入 $\sinh x$ 及 $\cosh x$ 式中时，則

$$\sinh x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}=\frac{(1+x)-(1-x)}{2}=x,\qquad (2\text{-}1)$$

$$\cosh x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}=\frac{(1+x)+(1-x)}{2}=1.\qquad (2\text{-}2)$$

从上式的結果來看，这一点也是与三角函数的关系很相似，我們都知道，当 θ 角趋向 0 时，即

$$\lim_{\theta\to 0}\sin\theta=\theta;\qquad \lim_{\theta\to 0}\cos\theta=1.$$

而双曲綫函数也恰如此，根据 (2-1) 和 (2-2) 式中可寫出

$$\lim_{x\to 0}\sinh x=0;\qquad \lim_{x\to 0}\cosh x=1.$$

§ 3.　双曲綫函数的綫段表示法

在这節的开始我們先回憶一下三角函数的綫段表示法。我們都知道三角函数可以用單位圓上的各个綫段來表示，它的情形大体如下(見圖 3)：以直角坐标的原点 O 为圓心，以 1 为半徑画一圓周；在第一象限中任取一角 $x=\angle AOP$，并过 P 点引垂直 x 軸的綫段 PM；通过 A, B 两点分別引圓的切綫綫段 AT 及 BS，顯然 AT 及 BS 分別垂直 x 和 y 軸。

現在如設 P 点的坐标为 (ξ,η)，則單位圓的方程就將是：

$$\xi^2+\eta^2=1,$$

而 $\xi=\cos x$, $\eta=\sin x$, 所以圓的方程式实际就是

$$\cos^2 x+\sin^2 x=1.$$

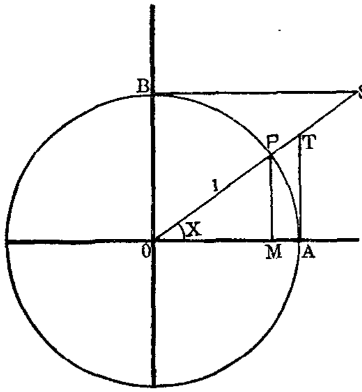

圖 3

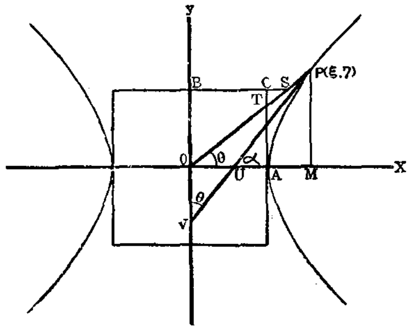

圖 4

其次从圓上的綫段中可以看出:

$$MP=\sin x,\qquad OM=\cos x,$$

$$AT=\tan x,\qquad BS=\cot x,$$

$$OT=\sec x,\qquad OS=\csc x.$$

这就是在坐标中的單位圓上用綫段表示三角函数的办法。在双曲綫函数中也有类似的情形。

首先在坐标面上作一直角單位双曲綫 $\xi^2-\eta^2=1$（見圖 4），在双曲綫上取一点 P，如用直交坐标表示时为 $P(\xi,\eta)$，用極坐标表示时为 $P(r,\theta)$，并設 $\xi=\cosh x$, $\eta=\sinh x$, $OP=r$, 則

$$\xi=\cosh x=r\cos\theta;$$

$$\eta=\sinh x=r\sin\theta.$$

从此可知

$$\frac{\eta}{\xi}=\tanh x=\tan\theta.$$

另外从 $\xi^2-\eta^2=1$ 的关系中可知

$$\cosh^2 x-\sinh^2 x=1, \tag{3-1}$$

整理之則得

$$r^2(\cos^2\theta-\sin^2\theta)=1.$$

其次，圖上的 $OA=OB=1$，过 PO 引一綫，設它与 AC 的交点为 T，則 $x=\angle MOP=\theta$。这样我們就可以知道：

$$MP=\sinh x, \tag{3-2}$$

$$OM=\cosh x. \tag{3-3}$$

又因 $\triangle OAT \backsim \triangle OMP$，而 $\dfrac{AT}{MP}=\dfrac{OA}{OM}$ 所以

$$AT=\frac{MP}{OM}=\frac{\sinh x}{\cosh x}=\tanh x \tag{3-4}$$

同时 $\triangle OBS \backsim \triangle MOP$，而 $\dfrac{BS}{OM}=\dfrac{OB}{MP}$ 所以

$$BS=\frac{OM}{MP}=\frac{\cosh x}{\sinh x}=\coth x. \tag{3-5}$$

現在再在圖上作出过双曲綫 P 点的切綫，此綫分別与 Ox 及 Oy 交于 U, V 两点，則 $\angle OVU=\theta$，从而知 $\triangle OUV \backsim \triangle POM \backsim \triangle PUM$，所以

$$\frac{UM}{MP}=\frac{MP}{OM}, \qquad \therefore\ UM=\frac{\overline{MP}^2}{OM}=\frac{\eta^2}{\xi},$$

$$OU=OM-UM=\xi-\frac{\eta^2}{\xi}=\frac{1}{\xi}=\frac{1}{\cosh x}=\operatorname{sech} x. \tag{3-6}$$

又因
$$\frac{VO}{OU}=\frac{OM}{MP}=\frac{\xi}{\eta},$$

故
$$OV=\frac{OU\cdot\xi}{\eta}=\frac{1}{\eta}=\frac{1}{\sinh x}=\operatorname{csch} x. \tag{3-7}$$

总括上面所講可知：**双曲綫函数 $\sinh x$ 和 $\cosh x$ 所表示的是直角双曲綫 $\xi^2-\eta^2=1$ 上的任意一点 P 的坐标，一切双曲綫函数皆能用單位双曲綫上的綫段表示。**这就是双曲綫函数的由來之一。

§4. 双曲綫函数与三角函数的关系(一)

在圖 5 的直角坐标上画出單位双曲綫及單位圓。在双曲綫上取一点 $P(\xi, \eta)$，則

$\xi=\cosh x,\quad \eta=\sinh x.$

通过 A 点引單位圓及單位双曲綫的公切綫 AR, $AR\parallel OY$; 过 P 点引綫 $PR(\parallel OX)$, $PM(\parallel OY)$及PO。再在O, R之間联一綫段OR, OR与單位圓交于Q点。設$\angle AOQ=\theta$, $\angle AOP=x$, 則

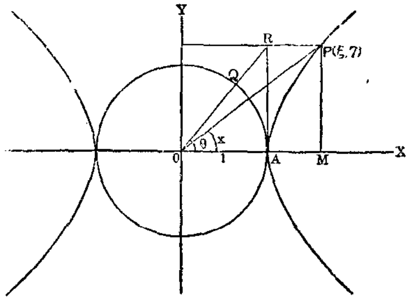

圖　5

$$\eta=MP=AR,\quad MP=\sinh x,\quad AR=\tan\theta.$$

故
$$\eta=\sinh x=\tan\theta. \tag{4-1}$$

从而知
$$\operatorname{csch} x=\cot\theta. \tag{4-2}$$

另外我們知道
$$\xi=\sqrt{1+\eta^2}=\sqrt{1+\tan^2\theta}=\sec\theta,$$
$$\xi=\cosh x.$$
$$\therefore\quad \cosh x=\sec\theta. \tag{4-3}$$

从此根据倒数关系还可知
$$\operatorname{sech} x=\cos\theta. \tag{4-4}$$

另外可知
$$\tanh x=\frac{\sinh x}{\cosh x}=\frac{\tan\theta}{\sec\theta}=\sin\theta. \tag{4-5}$$

同样根据倒数关系可知
$$\coth x=\csc\theta. \tag{4-6}$$

下边我們再來討論一下以上各双曲綫函数中的角 x 与三角函数上的角 θ 的关系。通过計算可知:

$$e^x=\cosh x+\sinh x=\sec\theta+\tan\theta$$

$$=\frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{\cos\dfrac{\theta}{2}+\sin\dfrac{\theta}{2}}{\cos\dfrac{\theta}{2}-\sin\dfrac{\theta}{2}}=\frac{1+\tan\dfrac{\theta}{2}}{1-\tan\dfrac{\theta}{2}}=\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right).$$

$$\therefore \quad x = \ln \tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right) \text{[❶]}$$

总括以上所講，整理一下时双曲綫函数和三角函数之間的关系如下：

$$\left.\begin{array}{ll} \sinh x = \tan\theta, & \cosh x = \sec\theta, \\ \tanh x = \sin\theta, & \coth x = \csc\theta, \\ \operatorname{sech} x = \cos\theta, & \operatorname{csch} x = \cot\theta. \end{array}\right\} \qquad (4\text{-}7)$$

$$x = \ln \tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right).$$

§5. 二指数函数的和差与双曲綫函数

二指数函数的和差与双曲綫函数关系的問題在实用上有很大的意义，尤其在电路計算上。計算的形式大体如下，首先設

$$y = e^{ax} + e^{bx} \qquad (5\text{-}1)$$

并設

$$\alpha = \frac{a+b}{2}, \qquad \beta = \frac{a-b}{2}. \qquad (5\text{-}2)$$

整理一下則得

$$a = \alpha + \beta, \qquad b = \alpha - \beta. \qquad (5\text{-}3)$$

將 (5-3) 代入 (5-1) 式則得

$$\begin{aligned} y &= e^{(\alpha+\beta)x} + e^{(\alpha-\beta)x} = e^{\alpha x}(e^{\beta x} + e^{-\beta x}) \\ &= 2e^{\alpha x}\cosh \beta x. \end{aligned} \qquad (5\text{-}4)$$

从 (5-4) 式可知：二指数函数的和 y 等于指数函数 $e^{\alpha x}$ 与双曲余弦 $\cosh \beta x$ 的二倍乘積。

如果 $y = e^{ax} - e^{bx}$，根据同样步驟会導出

$$y = 2e^{\alpha x}\sinh \beta x.$$

所以說：指数函数的差等于指数函数 $e^{\alpha x}$ 与双曲正弦 $\sinh \beta x$ 的二倍乘積。

[❶] ln——自然对数符号

§6. 双曲綫函数間的关系

我們这里所說的双曲綫函数間的关系不外是各函数間的一次方的关系，平方关系，今后只要掌握各函数間的关系，那就能很方便地用一函数代換另一函数。

关于各双曲綫函数間的一次关系我們在§1里已經講了一点，这里不妨再整理一下:

$$\left.\begin{aligned} \sinh x &= \frac{1}{\operatorname{csch} x} = \frac{\cosh x}{\coth x} \\ \cosh x &= \frac{1}{\operatorname{sech} x} = \frac{\sinh x}{\tanh x} \\ \tanh x &= \frac{1}{\coth x} = \frac{\sinh x}{\cosh x} \end{aligned}\right\} \tag{6-1}$$

(6-1)中的各公式乃是各函数間的一次方乘除关系，另外各函数間还有相加关系存在

$$e^{\pm x} = \cosh x \pm \sinh x. \tag{6-2}$$

(6-2)式的証明很容易，只要先將双曲余弦和双曲正弦的指数关系式代入式中就可以了。即

$$\cosh x \pm \sinh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \pm \frac{e^x - e^{-x}}{2} = e^{\pm x}.$$

各函数間的平方关系如下:

$$\left.\begin{aligned} \cosh^2 x - \sinh^2 x &= 1 \\ \operatorname{sech}^2 x + \tanh^2 x &= 1 \\ \coth^2 x - \operatorname{csch}^2 x &= 1 \end{aligned}\right\} \tag{6-3}$$

現在我們分別証明一下(6-3)式中的各式

(I) $\cosh^2 x - \sinh^2 x = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2$

$$= \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}{4} - \frac{e^{2x} - 2 + e^{-2x}}{4}$$

$$= \frac{4}{4} = 1.$$

(II) $\operatorname{sech}^2 x+\tanh^2 x=\frac{1}{\cosh^2 x}+\frac{\sinh^2 x}{\cosh^2 x}$

$$=\frac{\cosh^2 x-\sinh^2 x}{\cosh^2 x}+\frac{\sinh^2 x}{\cosh^2 x}=1.$$

(III) $\coth^2 x-\operatorname{csch}^2 x=\frac{\cosh^2 x}{\sinh^2 x}-\frac{1}{\sinh^2 x}$

$$=\frac{\cosh^2 x}{\sinh^2 x}-\frac{\cosh^2 x-\sinh^2 x}{\sinh^2 x}$$

$$=\frac{\sinh^2 x}{\sinh^2 x}=1.$$

除上述关系外还有下边这一关系:

$$(\sinh x+\cosh x)^n=\sinh nx+\cosh nx. \tag{6-4}$$

証明

$$\sinh nx+\cosh nx=\frac{e^{nx}-e^{-nx}}{2}+\frac{e^{nx}+e^{-nx}}{2}$$

$$=e^{nx}=(e^x)^n=(\sinh x+\cosh x)^n.$$

§7. 双曲綫函数的加法公式(一)

双曲綫函数的加法公式在形式上与三角函数的極其相似,我們在这節里除講加法定理的公式之外,还要講一些与此定理有密切联系的一些其他定理。

双曲綫函数的加法定理形式是

$$\left.\begin{aligned}\sinh(x\pm y)&=\sinh x\cosh y\pm\cosh x\sinh y\\ \cosh(x\pm y)&=\cosh x\cosh y\pm\sinh x\sinh y\\ \tanh(x\pm y)&=\frac{\tanh x\pm\tanh y}{1\pm\tanh x\tanh y}\end{aligned}\right\} \tag{7-1}$$

現在我們就來分别將(7-1)中的各公式証明一下

(I)　$\sinh x\cosh y \pm \cosh x\sinh y$

$$=\frac{e^x-e^{-x}}{2}\cdot\frac{e^y+e^{-y}}{2}\pm\frac{e^x+e^{-x}}{2}\cdot\frac{e^y-e^{-y}}{2}$$

$$=\frac{e^{x+y}+e^{x-y}-e^{-(x-y)}-e^{-(x+y)}}{4}$$

$$\pm\frac{e^{x+y}-e^{x-y}+e^{-(x-y)}-e^{-(x+y)}}{4}.$$

如前后两式相加，則等于

$$\frac{2e^{(x+y)}-2e^{-(x+y)}}{4}=\frac{e^{(x+y)}-e^{-(x+y)}}{2}=\sinh(x+y).$$

如前后两式相減則等于

$$\frac{2e^{(x-y)}-2e^{-(x-y)}}{4}=\frac{e^{(x-y)}-e^{-(x-y)}}{2}=\sinh(x-y).$$

(II)　$\cosh x\cosh y \pm \sinh x\sinh y$

$$=\frac{e^x+e^{-x}}{2}\cdot\frac{e^y+e^{-y}}{2}\pm\frac{e^x-e^{-x}}{2}\cdot\frac{e^y-e^{-y}}{2}$$

$$=\frac{e^{x+y}+e^{x-y}+e^{-(x-y)}+e^{-(x+y)}}{4}$$

$$\pm\frac{e^{x+y}-e^{x-y}-e^{-(x-y)}+e^{-(x+y)}}{4}.$$

如前后两式相加，則得

$$\frac{2e^{(x+y)}+2e^{-(x+y)}}{4}=\frac{e^{(x+y)}+e^{-(x+y)}}{2}=\cosh(x+y).$$

如前后两式相減时，則等于

$$\frac{2e^{(x-y)}+2e^{-(x-y)}}{4}=\frac{e^{(x-y)}+e^{-(x-y)}}{2}=\cosh(x-y).$$

$$\text{(III)}\quad \tanh(x+y)=\frac{\sinh(x+y)}{\cosh(x+y)}$$

$$=\frac{\sinh x\cosh y+\cosh x\sinh y}{\cosh x\cosh y+\sinh x\sinh y}$$

$$=\frac{\dfrac{\sinh x\cosh y}{\cosh x\cosh y}+\dfrac{\cosh x\sinh y}{\cosh x\cosh y}}{1+\dfrac{\sinh x\ \sinh y}{\cosh x\cosh y}}$$

$$=\frac{\tanh x+\tanh y}{1+\tanh x\tanh y}.$$

用同样方法卽可証明 $\tanh(x-y)=\dfrac{1-\tanh x\tanh y}{\tanh x-\tanh y}$，这里我們就不再贅述了。

我們既然已經導出(7–1)式的加法公式，現在就应用加法定理導出一些更新的公式：

$$\left.\begin{aligned}
2\sinh x\cosh y&=\sinh(x+y)+\sinh(x-y)\\
2\cosh x\sinh y&=\sinh(x+y)-\sinh(x-y)\\
2\cosh x\cosh y&=\cosh(x+y)+\cosh(x-y)\\
2\sinh x\sinh y&=\cosh(x+y)-\cancel{\sinh(x-y)}\ \cosh(x-y)
\end{aligned}\right\}\qquad(7\text{–}2)$$

(7–2)式中的四式証明法基本上一致，所以我們只作为举例，將第一式証明一下，其余的就省略了。

$$\sinh(x+y)+\sinh(x-y)$$

$$=\sinh x\cosh y+\sinh y\cosh x+\sinh x\cosh y$$

$$-\sinh y\cosh x$$

$$=2\sinh x\cosh y.$$

根据(7–2)式可進而知下列公式的成立：

$$\left.\begin{aligned}\sinh x+\sinh y&=2\sinh\frac{x+y}{2}\cosh\frac{x-y}{2}\\\sinh x-\sinh y&=2\cosh\frac{x+y}{2}\sinh\frac{x-y}{2}\\\cosh x+\cosh y&=2\cosh\frac{x+y}{2}\cosh\frac{x-y}{2}\\\cosh x-\cosh y&=2\sinh\frac{x+y}{2}\sinh\frac{x-y}{2}\end{aligned}\right\}\tag{7-3}$$

这里我們也只証明一下第一式而將同样証法的其余各式省略。

取一式: $2\sinh A\cosh B=\sinh(A+B)+\sinh(A-B)$,

并設

$$A+B=x,\qquad A-B=y.$$

于是可知

$$A=\frac{x+y}{2},\qquad B=\frac{x-y}{2}.$$

將上边这四个条件代入式中則得

$$2\sinh\frac{x+y}{2}\cosh\frac{x-y}{2}=\sinh x+\sinh y.$$

另外还有一个正切的公式:

$$\tanh x\pm\tanh y=\frac{\sinh(x\pm y)}{\cosh x\cosh y}.\tag{7-4}$$

它的証明如下:

$$\begin{aligned}\frac{\sinh(x\pm y)}{\cosh x\cosh y}&=\frac{\sinh x\cosh y\pm\sinh y\cosh x}{\cosh x\cosh y}\\&=\frac{\sinh x}{\cosh x}\pm\frac{\sinh y}{\cosh y}\\&=\tanh x\pm\tanh y.\end{aligned}$$

最后我們再講两个公式以作本節的結束。