

內 容 提 要

本書从应用立場論述双曲綫函数。內容共分六章,前三章叙述双曲綫函数的基本性質,微分积分及复变角双曲綫函数,从解析函数論的立場肯定了双曲綫函数在数学物理方程中的应用价值,后三章介紹了双曲綫函数在非欧几何学,电学及运动学,彈性理論,流体力学等方面的应用。

本書可供高等学校学生、工程技术人員、研究人員作参考用。

双 曲 綫 函 数 論

著 者 閻 喜 傑

*

科学技術出版社出版

(上海建國西路336弄1号)

上海市書刊出版業營業許可證出079号

大众文化印刷厂印刷 新華書店上海發行所总經售

*

統一書号: 13119·76

开本 87×1092 1/27·印张 8 2/27·字数 165,000

1957年3月第1版

1957年3月第1次印刷·印数 1—6,200

定价:(10) 1.40元

目 錄

序 言	1
第一章 双曲綫函数的基本性質	1
§ 1. 双曲綫函数的定义	1
§ 2. 基本双曲綫函数的几何学的定义	2
§ 3. 双曲綫函数的綫段表示法	4
§ 4. 双曲綫函数与三角函数的关系(一)	6
§ 5. 二指数函数的和差与双曲綫函数	8
§ 6. 双曲綫函数間的关系	9
§ 7. 双曲綫函数的加法公式(一)	10
§ 8. 双曲綫函数的倍角公式(一)	14
§ 9. 双曲綫函数的加法公式(二)	16
§ 10. 双曲綫函数的倍角公式(二)	20
§ 11. 双曲綫函数与三角函数的关系(二)	22
§ 12. 双曲綫函数的角的变化	24
§ 13. 反双曲綫函数	27
§ 14. 反双曲綫函数与自然对数的关系	29
§ 15. 双曲綫函数与連分式的关系	32
第二章 双曲綫函数的微分和積分	35
§ 1. 基本双曲綫函数的微分	35
§ 2. 反双曲綫函数的微分	36
§ 3. 泰勒定理与麥克劳林定理	38
§ 4. 指数函数的展开	39
§ 5. 双曲綫函数的展开	40
§ 6. 双曲綫函数与三角函数的合成展开式	42
§ 7. 反双曲綫函数的展开	43
§ 8. 基本双曲綫函数的積分	46
§ 9. 反双曲綫函数的積分	48
§ 10. 利用分部積分法進行的双曲綫函数的積分	51

§ 11.	利用和差積分式所作的双曲綫函数的積分	53
§ 12.	利用置換積分法所作的双曲綫函数的積分	55
§ 13.	几个常用的双曲綫函数的積分漸化式	58
§ 14.	直角双曲綫和双曲綫函数	61
§ 15.	用双曲綫長度变化率來規定双曲角	64
§ 16.	双曲角大小的比較	66
第三章	双曲綫函数中的复素角	69
§ 1.	复素数概說	69
§ 2.	复素数的几何学的表示	70
§ 3.	复素角	73
§ 4.	当 $a < 1$ 时 $\text{arc cosh } a$ 的解法	75
§ 5.	当 $a > 1$ 时 $\text{arc tanh } a$ 的解法	77
§ 6.	$\sinh z$ 和 $\cosh z$ 的圖示	79
§ 7.	达朗伯-欧勒微分方程式	80
§ 8.	函数 $\sinh(x + jy)$ 的保形映象	81
§ 9.	函数 $\cosh(x + jy)$ 的保形映象	83
§ 10.	函数 $\tanh(x + jy)$ 的保形映象	84
§ 11.	由 $z = a + jbx$ 所構成的双曲綫函数	86
§ 12.	由 $z = ax + jb$ 所構成的双曲綫函数	89
§ 13.	由 $z = ax + jbx$ 所構成的双曲綫函数	92
§ 14.	反复素数双曲綫函数	96
§ 15.	反复素数双曲綫函数的微分	100
第四章	双曲綫函数在非欧几何中的应用	101
§ 1.	非欧空間中的界綫弧的長度	101
§ 2.	用三角函数表示由界綫弧圍成的三角形	104
§ 3.	平行角	105
§ 4.	圓弧与界綫弧長的关系	108
§ 5.	等距离綫弧的長度	109
§ 6.	直角三角形的解法	111
§ 7.	一般三角形的解法	113
§ 8.	半角公式	116
§ 9.	三角形面積	118
§ 10.	非欧几何学的坐标	120

§ 11. 直綫方程式	122
§ 12. 兩点間的距离, 二直綫的交点	123
§ 13. 求積公式	125
第五章 双曲綫函数在电路計算中的应用	128
§ 1. 具有分布常数的电路上的电流和电压	128
§ 2. 負載的各种变化情形	131
§ 3. 負載上联結阻抗时的情形	133
§ 4. 开路电路中的負載电压	136
§ 5. 傳輸綫的等效电路	138
§ 6. 具有各种分布常数的电路	141
§ 7. 在电路兩端加电压时的情形	144
§ 8. 直流电动势的分布	146
§ 9. 交流电动势的分布	149
§ 10. 四端網絡的基本概念	151
§ 11. 在四端網絡中应用連分数的情形	156
§ 12. 圓導體間的靜容电量	158
第六章 双曲綫函数在力学中的应用	163
§ 1. 阻力空間中的自由落体	163
§ 2. 深度一定的自由液表的驻波	166
§ 3. 深度一定的自由液表的前進波	168
§ 4. 兩种液体界面处的前進波	171
§ 5. 懸鏈綫	173
§ 6. 均匀彈性棒的自由振动	175
§ 7. 一端固定另一端自由的彈性棒的振动	177
§ 8. 一端固定一端拘束的彈性棒的振动	179
§ 9. 單層梁架的自由振动	181
§ 10. 矩形橫截面柱的扭轉	185
附 錄	188
1. 双曲綫函数公式	189
2. 指数函数及双曲綫函数表	198

第一章 双曲线函数的基本性质

§ 1. 双曲线函数的定义

基本双曲线函数也象三角函数那样一共有六个,但其中最基本的双曲线函数却只有两个:

$$\sinh ax = \frac{e^{ax} - e^{-ax}}{2}$$

及
$$\cosh ax = \frac{e^{ax} + e^{-ax}}{2}$$

从这两个函数中能仿照三角函数那样导出以下这几个函数:

$$\tanh ax = \frac{\sinh ax}{\cosh ax} = \frac{e^{ax} - e^{-ax}}{e^{ax} + e^{-ax}};$$

$$\coth ax = \frac{\cosh ax}{\sinh ax} = \frac{e^{ax} + e^{-ax}}{e^{ax} - e^{-ax}};$$

$$\operatorname{sech} ax = \frac{1}{\cosh ax} = \frac{2}{e^{ax} + e^{-ax}};$$

$$\operatorname{csch} ax = \frac{1}{\sinh ax} = \frac{2}{e^{ax} - e^{-ax}}.$$

上边这六个函数无论从排列顺序上看也好,从函数之间的关系看也好,都与三角函数相似。所以我们也用类似三角函数的命名法来分别称 $\sinh ax$ 为双曲正弦, $\cosh ax$ 为双曲余弦, $\tanh ax$ 为双曲正切, $\coth ax$ 为双曲余切, $\operatorname{sech} ax$ 为双曲正割, $\operatorname{csch} ax$ 为双曲余割。

以后为了研究方便起见可设 e^{ax} 和 e^{-ax} 中的指数系数 $a=1$, 这样函数的形式就比较简单了,变成:

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2};$$

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2};$$

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x};$$

$$\coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x};$$

$$\operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x};$$

$$\operatorname{csch} x = \frac{1}{\sinh x}.$$

§ 2. 基本双曲线函数的几何学的定义

在这节里我们只研究一下 $\sinh x$ 和 $\cosh x$ 的几何学的定义。根据上节所讲我们已经知道：

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

从等号左边的 $\frac{e^x - e^{-x}}{2}$ 来看，很显然双曲正弦乃是二指数函数 e^x 及 e^{-x} 差的二分之一。根据这一关系从坐标面上我们就不难找出 \sinh 的图线（见图 1），只要作出 e^x 和 $-e^{-x}$ ，然后在 e^x 曲线上的 a 点和 $-e^{-x}$ 曲线的 b 点联线，求出联线 ab 的中点 m 就成，但要注意的是线段 ab 与 y 轴平行。根据这样关系可知，如果在坐标面上已作出曲线 e^x 和 $-e^{-x}$ 时，只要平行 y 轴引若干条线，求出一系列的

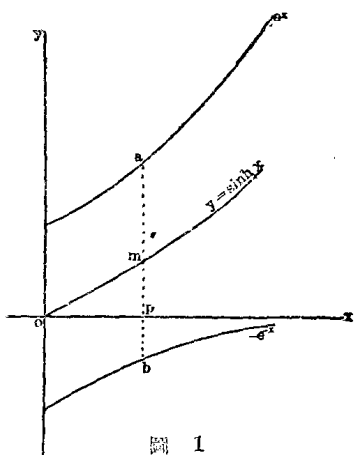


图 1

a_1, a_2, \dots, a_n 及 b_1, b_2, \dots, b_n ，然后将各线段 $a_1b_1, a_2b_2, \dots, a_nb_n$ 二等分求出 m_1, \dots, m_n ，并将各 m 点联结，这样所得的曲线就是我们

所要求的 $\sinh x$ 的曲线。

双曲余弦 $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ ，从它的定义中我们可以看出双曲余弦等于二指数函数 e^x 及 e^{-x} 和的二分之一，换言之，等于 e^x 及 e^{-x} 的算术平均值。从图示来看它的情形如图 2 所画：

在坐标面上先作出曲线 e^x 及 e^{-x} ，然后平行 y 轴引一直线—— ab ， a, b 分别为 e^x 及 e^{-x} 曲线上的点。这时将 ab 二等分求出它的等分点 m ，根据定义来看 m 点必在 $\cosh x$ 曲线上，所以求曲线 $\cosh x$ 时需要引出若干条平行 y 轴的线段，作出 a_1, a_2, \dots, a_n 及 b_1, b_2, \dots, b_n 等点，最后将线段 $a_1b_1, a_2b_2, \dots,$

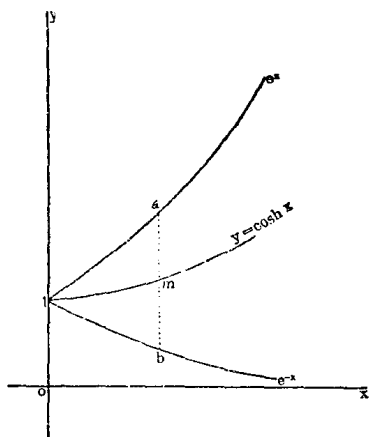


图 2

a_nb_n 二等分求出 m_1, m_2, \dots, m_n 并连接。这样就求出了 $\cosh x$ 曲线。

总观以上所讲，从几何学的立场看来：基本双曲线函数 $\sinh n$ 及 $\cosh n$ 乃是由一指数函数 e^x 及其倒数 e^{-x} 的和或差之半决定的。

从图示中的函数变化关系上可以看出：当 $x=0$ 时， $\sinh x=0$ ， $\cosh x=1$ ；当 x 增加时， $\sinh x$ 增大； $\cosh x$ 也增大。也就是说：当 e^x 无限增大时， e^{-x} 则无限减小，达到一定程度时我们就可将 e^{-x} 略而不计，于是可知

$$\cosh x \approx \frac{e^x}{2},$$

$$\sinh x \approx \frac{e^x}{2} \approx \cosh x.$$

所以说：当 x 无限增大时双曲正弦和双曲余弦趋于相等。

其次再看一看，当 x 非常小时的情形，为了研究 $\sinh x$ 及

$\cosh x$ 的关系方便起见, 我们须先将 e^x 及 e^{-x} 按级数形式展开, 即

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \dots$$

由于 x 远小于 1, 所以 e^x 及 e^{-x} 的展开式中的二次方以上的项可略而不计, 这样一来, 则

$$e^x \approx 1 + x; \quad e^{-x} \approx 1 - x$$

将此两结果代入 $\sinh x$ 及 $\cosh x$ 式中时, 则

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{(1+x) - (1-x)}{2} = x, \quad (2-1)$$

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{(1+x) + (1-x)}{2} = 1. \quad (2-2)$$

从上式的结果来看, 这一点也是与三角函数的关系很相似, 我们都知道, 当 θ 角趋向 0 时, 即

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \sin \theta = \theta; \quad \lim_{\theta \rightarrow 0} \cos \theta = 1.$$

而双曲线函数也恰如此, 根据 (2-1) 和 (2-2) 式中可写出

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sinh x = 0; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \cosh x = 1.$$

§ 3. 双曲线函数的线段表示法

在这节的开始我们先回忆一下三角函数的线段表示法。我们都知道三角函数可以用单位圆上的各个线段来表示, 它的情形大体如下(见图 3): 以直角坐标的原点 O 为圆心, 以 1 为半径画一圆周; 在第一象限中任取一角 $x = \angle AOP$, 并过 P 点引垂直 x 轴的线段 PM ; 通过 A, B 两点分别引圆的切线段 AT 及 BS , 显然 AT 及 BS 分别垂直 x 和 y 轴。

现在如设 P 点的坐标为 (ξ, η) , 则单位圆的方程就将是:

$$\xi^2 + \eta^2 = 1,$$

而 $\xi = \cos x$, $\eta = \sin x$, 所以圆的方程式实际就是

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1.$$

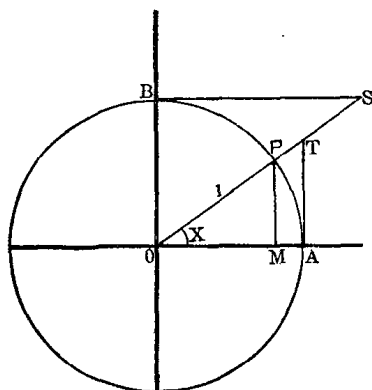


圖 3

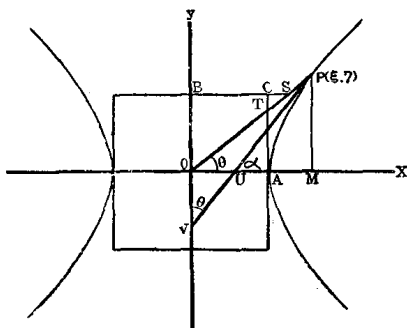


圖 4

其次从圆上的线段中可以看出:

$$MP = \sin x, \quad OM = \cos x,$$

$$AT = \tan x, \quad BS = \cot x,$$

$$OT = \sec x, \quad OS = \csc x.$$

这就是在坐标中的单位圆上用线段表示三角函数的办法。在双曲线函数中也有类似的情形。

首先在坐标面上作一直角单位双曲线 $\xi^2 - \eta^2 = 1$ (见图 4), 在双曲线上取一点 P , 如用直交坐标表示时为 $P(\xi, \eta)$, 用极坐标表示时为 $P(r, \theta)$, 并设 $\xi = \cosh x$, $\eta = \sinh x$, $OP = r$, 则

$$\xi = \cosh x = r \cos \theta;$$

$$\eta = \sinh x = r \sin \theta.$$

从此可知

$$\frac{\eta}{\xi} = \tanh x = \tan \theta.$$

另外从 $\xi^2 - \eta^2 = 1$ 的关系中可知

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1, \quad (3-1)$$

整理之则得

$$r^2(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) = 1.$$

其次, 圖上的 $OA = OB = 1$, 过 PO 引一綫, 設它与 AC 的交点为 T , 則 $x = \angle MOP = \theta$ 。这样我們就可以知道:

$$MP = \sinh x, \quad (3-2)$$

$$OM = \cosh x. \quad (3-3)$$

又因 $\triangle OAT \sim \triangle OMP$, 而 $\frac{AT}{MP} = \frac{OA}{OM}$ 所以

$$AT = \frac{MP}{OM} = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \tanh x \quad (3-4)$$

同时 $\triangle OBS \sim \triangle MOP$, 而 $\frac{BS}{OM} = \frac{OB}{MP}$ 所以

$$BS = \frac{OM}{MP} = \frac{\cosh x}{\sinh x} = \coth x. \quad (3-5)$$

現在再在圖上作出过双曲线 P 点的切綫, 此綫分別与 Ox 及 Oy 交于 U, V 两点, 則 $\angle OVU = \theta$, 从而知 $\triangle OUV \sim \triangle POM \sim \triangle PUM$, 所以

$$\frac{UM}{MP} = \frac{MP}{OM}, \quad \therefore UM = \frac{MP^2}{OM} = \frac{\eta^2}{\xi},$$

$$OU = OM - UM = \xi - \frac{\eta^2}{\xi} = \frac{1}{\xi} = \frac{1}{\cosh x} = \operatorname{sech} x. \quad (3-6)$$

$$\text{又因} \quad \frac{VO}{OU} = \frac{OM}{MP} = \frac{\xi}{\eta},$$

$$\text{故} \quad OV = \frac{OU \cdot \xi}{\eta} = \frac{1}{\eta} = \frac{1}{\sinh x} = \operatorname{csch} x. \quad (3-7)$$

总括上面所講可知: 双曲线函数 $\sinh x$ 和 $\cosh x$ 所表示的是直角双曲线 $\xi^2 - \eta^2 = 1$ 上的任意一点 P 的坐标, 一切双曲线函数皆能用单位双曲线上的綫段表示。这就是双曲线函数的由来之一。

§ 4. 双曲线函数与三角函数的关系(一)

在圖 5 的直角坐标上画出单位双曲线及单位圆。在双曲綫上取一点 $P(\xi, \eta)$, 則

$$\xi = \cosh x, \quad \eta = \sinh x.$$

通过 A 点引单位圆及单位双曲线的公切线 AR , $AR \parallel OY$;
过 P 点引线 $PR (\parallel OX)$,
 $PM (\parallel OY)$ 及 PO 。再在 O, R
之间联一线段 OR , OR 与单位
圆交于 Q 点。设 $\angle AOQ = \theta$,
 $\angle AOP = x$, 则

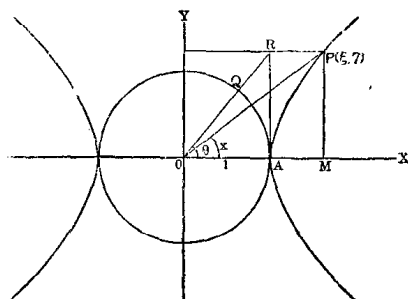


圖 5

$$\eta = MP = AR, \quad MP = \sinh x, \quad AR = \tan \theta.$$

$$\text{故} \quad \eta = \sinh x = \tan \theta. \quad (4-1)$$

从而知

$$\operatorname{csch} x = \cot \theta. \quad (4-2)$$

另外我們知道

$$\xi = \sqrt{1 + \eta^2} = \sqrt{1 + \tan^2 \theta} = \sec \theta,$$

$$\xi = \cosh x.$$

$$\therefore \cosh x = \sec \theta. \quad (4-3)$$

从此根据倒数关系还可知

$$\operatorname{sech} x = \cos \theta. \quad (4-4)$$

另外可知

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{\tan \theta}{\sec \theta} = \sin \theta. \quad (4-5)$$

同样根据倒数关系可知

$$\operatorname{coth} x = \csc \theta. \quad (4-6)$$

下边我們再來討論一下以上各双曲线函数中的角 x 与三角函数上的角 θ 的关系。通过计算可知:

$$e^x = \cosh x + \sinh x = \sec \theta + \tan \theta$$

$$= \frac{1 + \sin \theta}{\cos \theta} = \frac{\cos \frac{\theta}{2} + \sin \frac{\theta}{2}}{\cos \frac{\theta}{2} - \sin \frac{\theta}{2}} = \frac{1 + \tan \frac{\theta}{2}}{1 - \tan \frac{\theta}{2}} = \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2} \right).$$

$$\therefore x = \ln \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2} \right) \quad [1]$$

总结以上所讲,整理一下时双曲线函数和三角函数之间的关系如下:

$$\left. \begin{aligned} \sinh x &= \tan \theta, & \cosh x &= \sec \theta, \\ \tanh x &= \sin \theta, & \coth x &= \csc \theta, \\ \operatorname{sech} x &= \cos \theta, & \operatorname{csch} x &= \cot \theta. \end{aligned} \right\} \quad (4-7)$$

$$x = \ln \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2} \right).$$

§ 5. 二指数函数的和差与双曲线函数

二指数函数的和差与双曲线函数关系的问题在实用上有很大的意义,尤其在电路计算上。计算的形式大体如下,首先设

$$y = e^{ax} + e^{bx} \quad (5-1)$$

并设
$$\alpha = \frac{a+b}{2}, \quad \beta = \frac{a-b}{2}. \quad (5-2)$$

整理一下则得

$$a = \alpha + \beta, \quad b = \alpha - \beta. \quad (5-3)$$

将(5-3)代入(5-1)式则得

$$\begin{aligned} y &= e^{(\alpha+\beta)x} + e^{(\alpha-\beta)x} = e^{\alpha x}(e^{\beta x} + e^{-\beta x}) \\ &= 2e^{\alpha x} \cosh \beta x. \end{aligned} \quad (5-4)$$

从(5-4)式可知:二指数函数的和 y 等于指数函数 $e^{\alpha x}$ 与双曲余弦 $\cosh \beta x$ 的二倍乘积。

如果 $y = e^{ax} - e^{bx}$, 根据同样步骤会导出

$$y = 2e^{\alpha x} \sinh \beta x.$$

所以说:指数函数的差等于指数函数 $e^{\alpha x}$ 与双曲正弦 $\sinh \beta x$ 的二倍乘积。

[1] \ln ——自然对数符号

§ 6. 双曲綫函数間的关系

我們这里所說的双曲綫函数間的关系不外是各函数間的一次方的关系,平方关系,今后只要掌握各函数間的关系,那就能很方便地用一函数代換另一函数。

关于各双曲綫函数間的一次关系我們在 § 1 里已經講了一点,这里不妨再整理一下:

$$\left. \begin{aligned} \sinh x &= \frac{1}{\operatorname{csch} x} = \frac{\cosh x}{\coth x} \\ \cosh x &= \frac{1}{\operatorname{sech} x} = \frac{\sinh x}{\tanh x} \\ \tanh x &= \frac{1}{\coth x} = \frac{\sinh x}{\cosh x} \end{aligned} \right\} \quad (6-1)$$

(6-1)中的各公式乃是各函数間的一次方乘除关系,另外各函数間还有相加关系存在

$$e^{\pm x} = \cosh x \pm \sinh x. \quad (6-2)$$

(6-2)式的証明很容易,只要先將双曲余弦和双曲正弦的指数关系式代入式中就可以了。即

$$\cosh x \pm \sinh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \pm \frac{e^x - e^{-x}}{2} = e^{\pm x}.$$

各函数間的平方关系如下:

$$\left. \begin{aligned} \cosh^2 x - \sinh^2 x &= 1 \\ \operatorname{sech}^2 x + \tanh^2 x &= 1 \\ \coth^2 x - \operatorname{csch}^2 x &= 1 \end{aligned} \right\} \quad (6-3)$$

現在我們分別証明一下(6-3)式中的各式

$$\begin{aligned} \text{(I)} \quad \cosh^2 x - \sinh^2 x &= \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right)^2 \\ &= \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}{4} - \frac{e^{2x} - 2 + e^{-2x}}{4} \\ &= \frac{4}{4} = 1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{(II)} \quad \operatorname{sech}^2 x + \operatorname{tanh}^2 x &= \frac{1}{\cosh^2 x} + \frac{\sinh^2 x}{\cosh^2 x} \\
 &= \frac{\cosh^2 x - \sinh^2 x}{\cosh^2 x} + \frac{\sinh^2 x}{\cosh^2 x} = 1.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{(III)} \quad \operatorname{coth}^2 x - \operatorname{csch}^2 x &= \frac{\cosh^2 x}{\sinh^2 x} - \frac{1}{\sinh^2 x} \\
 &= \frac{\cosh^2 x - \cosh^2 x + \sinh^2 x}{\sinh^2 x} \\
 &= \frac{\sinh^2 x}{\sinh^2 x} = 1.
 \end{aligned}$$

除上述关系外还有下边这一关系:

$$(\sinh x + \cosh x)^n = \sinh nx + \cosh nx. \quad (6-4)$$

証明

$$\begin{aligned}
 \sinh nx + \cosh nx &= \frac{e^{nx} - e^{-nx}}{2} + \frac{e^{nx} + e^{-nx}}{2} \\
 &= e^{nx} = (e^x)^n = (\sinh x + \cosh x)^n.
 \end{aligned}$$

§ 7. 双曲线函数的加法公式(一)

双曲线函数的加法公式在形式上与三角函数的極其相似,我們在这節里除講加法定理的公式之外,还要講一些与此定理有密切联系的一些其他定理。

双曲线函数的加法定理形式是

$$\left. \begin{aligned}
 \sinh(x \pm y) &= \sinh x \cosh y \pm \cosh x \sinh y \\
 \cosh(x \pm y) &= \cosh x \cosh y \pm \sinh x \sinh y \\
 \tanh(x \pm y) &= \frac{\tanh x \pm \tanh y}{1 \pm \tanh x \tanh y}
 \end{aligned} \right\} (7-1)$$

現在我們就來分別將(7-1)中的各公式証明一下

$$\begin{aligned}
 \text{(I)} \quad & \sinh x \cosh y \pm \cosh x \sinh y \\
 &= \frac{e^x - e^{-x}}{2} \cdot \frac{e^y + e^{-y}}{2} \pm \frac{e^x + e^{-x}}{2} \cdot \frac{e^y - e^{-y}}{2} \\
 &= \frac{e^{x+y} + e^{x-y} - e^{-(x-y)} - e^{-(x+y)}}{4} \\
 &\quad \pm \frac{e^{x+y} - e^{x-y} + e^{-(x-y)} - e^{-(x+y)}}{4}.
 \end{aligned}$$

如前后两式相加, 则等于

$$\frac{2e^{(x+y)} - 2e^{-(x+y)}}{4} = \frac{e^{(x+y)} - e^{-(x+y)}}{2} = \sinh(x+y).$$

如前后两式相减则等于

$$\frac{2e^{(x-y)} - 2e^{-(x-y)}}{4} = \frac{e^{(x-y)} - e^{-(x-y)}}{2} = \sinh(x-y).$$

$$\text{(II)} \quad \cosh x \cosh y \pm \sinh x \sinh y$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{e^x + e^{-x}}{2} \cdot \frac{e^y + e^{-y}}{2} \pm \frac{e^x - e^{-x}}{2} \cdot \frac{e^y - e^{-y}}{2} \\
 &= \frac{e^{x+y} + e^{x-y} + e^{-(x-y)} + e^{-(x+y)}}{4} \\
 &\quad \pm \frac{e^{x+y} - e^{x-y} - e^{-(x-y)} + e^{-(x+y)}}{4}.
 \end{aligned}$$

如前后两式相加, 则得

$$\frac{2e^{(x+y)} + 2e^{-(x+y)}}{4} = \frac{e^{(x+y)} + e^{-(x+y)}}{2} = \cosh(x+y).$$

如前后两式相减时, 则等于

$$\frac{2e^{(x-y)} + 2e^{-(x-y)}}{4} = \frac{e^{(x-y)} + e^{-(x-y)}}{2} = \cosh(x-y).$$

$$\begin{aligned}
 \text{(III)} \quad \tanh(x+y) &= \frac{\sinh(x+y)}{\cosh(x+y)} \\
 &= \frac{\sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y}{\cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y} \\
 &= \frac{\frac{\sinh x \cosh y}{\cosh x \cosh y} + \frac{\cosh x \sinh y}{\cosh x \cosh y}}{1 + \frac{\sinh x \sinh y}{\cosh x \cosh y}} \\
 &= \frac{\tanh x + \tanh y}{1 + \tanh x \tanh y}
 \end{aligned}$$

用同样方法即可证明 $\tanh(x-y) = \frac{1 - \tanh x \tanh y}{\tanh x - \tanh y}$, 这里我们就不再赘述了。

我们既然已经导出(7-1)式的加法公式, 现在就应用加法定理导出一些更新的公式:

$$\left. \begin{aligned}
 2 \sinh x \cosh y &= \sinh(x+y) + \sinh(x-y) \\
 2 \cosh x \sinh y &= \sinh(x+y) - \sinh(x-y) \\
 2 \cosh x \cosh y &= \cosh(x+y) + \cosh(x-y) \\
 2 \sinh x \sinh y &= \cosh(x+y) - \cosh(x-y)
 \end{aligned} \right\} \quad (7-2)$$

(7-2) 式中的四式证明法基本上一致, 所以我们只作为举例, 将第一式证明一下, 其余的就省略了。

$$\begin{aligned}
 &\sinh(x+y) + \sinh(x-y) \\
 &= \sinh x \cosh y + \sinh y \cosh x + \sinh x \cosh y \\
 &\quad - \sinh y \cosh x \\
 &= 2 \sinh x \cosh y.
 \end{aligned}$$

根据(7-2)式可进而知下列公式的成立:

$$\left. \begin{aligned} \sinh x + \sinh y &= 2 \sinh \frac{x+y}{2} \cosh \frac{x-y}{2} \\ \sinh x - \sinh y &= 2 \cosh \frac{x+y}{2} \sinh \frac{x-y}{2} \\ \cosh x + \cosh y &= 2 \cosh \frac{x+y}{2} \cosh \frac{x-y}{2} \\ \cosh x - \cosh y &= 2 \sinh \frac{x+y}{2} \sinh \frac{x-y}{2} \end{aligned} \right\} (7-3)$$

这里我们也只证明一下第一式而将同样证法的其余各式省略。

$$\text{取一式: } 2 \sinh A \cosh B = \sinh(A+B) + \sinh(A-B),$$

并设

$$A+B=x, \quad A-B=y.$$

于是可知

$$A = \frac{x+y}{2}, \quad B = \frac{x-y}{2}.$$

将上边这四个条件代入式中则得

$$2 \sinh \frac{x+y}{2} \cosh \frac{x-y}{2} = \sinh x + \sinh y.$$

另外还有一个正切的公式:

$$\tanh x \pm \tanh y = \frac{\sinh(x \pm y)}{\cosh x \cosh y}. \quad (7-4)$$

它的证明如下:

$$\begin{aligned} \frac{\sinh(x \pm y)}{\cosh x \cosh y} &= \frac{\sinh x \cosh y \pm \sinh y \cosh x}{\cosh x \cosh y} \\ &= \frac{\sinh x}{\cosh x} \pm \frac{\sinh y}{\cosh y} \\ &= \tanh x \pm \tanh y. \end{aligned}$$

最后我们再讲两个公式以作本节的结束。