

弹塑性断裂力学

黄克智 余寿文 著



清华大学出版社

内 容 简 介

本书系统地总结了静止裂纹与扩展裂纹尖端的弹塑性场方面近十多年来的国内外研究成果。介绍了起裂与裂纹扩展的弹塑性断裂准则。讨论了以 J 主导条件与 J 控制扩展的弹塑性断裂力学的工程方法。比较系统地阐述了作者及其合作者在弹塑性断裂力学特别是裂纹扩展方面近年来的研究成果。

全书分成三章：第一章用较少的篇幅介绍线弹性断裂力学必要的基础；第二章介绍静止裂纹的弹塑性断裂力学；第三章介绍扩展裂纹的弹塑性断裂力学。为了便于教学，在叙述上着重阐明基本概念与基本理论。

本书对象为高等院校、科研和工程技术部门从事断裂力学研究和应用的教师、科学技术人员，也可作为高等院校弹塑性断裂力学的教材。

弹 塑 性 断 裂 力 学

黄克智 余寿文 著

*

清华大学出版社出版

北京海淀 清华园

煤炭工业出版社印刷厂排版

河北省固安县印刷厂印装

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

开本：787×1092¹/₃₂ 印张：12³/₈ 字数：285千字

1985年8月第一版 1985年8月第一次印刷

印数：00001~15000

统一书号：15235·138 定价：2.40元

前 言

线弹性断裂力学目前已获得充分的发展与应用，在解析的、数值的与试验的研究方面都取得了许多成果。在有的行业中，至今仍以线弹性断裂力学作为制定规范（例如美国机械工程师协会ASME锅炉与压力容器规范）和有关结构安全评定的基础。出现了许多有关的手册与教科书。当然，也还有一些问题，例如三维裂纹问题，厚板与厚壳裂纹问题等，还需要进一步的研究。

弹塑性断裂力学只有十余年的历史。由于实际工程中使用的往往都是具有较好的韧性与塑性的材料，实际的需要促使弹塑性断裂力学取得了一些进展。特别值得提起的是自从1968年 Hutchinson^[63]及 Rice 与 Rosengren^[64]发表了著名的HRR奇异解，它为弹塑性断裂力学提供了一个理论的起点。大量的数值研究与试验研究为它的应用创造了条件。HRR奇异解是建立在塑性形变理论与无卸载假定（实际上相当于非线性弹性）的基础上的，这本来是HRR解的重大的弱点。但是许多数值的与试验的研究帮助它部分地克服了这一弱点，确定了在许多情况下，试件与结构中仍然存在着所谓J主导区，使得裂纹尖端被包围在外部的J主导区之中，因而J就成为决定裂纹起裂条件的参数。这样，在结构安全评定与材料韧性试验方法中，J获得了很多应用。

但是，当人们着手研究起裂以后的裂纹扩展问题时，HRR解的上述弱点又再次显露。工程中的韧性材料往往在起裂以后，经过一段稳定扩展过程才会失稳，而裂纹一旦起裂

以后，在尖端附近出现严重的非比例塑性变形与卸载，这就使得HRR奇异解所由建立的基础被否定了， J 本身也失去意义了。幸好，由于许多人，特别是J.W.Hutchinson, P.C. Paris, C.F.Shih 等人努力，研究结果表明在一些较强的限制条件下（例如裂纹扩展量非常小，材料的 J 阻力曲线斜率非常陡等），裂纹扩展也仍然受到 J 的控制。目前， J 控制扩展的理论开始获得了一些应用。

但是， J 控制扩展理论毕竟是有较大的局限性的。人们还希望能从根本上改善裂纹稳定扩展（即起裂后至失稳前的扩展）问题研究的现状，希望能更科学地建立裂纹稳定扩展的准则。这就要求对扩展中裂纹尖端周围的应力与应变场进行研究，在此基础上建立以尖端附近某些物理量（例如尖端前方的应变，或尖端后方的裂纹开口形状）为基础的“近尖端断裂准则”。扩展中裂纹的分析方法往往与静止裂纹分析方法很不相同。在这方面作一点较系统的介绍与阐述，正是本书的主要目的所在。

为了使问题的叙述能循序渐进，逐步深入，全书分成三章：第一章介绍线弹性断裂力学最必要的基础，第二章介绍静止裂纹的弹塑性断裂力学，第三章介绍扩展裂纹的弹塑性断裂力学。由于教学的目的，在叙述上着重于对基本概念与基本理论的阐述。弹塑性断裂力学包括的范围之广，领域之多，使本书对许多问题（如动力问题，蠕变问题，疲劳、应力腐蚀等问题）无法涉及。如果在所涉及的范围之内，作为一本新的教科书，能把问题阐述清楚，对读者有所帮助，作者的目的就已达到了。

作者于清华大学

一九八三年七月

目 录

前 言

第一章 线弹性断裂力学简介 1

§ 1 线弹性裂纹问题的解 应力强度因子的概念 1

§ 2 能量释放率 11

§ 3 小范围屈服条件下的起裂 19

§ 4 小范围屈服条件下的裂纹扩展 25

§ 5 线弹性断裂力学的其它应用 36

第二章 弹塑性断裂力学 40

§ 1 J 积分 40

§ 2 Dugdale-Баренблатт 模型 49

§ 3 小范围屈服条件下的弹塑性解 59

§ 4 大范围屈服条件下的弹塑性解 79

§ 5 局部解(渐近解)(一)—Ⅲ型问题 90

§ 6 局部解(二)—I型与复合型 115

§ 7 J 主导条件 148

§ 8 J 主导条件下裂纹张开位移 δ_c 与J的关系 156

§ 9 J 积分计算 163

§ 10 J 积分测定方法 175

§ 11 裂纹张开位移 185

第三章 裂纹扩展 194

§ 1 在J控制条件下的裂纹扩展与稳定性 194

§ 2 对裂纹稳定扩展现象的宏观解释 214

§ 3 在理想弹塑性介质中Ⅲ型裂纹的稳定扩展 217

§ 4 理想弹塑性材料Ⅲ型定常扩展裂纹的局部解 246

§ 5 Ⅲ型裂纹基于开口位移的稳定扩展准则 281

§ 6	理想弹塑性材料平面应变问题的提法	288
§ 7	理想弹塑性材料($\nu = 1/2$)平面应变 I 型定常扩展 裂纹的局部解	332
§ 8	I 型裂纹基于开口位移的稳定扩展准则	371
参考文献		383

第一章 线弹性断裂力学简介

线弹性断裂力学是弹塑性断裂力学的特殊情况。线弹性断裂力学研究理想脆性材料和构件，当存在裂纹型缺陷时裂纹扩展的规律。对于弹塑性材料，裂纹周围进入小范围屈服时，线弹性断裂力学经过适当的修正后，仍然可以用于含裂纹材料和构件的断裂分析。即使构件进入大范围屈服时，在弹性区部分，仍然必须用线弹性断裂力学的分析方法。弹塑性断裂力学中的塑性应力强度因子和奇异场，非线性能量率，撕裂模量和阻力曲线等概念，皆可以从线弹性断裂力学中关于应力强度因子、能量释放率、 K_R 阻力曲线等概念中寻找发端的源头。所以本书为讨论弹塑性断裂力学，在第一部分简要介绍后文所需的线弹性断裂力学的基本概念。对于线弹性断裂力学的详细的叙述，可参阅本书末了所列的参考文献〔1〕—〔8〕和教材〔34〕，本章的部分材料，引自Hutchinson的著作〔35〕。

§ 1 线弹性裂纹问题的解 应力强度因子的概念

物体发生脆性断裂时，如果物体没有塑性变形产生，则理想化地认为物体是弹性的。物体变形时，如服从虎克定律，则可认为它是线弹性体。于是问题归结为含裂纹物体的

线弹性力学分析。

I、II、III型的脆断问题，归结为平面问题和反平面问题下含裂纹的线弹性体的线弹性力学分析。

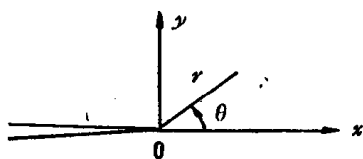


图 1.1 裂纹尖端的坐标系

分析图 1.1 所示的平面裂纹体。裂纹两岸是自由的，无外力作用。远场有给定力或位移的边界条件。

材料是均匀、各向同性的。弹性模量为 E ， ν 是泊松系数。对于弹性力学平面问题，应用复变函数解法，集中注意力于求解复应力函数 $\varphi(z)$ ， $\psi(z)$ 。如果求得 $\varphi(z)$ ， $\psi(z)$ 。则由下式

$$\begin{aligned}\sigma_r + \sigma_\theta &= 2[\varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)}] = 4\operatorname{Re}\varphi'(z) \\ \sigma_\theta - \sigma_r + 2i\tau_{r\theta} &= 2e^{2i\theta}[\overline{z}\varphi'(z) + \psi'(z)] \\ 2G(u_r + iu_\theta) &= e^{-i\theta}[\kappa\varphi(z) - z\overline{\varphi'(z)} - \overline{\psi(z)}]\end{aligned}\quad (1.1)$$

求得各应力分量 $\sigma_{\alpha\beta}$ ，位移分量 u_α 。其中对于平面应变情形， $\kappa = 3 - 4\nu$ ，对于平面应力 $\kappa = (3 - \nu)/(1 + \nu)$ 。剪切弹性模量 $G = E/2(1 + \nu)$ 。取复应力函数 $\varphi(z)$ ， $\chi(z) = \int \psi(z)dz$ 的特征展开式为

$$\begin{aligned}\varphi(z) &= \sum_{n=1}^{\infty} A_n z^{1/n} \\ \chi(z) &= \sum_{n=1}^{\infty} B_n z^{1/n+1}\end{aligned}\quad (1.2)$$

满足裂纹两岸应力自由的边界条件

$$\sigma_\theta + i\tau_{r\theta} \Big|_{\theta=\pm\pi} = 0$$

则由 A_n ， B_n 有非平凡解的条件，可确定

$$\lambda_n = \frac{n}{2} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$B_n = -\frac{2}{n+2} \left[\frac{n}{2} A_n + (-1)^n \bar{A}_n \right] \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

讨论裂纹尖端附近区域，取特征展开式 (1.2) 的第一项，即占优的主项。当 $n = 1$ ， $\lambda_n = \lambda_1 = 1/2$ 。此时，有

$$A_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (K_I - iK_{II}) \quad (1.3)$$

$$B_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(-\frac{1}{3} K_I + iK_{II} \right)$$

其中常数 A_1 , B_1 或 K_I , K_{II} 由远场给定的边界条件确定。

我们称特征展开式主项 $\varphi(z) = A_1 z^{1/2}$, $\chi(z) = B_1 z^{3/2}$ 所对应裂纹尖端的应力场为占优的奇异场。分别讨论以下的情形，为方便，记 $x_1 = x, x_2 = y, u_1 = u, u_2 = v$ 。

(i) 平面应力和平面应变情况下对于裂纹平面的对称场 (I 型, 图1.2)

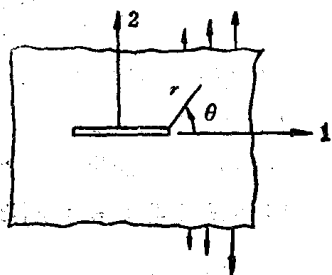


图 1.2 I 型情况

$$\sigma_{\alpha\beta} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \tilde{\sigma}_{\alpha\beta}^I(\theta) \quad (1.4)$$

$$u_\alpha = u_\alpha^0 + \frac{K_I}{2G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \tilde{u}_\alpha^I(\theta, \kappa) \quad (1.5)$$

$$\sigma_{22}|_{\theta=0} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}}, v|_{\theta=\pi} = u_2|_{\theta=\pi} = K_I \frac{1+\kappa}{2G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \quad (1.6)$$

式中取 $\tilde{\sigma}_{12}^I(\theta=0)=1$, $\tilde{\sigma}_{\alpha\beta}^I(\theta)$, $\tilde{u}_\alpha^I(\theta)$ 几乎在所有断裂力学的教科书中均可找到。注意到在裂纹前缘 $\theta=0$ 处 σ_{12} 为 (1.6) 式, 则

$$K_I = \lim_{r \rightarrow 0} [\sqrt{2\pi r} \sigma_{12} |_{\theta=0}] \quad (1.7)$$

称为应力强度因子 (I 型)。对于平面应力情况, $\sigma_{33}=0$; 对于平面应变情况, $\sigma_{33}=\nu(\sigma_{11}+\sigma_{22})$ 。

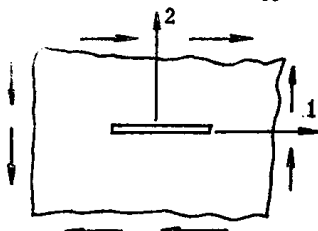


图 1.3 I 型情况

(ii) 平面应力和平面应变情况下对于裂纹平面的反对称场 (II 型, 图 1.3)

$$\sigma_{\alpha\beta} = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \tilde{\sigma}_{\alpha\beta}^{II}(\theta) \quad (1.8)$$

$$u_\alpha = u_\alpha^0 + \frac{K_{II}}{2G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \tilde{u}_\alpha^{II}(\theta, \kappa) \quad (1.9)$$

K_{II} 为 II 型应力强度因子。其中取 $\tilde{\sigma}_{12}^{II}(\theta=0) \equiv 1$, ($\sigma_{11} = \sigma_{22} = 0$, $\theta = 0$ 时)。

(iii) 反平面剪切 (III 型, 图 1.4)

用和弹性理论扭转问题相仿的解法, 求得:

$$\sigma_{3\alpha} = \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \tilde{\tau}_\alpha^{III}(\theta) \quad (1.10)$$

$$u_3 = 2 \frac{K_{III}}{G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin \frac{\theta}{2} \quad (1.11)$$

K_{III} 为 III 型应力强度因子。其中,

$$\tilde{\tau}_1 = -\sin \frac{\theta}{2}, \quad \tilde{\tau}_2 = \cos \frac{\theta}{2}.$$

由 (1.4), (1.8), (1.10)

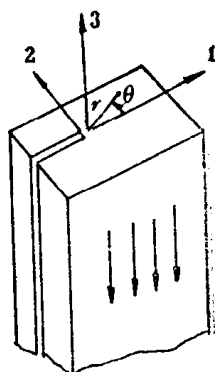


图 1.4 III 型情况

式可知：应力分布表达式中，应力分量与 $\sqrt{r}$ 成反比，称具有 $r^{-1/2}$ 阶的奇异性。距离裂纹尖端愈近，应力愈大；对应于I、II、III型的函数 $\tilde{\sigma}_{\alpha\beta}^I(\theta)$ ， $\tilde{\sigma}_{\alpha\beta}^{II}(\theta)$ ， $\tilde{\tau}_\alpha(\theta)$ 称为角分布函数，它仅和极角 θ 有关。

上述各式中， K_I ， K_{II} ， K_{III} 是与坐标 (r, θ) 无关的。在裂纹尖端附近的区域内，应力分量、位移分量均与应力强度因子 K_I ， K_{II} ， K_{III} 成正比，所以应力强度因子是裂纹尖端附近应力、位移场强度的表征，它是控制裂纹尖端应力场强度的参数；当 K 增大，则裂纹尖端附近各点的应力、位移分量成比例地增大。

在裂纹尖端附近，不同形状的物体，不同受载的情况，应力场分布的解的结构相同：即与应力强度因子成正比，与 $\sqrt{r}$ 成反比，与角分布函数成正比。所以，即使物体形状不同，如果 K 值相同，则裂纹尖端附近的应力场完全相同。

由于复应力函数和应力场、位移场的表达式中，仅保留占优的主项，所以这些式子都是近似式，然而在 $r \ll a$ （ a 为裂纹长度）的范围内，占优主项的表达式有良好的精确度。

一般情况下，在任意平面问题中，裂纹尖端的奇异场是I型和II型结果的线性叠加；而对于三维的裂纹问题，在沿裂纹边界任意点的奇异场，是I、II型和III型问题的线性叠加。

线弹性断裂力学提供了求解应力强度因子的多种方法。对具体的结构形式、受载情形、边界约束条件等，用弹性力学的方法，可确定由(1.4) (1.8) (1.10)式所描写的应力场、位移场的比例系数——应力强度因子。

确定应力强度因子的方法,有解析的方法(见文〔4〕、〔8〕所述):诸如应用复变函数理论的方法,应用积分变换的方法,应用弹性力学守恒律的方法,及复变-变分方法〔40〕等等。有数值的方法:如有限单元法,边界配位法,边界积分方程法。有实验的方法:如光弹性的方法,焦散线的方法,以及下文将要提到的柔度标定的方法等等。

计算分析的结果表明:应力强度因子与外载荷、含裂纹物体的几何形状有关,在边界力的主矢量与主矩不为零时还和材料的泊松系数有关。一大批应力强度因子的结果已汇编成应力强度因子手册(见文〔9〕—〔13〕)可供使用者查阅。下面给出一些常见的例子:

承受拉伸的无限平面内的有限长裂纹(图1.5)

$$K_I = \sigma^\infty \sqrt{\pi a} \quad (1.12)$$

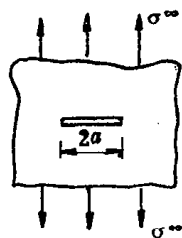


图 1.5

承受剪切的无限平面内的有限长裂纹(图1.6)

$$K_{II} = \tau^\infty \sqrt{\pi a} \quad (1.13)$$

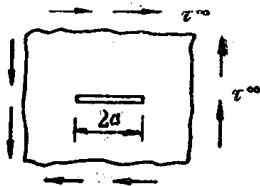


图 1.6

Ⅲ型情况下无限体内的有限长裂纹和半空间内的边裂纹(图

1.7)

$$K_{II} = \tau^{\infty} \sqrt{\pi a}$$

(1.14)

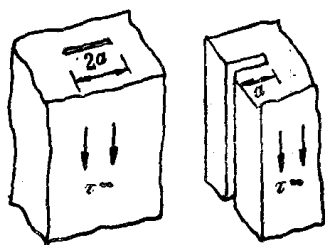


图 1.7

承受拉伸的半平面内的边裂纹 (图1.8)

$$K_I = 1.122 \sigma^{\infty} \sqrt{\pi a} \quad (1.15)$$

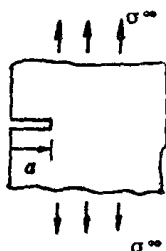


图 1.8

承受拉伸的无限平面内的周期裂纹 (图1.9)

$$K_I = \sigma^{\infty} \sqrt{\pi a}$$

$$\times \left[\frac{2b}{\pi a} \tan\left(\frac{\pi a}{2b}\right) \right]^{1/2} \quad (1.16)$$

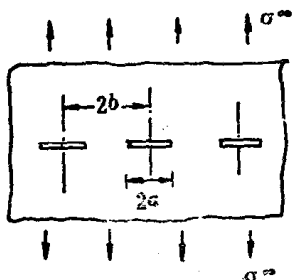


图 1.9

III型有限宽含裂纹板条 (图1.10)

$$K_{III} = \tau^{\infty} \sqrt{\pi a} \left[\frac{2b}{\pi a} \tan\left(\frac{\pi a}{2b}\right) \right]^{1/2} \quad (1.17)$$

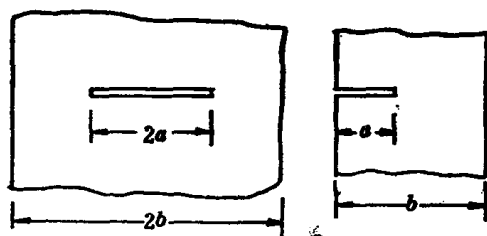


图 1.10

对于常用的标准试件，应力强度因子的标定公式如下：

图1.11示紧凑拉伸试件，按〔21〕， P 为单位厚度的外力。若记 P_1 为总外力， B 为厚度， $P = P_1/B$ 。

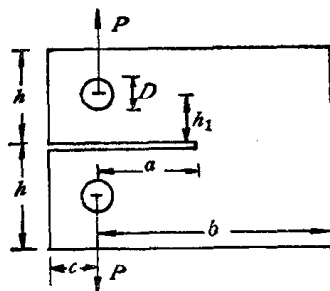


图 1.11 紧凑拉伸试件

$$K_I = \frac{P_1}{Bb^{1/2}} f_1 \left(\frac{a}{b} \right) = \frac{Pa^{1/2}}{b} F_1 \left(\frac{a}{b} \right) \quad (1.18)$$

$$\text{其中 } f_1 \left(\frac{a}{b} \right) = 29.6 \left(\frac{a}{b} \right)^{1/2} - 185.5 \left(\frac{a}{b} \right)^{3/2} \\ + 655.7 \left(\frac{a}{b} \right)^{5/2} - 1017 \left(\frac{a}{b} \right)^{7/2} + 638.9 \left(\frac{a}{b} \right)^{9/2}$$

按〔21〕及美国材料试验学会标准〔20〕, (1.18)已取

$$h = 0.6b, h_1 = 0.275b, D = 0.25b$$

$$c = 0.25b, B = b/2$$

则记 $F_1(a/b) = f_1(a/b)\sqrt{b/a}$, 由文〔9〕作 $F_1(a/b)$ 图如图1.12所示。

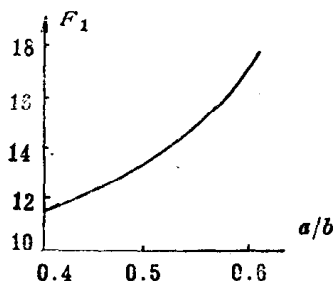


图 1.12 F_1 与 (a/b) 关系

对图1.13所示承受纯弯曲的含有边裂纹的有限宽板条, M 为每单位厚度的弯矩, 且 $\sigma = 6M/c^2$, 则



图 1.13 纯弯曲试件

$$K_I = Mc^{-3/2}f(a/c) \quad (1.19)$$

$$(a/c \rightarrow \infty, f \rightarrow 3.98; a/c \rightarrow 0, K_I \rightarrow 1.122\sigma\sqrt{\pi a})$$

对于常用的三点弯曲试件〔21〕(图1.14), P 为单位厚度外载荷, 则

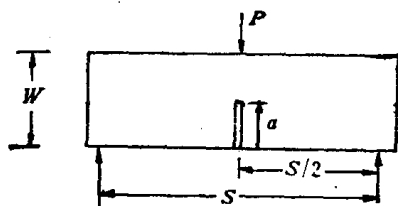


图 1.14 三点弯曲试件

$$K_I = \frac{PS}{W^{3/2}} f_2(a/W) \quad (1.20)$$

其中 $f_2(a/W) = [1.88 + 0.75 (a/W - 0.5)^2] \sec\left(\frac{\pi a}{2W}\right) \cdot$

$$\cdot \sqrt{\tan\left(\frac{\pi a}{2W}\right)}$$

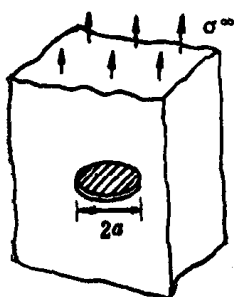


图1.15所示的圆盘形片状裂纹，裂纹尖端附近的应力场与I型的平面应变情形相同，则

$$K_I = \frac{2}{\pi} \sigma^\infty \sqrt{\pi a} \quad (1.21)$$

图 1.15 圆片状深埋裂纹

总之，在脆断问题中，裂纹尖端附近存在由应力强度因子 K 控制的 K 主导区，如图1.16所示。

子 K 控制的 K 主导区，如图1.16所示。

$$\sigma_{\alpha\beta} = \frac{K}{\sqrt{2\pi r}} \tilde{\sigma}_{\alpha\beta}(\theta) \quad (1.22)$$

上式表示 K 主导区内的应力分量。在裂纹尖端存在 R_0 表示的非弹性区（包括过程区），在该区域内发生的情况受应力强度因子 K 的制约。而外加应力、裂纹体几何形状，仅通过应力强度因子 K 值来影响 K 主导区的应力场。

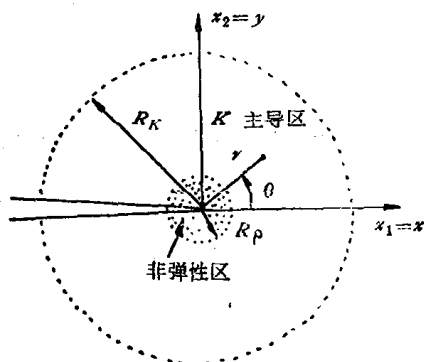


图 1.16 K 主导区示意图

§ 2 能量释放率

线弹性断裂力学中，一般从两个角度分析含裂纹物体的力学性能。一种方法是分析含裂纹物体的裂纹尖端的应力应变场；另一种是从能量的观点考察裂纹扩展过程中物体能量的变化。第一种分析方法得到表征裂纹尖端应力应变场强度的特征参数——应力强度因子 K ；第二种方法如同本节所要介绍的，得到表征裂纹扩展的能量变化的参数——能量释放率 $\mathcal{G}$ 。它们两者之间存在简单的关系。

首先考察图 2.1 所示的给定载荷的试验系统，讨论 I 型受力的情形。记 a 为裂纹长度， P 为单位厚度的外载荷。 Π 为单位厚度的系统的位能。 Δ 为加载点的位移。 $\mathcal{G}$ 为单位厚度的能量释放率：

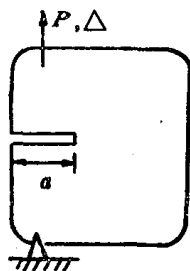


图 2.1 给定载荷的试验系统

$$\mathcal{G} = - \left[\frac{\partial \Pi}{\partial a} \right]_P \quad (2.1)$$

则对于给定 P 的情况

$$\Pi = U - P\Delta = \frac{1}{2} P\Delta - P\Delta = - \frac{1}{2} P\Delta$$

式中 U 为系统（每单位厚度）的应变能。

$$\mathcal{G} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial a} (P\Delta) \Big|_P = \frac{P}{2} \left[\frac{\partial \Delta}{\partial a} \right]_P \quad (2.2)$$

定义物体的柔度 C

$$C = \Delta / P \quad (2.3)$$

C 值仅与物体的几何形状、 E 和 ν 有关。