

应用地球物理中的 位场及其变换

(法) W·巴兰诺夫 著

地
质
学



53.9
137

应用地球物理中的 位场及其变换

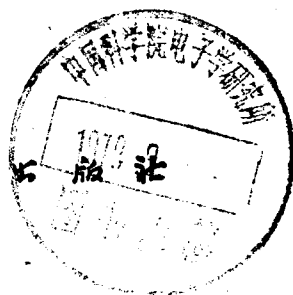
[法] W.巴兰诺夫 著

侯重初 译

兰仲雄 校

1107366

地质出版社



DT45/19
GEOPUBLICATION ASSOCIATES

VLADIMIR BARANOV

Potential Fields and their Transformations
in Applied Geophysics

1975

GEBRÜDER BORNTAEGER • BERLIN • STUTTGART

应用地球物理中的位场及其变换

〔法〕W.巴兰诺夫 著

侯重初 译

兰仲雄 校

*

国家地质总局书刊编辑室编辑

地质出版社出版

地质印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 • 各地新华书店经售

*

1979年8月北京第一版 • 1979年8月北京第一次印刷

印数1—7,790册 • 定价0.80元

统一书号: 15038 • 新 428

序 言

本书主要讨论重、磁异常的函数变换。虽然它提供一种解释工具，但不专门讨论解释问题。开头几章叙述位以及从位导出的场的一般基本概念。我们也讨论在地球物理学中有用的调和函数的主要性质。后两章专门讨论这些原理在应用地球物理中的应用。

为了使那些尚不熟悉现代数学语言的地球物理工作者易于理解，我们用普通的语言来叙述。所以不要求数学上的严格，且常以简单的说明来代替证明。但却不可避免尚有一些非古典的概念，例如狄拉克 δ -函数就是一例，因为没有它，我们就不可能计算距离倒数的拉普拉斯算子。

根据边界条件以及为了可以将场向下延拓，我们从求解方程 $\Delta U=0$ 来开始第二部分。

用傅里叶积分是很容易求得上述方程的解的。但令人奇怪的是，某些作者喜欢求助于不满足边界条件、甚至收敛得很慢的二重傅里叶级数。遗憾的是，我们还必须用这种不恰当的解法。

地球物理场的变换主要是将它延拓（或是比较容易地向上延拓，或是比较冒险地向下延拓）。我们指出，如果可以把场看作具有有界谱的函数，那就可能向下延拓到适当的深度。我们也走这条路，即严格地通过利用取样函数来研究这种类型的函数及其表示式。

严格地说，本书的主导思想在于把具有有界谱的函数应用于函数的变换。我们尽可能恰当地扩大数值方法，同时我们仔细地研究了误差大小的数量级。为了把本书的篇幅控制在限度以内，我们压缩了取样计算，但为了弥补这一说明的缺陷，我们叙述了所用的计算机程序，读者可将程序应用于自己的实例。

目前不能设想没有电子计算机可以进行数值计算。为此，我们不企图详细讨论简单公式，而更多地集中于准确的公式。但是，我们的最复杂的程序在 CDC 7600 计算机上只需 90 秒的运算时间。这是要求把航空磁测的场化到地磁极的程序，它包括计算矩阵系数及其全部校验。

我们只开展了用于实际的全部三维空间理论。但是在附录中包括关于对数位和二维场的某些论述。另外一个附录是关于由简单几何形体引起的场。最后，我们考虑到给读者提供关于傅里叶变换和谱的一些特性是有用的。

在我们这本书中没有引证任何一个作者和文献名称，但是我们加了一个注有发展过程的文献目录。

我们必须愉快地感谢巴黎地球物理总公司，它允许我们利用其大型计算设备。作者同样感谢总公司的工程师塔森考特 (J. B. Tassencourt) 先生，在设计这些程序中他帮助了我们，以及勃雷斯 (P. E. Blaise) 先生，他帮助我们运行这些程序。我感谢本书的各位编辑，特别是诺斯特兰德 (Robert van Nostrand) 博士担负了繁重的翻译工作，由于他丰富的地球物理学和语言学的经验而完成得如此令人满意，还有沙霍夫 (Svend Saxov) 教授，他最后组织成这本书。

主 要 符 号 表

A, B	常数
A, B	专用表达式 (9.12)
a, b	开拓间隔的界限
B	磁感
C_k	傅里叶系数
C_k	贝塞尔系数
$C(M)$	位的圆滑项
$C_n(k, n)$	系数矩阵
$C_x(k, n), C_y(k, n)$	水平导数的矩阵
$D_k (k=1, 2, 3, 4)$	横向延拓范围
$D_{ij} (i, j=1, 2)$	专用表达式 (9.26)
$\mathcal{D}$	积分域
E_k	取样函数
$\tilde{E}_k$	E_k 的傅里叶变换
F	函数, 有界函数
$f(x), f(x, y)$	函数
$\tilde{f}(\alpha), \tilde{f}(\alpha, \beta)$	傅里叶变换
f_1	f 的奇部
f_0	f 的偶部
f	常数, 万有引力常数
g	重力的垂直分量
$\bar{g}(\rho)$	$g(\rho, \omega)$ 的平均值
grad_M	M 点处的梯度
$G(x, y, z)$	$\exp(-\gamma z)$ 的逆傅里叶变换
J	磁化强度

J_x, J_y, J_z	磁化强度的分量
i, j	指示数
h	向下延拓的深度
H	$z=0$ 平面以下的物质最小深度
$\mathbf{H}$	矢量场
H_λ	沿 λ 方向的分量
J_n	贝塞尔函数
l	两单层的间距
L	确定异常的点的数目
M	定点
m	作用物质
dm	磁质元
$\mathfrak{M}$	磁矩
$\mathbf{n}$	曲面法向单位矢量
d/dn	沿 $\mathbf{n}$ 方向的导数
P	变量, 动点
P	权函数
P_i, Q_i	专用表达式 (9.26) 与 (9.28)
Q, q	取样间隔
Q	流量
$\mathbf{r}$	位移矢量 $\mathbf{MP}$
$\mathbf{r}'$	位移矢量 $\mathbf{M'P}$
r	标量距离 $\overline{MP}$
r'	标量距离 $\overline{M'P}$
r, θ, ϕ	球座标
$\mathbf{R}$	矢量场, 流体的速度
$R(r)$	r 的函数
S	域的边界
dS	曲面元
ds, ds	弧元

S	物体的水平截面
S_m	S 的最大截面
T	线积分, 力所做的功
T, T_1	总磁场
T_0	化到磁极的磁场
T''	T 的垂向二次导数
U, V	标量场
U	调和函数
U	位
V	磁位
$\tilde{U}(\alpha, \beta)$	$U(x, y)$ 的傅里叶变换
u	积分变量
dv	体积元
x, y, z	点 M 的直角坐标
$X(x), Y(y), Z(z)$	单变量函数
X, Y, Z	场的分量
Z	磁场的垂向分量
X_{kn}	未知系数
α, β	傅里叶变换的参量, Π' 上的坐标
$\gamma = \sqrt{(\alpha^2 + \beta^2)}$	平面 Π' 上的距离
Δ_0, Δ_δ	当 $Q, \epsilon \rightarrow 0$ 时具有以 δ 为极限的函数
δ	狄拉克分布 (即广义函数)
ϵ, η	小正数
κ	磁化率
λ, ν	确定方向的单位矢量
μ	磁导率
ν	曲面法向的单位矢量
$d/d\nu$	沿 ν 方向的导数
$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$	λ 的分量
ν_1, ν_2, ν_3	ν 的分量

ρ	在平面 Π 上确定的距离
σ	作用物质的密度
σ_m	最大密度
σ	复数 (9.36)
Π	水平面 Oxy 或 $z=0$
Π'	频率域中的平面 $O\alpha\beta$
Φ	通量
Φ	被积函数
$\varphi(x)$	泛函的自变量
ξ, η, ζ	变点 P 的直角坐标
ϕ	矢量 λ 与 ν 之间的夹角
$\int_{\Gamma}$	围道积分

目 录

序言

主要符号表

I. 场与位的物理学	1
1. 场与位	1
1.1 由位导出的场	1
1.2 场	2
1.3 牛顿位	3
1.4 牛顿位与场的连续性	5
1.5 距离倒数的拉普拉斯算子	6
1.6 泊松方程	9
1.7 薄壳或单层的位	10
1.8 偶层位	13
2. 积分公式与调和函数	15
2.1 散度定理	15
2.2 格林定理	17
2.3 高斯定理	17
2.4 调和函数的基本定理	18
3. 应用地球物理中调和函数所满足方程的意义	20
3.1 无限调和域	20
3.2 应用地球物理中的延拓公式	22
4. 应用地球物理中的磁学	25
4.1 磁位与磁化强度	25
4.2 磁密度和磁感应	27
4.3 应用地球物理中的磁位、磁场与磁化强度	29
II. 应用地球物理中的函数变换	32
5. 拉普拉斯方程的解	32

5.1 直角坐标系中的分离变量法	32
5.2 当 $s > 0$ 时的狄义赫利问题	34
5.3 二重傅里叶级数可以作为狄义赫利问题的解吗?	36
5.4 柱坐标系中的分离变量法	38
5.5 向下延拓的可能性	39
6. 具有有界谱的函数	42
6.1 具有一维有界谱的函数的一般表达式	42
6.2 褶积, 标量积与取样函数	45
6.3 收敛性	48
6.4 定义区间是有限的情况	51
6.5 具有有界谱的两个变量的函数	53
7. 滤波与函数变换	55
7.1 应用地球物理中变换的分解	55
7.2 滤波特性	57
7.3 滤波系数	59
7.4 滤波举例	60
7.5 变换的合成(乘积)	61
8. 调和函数的延拓	62
8.1 系数的计算	62
8.2 延拓系数的例子	66
8.3 向下延拓的系数——误差讨论	68
9. 将磁异常化磁极	74
9.1 原理	74
9.2 化磁极的系数表达式	78
9.3 化磁极的系数的实际计算方法	79
9.4 化磁极的垂向导数	83
9.5 限制与举例	84
10. 调和函数的导数	90
10.1 垂向导数的用途	90
10.2 垂向导数和正方形网格	92
10.3 一阶导数作为二阶导数的函数	94
10.4 三角形网格的使用	95

10.5 位的水平导数与垂向偏离.....	99
10.6 磁场分量的计算.....	102
10.7 垂向导数的数值举例.....	105
11. 建立规则网格	106
11.1 人工图解法.....	106
11.2 拉波尔特法.....	107
11.3 用取样函数进行规则化.....	109
11.4 内插的数值举例.....	113
附录A 傅里叶变换附注.....	116
A.1 傅里叶变换及其逆变换.....	116
A.2 广义函数的一些性质.....	118
A.3 多项式的傅里叶变换.....	119
A.4 褶积	120
附录B 柱状体.....	121
B.1 对数位	121
B.2 平面的积分式.....	124
B.3 平面的调和函数.....	125
B.4 两个变量的拉普拉斯方程的解.....	127
B.5 磁化体.....	129
附录C 简单几何形体引起的场.....	131
C.1 球体的引力.....	131
C.2 磁化球体引起的磁位与磁场.....	132
C.3 圆柱体的引力.....	133
C.4 磁化圆柱体的磁场	134
C.5 磁性薄层的影响.....	135
C.6 某些“垂直”标准曲线的制作.....	135
附录D 计算机程序.....	140
附录E 参考文献与历史注记	153

I. 场与位的物理学

1. 场与位

1.1 由位导出的场

考虑在空间一个区域中每一点 M 的矢量场 $\mathbf{H}(M)$ ，它由作为坐标函数的三个分量 $X(x, y, z)$ ， $Y(x, y, z)$ ， $Z(x, y, z)$ 定义。矢量场的基本参量是矢量 $\mathbf{H}$ 的线积分，它由下式表达：

$$T = \int_{\Gamma} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} \quad (1.1)$$

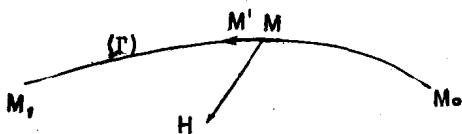


图 1 矢量的线积分

这个线积分是沿 M_0 与 M_1 两点间的曲线弧 Γ (图 1) 取的。

在曲线 Γ 上沿 M_0 到 M_1 方向的弧元以 $d\mathbf{s} = \mathbf{MM}'$ 来表示。这个基本矢量的分量为 dx ， dy ， dz 。因此，将打算作积分的标量积写成展开形式

$$\mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = X dx + Y dy + Z dz \quad (1.2)$$

我们指出，如果矢量 $\mathbf{H}$ 是力，则 T 表示作用点 M 沿路径 Γ 从 M_0 到 M_1 时，力所做的功。但我们知道，通常功与路径无关，只与起点 M_0 和终点 M_1 有关。由此可见，展开式 (1.2) 必定是恰当微分，即全微分 dU ，而 $U(x, y, z)$ 或 $U(M)$ 为标量函数。如果是这样的话，我们便求得

$$\int_{M_0}^{M_1} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = \int_{M_0}^{M_1} dU = U(M_1) - U(M_0)$$

这时只要 $U(M)$ 是单值函数， Γ 可取 M_0 与 M_1 之间的任何路径。

如果分量 X, Y, Z 是 U 的偏导数

$$X = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad Z = \frac{\partial U}{\partial z}$$

则 (1.2) 式便是恰当微分, 即全微分。

换句话说, 如果场 $\mathbf{H}$ 是 U 的梯度,

$$\mathbf{H} = \text{grad } U \quad (1.3)$$

就满足这个条件。这时, 我们称之为由位导出的场。

应该指出, 物理学家所称的位 V , 在我们这里就是变了符号的函数 U 。因此写成

$$\mathbf{H} = -\text{grad } V \quad (1.4)$$

这个习惯主要在于方便。在这本书里我们把位称作 U 或 V 。在重力测量中以 U 表示万有引力的位, 重力场则由 (1.3) 式定义, 磁位将以 V 来表示, 从而 (1.4) 式成立。采用这种区别, 只是为了与一般用法一致, 使我们的公式与其它文献中看到的公式一样。

1.2 场^①

牛顿和库伦分别在计算万有引力和磁学、静电学的场强时形成了距离反平方定律。这些定律确言, 点 P 处的质量元 dm 在其周围引起以存在着场为特征的空间特殊状态。如果我们在另一点 M 处置一质量 m' , 便可证明有一个力 $m' d\mathbf{H}$ 作用在点 M 上。它是向心力, 即力的方向沿着 MP 线。矢量 $d\mathbf{H}$ 是由质量元 dm 引起的场元, 可将它表示为

$$d\mathbf{H} = f \frac{dm}{MP^2} \cdot \frac{\mathbf{MP}}{MP} \quad (1.5)$$

最后一个因子 $\mathbf{MP}/\overline{MP}$ 是单位矢量, 它确定从点 M 到点 P 的方向。因子 $dm/\overline{MP^2}$ 表示: 场的绝对值 (即场强的大小——译者注) 与质量成正比, 与距离 $\overline{MP}$ 的平方成反比。而 f 是常数, 其值取决于单位制, 而且当然取决于质量与场的性质。如果距离以厘米度

① 本段开头原文用超距离概念 (force at a distance) 论述, 其实, 超距离是不存在的, 而场本质上是物质——译者注。

量，质量用克表示，则 f 就是万有引力常数，其值为

$$f = \frac{200}{3} 10^{-9} \text{CGS 单位}$$

如果 dm 是磁化物质元，其磁力以 CGS 电磁单位表示，则常数 $f = -1$ 。但是实际上孤立的磁质量并不存在，它们总是以 $+dm$ 与 $-dm$ 成对地出现，形成偶极子或磁偶，所以我们将单独研究磁的情况。现在暂不管引起效应的物质的物理性质，先来研究 (1.5) 式的结果。我们令

$$f dm = \sigma(P) dv \quad (1.6)$$

从而消除 (1.5) 式中的常数 f 。这里 $\sigma(P)$ 为密度， dv 是在 P 点的体积元。将矢量 $\mathbf{MP}$ 表示为 $\mathbf{r} = \mathbf{MP}$ ，利用这些记号就可将 (1.5) 式变为

$$d\mathbf{H} = \sigma(P) \frac{\mathbf{r}}{r^3} dv \quad (1.7)$$

这对于说明我们选择矢量 $\mathbf{r}$ 的方向是有用的。直到现在，我们还只考虑了单个的物质元。实际上物探人员总是研究一个或几个质量体或磁性体。因此， P 不管在物体内部还是在物体表面上，都是起着变量或动点的作用。一般把点 M （要在这个点上计算场）称作“定点”，所以很自然地取定点 M 为参考点来确定位移矢量 $\mathbf{r}$ 。

以后我们都将用 x, y, z 表示 M 点的直角坐标，而用 ξ, η, ζ 表示 P 点的直角坐标，但到现在尚未定参考系的方向。因此矢量 $\mathbf{r}$ 的分量是 $\xi - x, \eta - y, \zeta - z$ ；而距离 $\overline{MP}$ 的大小为

$$r = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2} \quad (1.8)$$

1.3 牛顿位

由 (1.8) 定义的 r 对 x, y, z 的偏导数，亦即 r 的梯度的分量为

$$\frac{\partial r}{\partial x} = -\frac{(\xi - x)}{r}$$

$$\frac{\partial r}{\partial y} = -\frac{(\eta - y)}{r}$$

$$\frac{\partial r}{\partial z} = -\frac{(z-z)}{r}$$

因为以上各式的分子都是矢量 $\mathbf{r}$ 的分量，所以

$$\mathbf{grad} \, r = -\frac{\mathbf{r}}{r}$$

现在来计算 r 的倒数的梯度。我们求得

$$\mathbf{grad} \frac{1}{r} = -\frac{1}{r^2} \mathbf{grad} \, r = \frac{\mathbf{r}}{r^3} \quad (1.9)$$

我们看到，由于是在点 $M(x, y, z)$ 上取导数以及 σ 与变量 x, y, z 无关，故可将 (1.7) 式写成

$$dH = \sigma(P) \mathbf{grad} \left(\frac{1}{r} \right) dv$$

或

$$dH = \mathbf{grad} \left[\sigma(P) \frac{dv}{r} \right]$$

这样一来，只要令 $dU = \frac{\sigma(P)}{r} dv$ ，就可证明 dH 是由位导出的，从而 (1.3) 式适用。对展布在密度为 σ 的整个物体进行积分，便得

$$U(M) = \iiint \sigma(P) \frac{dv}{r} \quad (1.10)$$

从而场的表达式为

$$\mathbf{H} = \mathbf{grad} \, U = \iiint \sigma(P) \frac{\mathbf{r}}{r^3} dv \quad (1.11)$$

如果将此式乘以万有引力常数 f ●，就得到重力场表达式。为了得到场沿一个给定单位矢量 λ 方向的分量的表达式，需沿这个方向取位的导数（图 2）。这种计算和取梯度与 λ 的标量积一样。它给出

● 如果 $\sigma(P)$ 是按 (1.6) 式定义的，则不必再乘以常数 f 。如果 $\sigma(P)$ 指通常的 $\frac{dm}{dv}$ ，则在重力场情况下需乘以 f 。以后凡是提到重力场的情况应乘以 f 时， σ 都是指 $\frac{dm}{dv}$ ——译者注。

$$H_{\lambda}(M) = \iiint \sigma(P) \frac{\lambda \mathbf{r}}{r^3} dv \quad (1.12)$$

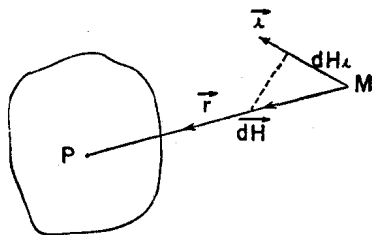


图 2 沿已知单位矢量 λ 方向的场分量

令 φ 为矢量 λ 与 $\mathbf{r}$ 之间的夹角, 则 $\lambda \mathbf{r} = r \cos \varphi$, 从而得到另一表达式

$$H_{\lambda}(M) = \iiint \sigma(P) \frac{\cos \varphi}{r^2} dv \quad (1.13)$$

1.4 牛顿位与场的连续性

为了区别于其它位, 我们称函数 U 为牛顿位。它与场 H_{λ} 一样, 也是在整个空间都是连续的, 这无论对物质之外或对物质所占有的空间域内都正确。因此, 只要证明场 $\mathbf{H}$ 具有这个性质就够了。

在 M 点的邻近点 M_0 处, 我们将有

$$H_{\lambda}(M_0) = \iiint \sigma(P) \frac{\mathbf{r}_0 \lambda}{r_0^3} dv$$

而 $\mathbf{r}_0 = \mathbf{M}_0 \mathbf{P}$ 。连续性要求, 当距离 $\overline{MM_0}$ 趋近于零时, 差的绝对值

$$\left| H_{\lambda}(M) - H_{\lambda}(M_0) \right| = \left| \iiint \sigma \left(\frac{\mathbf{r} \lambda}{r^3} - \frac{\mathbf{r}_0 \lambda}{r_0^3} \right) dv \right|$$

趋于零。现在我们令 $MM_0 \leq \eta$ (图3), 而 η 为任意小的正数。为了孤立 $\mathbf{r}$ 与 $\mathbf{r}_0$ 都等于零的点, 首先对展布在中心在 M 、半径为 η 的球进行积分, 再单独地对展布在这

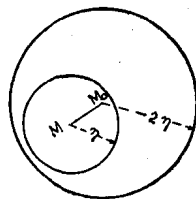


图 3 球心分别在 M 与 M_0 以及半径分别为 η 和 2η 的球