高等数学
自测、辨析与指导

阎岘峰　李建平　朱煜民　编著

国防科技大学出版社

高等数学自测、辨析与指导

阎岘峰
李建平　　编著
朱煜民

国防科技大学出版社

内 容 简 介

本书旨在帮助学生在学习高等数学过程中能自我测试、纠错和提高。

全书共分三个部分。第一部分为单元测试，采用讲评方式，着重错误分析，增强辨析能力；第二部分为期中、期末及学年综合测试；第三部分为专题讲座，示范启发学生综合运用知识分析问题和解决问题。

本书可作为学习高等数学或报考研究生读者的参考用书，也可供从事高等数学教学的教师参考。

高等数学自测、辨析与指导

编著 [illegible] 李建平 朱煜民
责任编辑 陈文宽 谭 红
责任校对 梁连城

国防科技大学出版社出版发行
（长沙市砚瓦池正街 47 号）
邮编 410073 电话（0731）4555681
湖南省新华书店经销
国防科技大学印刷厂印装
*
开本：850×1168 1/32 印张：12 字数：301 千
1995 年 10 月第 1 版 1996 年 8 月第 2 次印刷 印数 1001-4000 册

ISBN 7-81024-340-3
O·43 定价：12.00 元

序

数学在高等教育中占据着非常重要的位置。高等数学不只是作为工具为各学科提供各种计算的基本公式与方法，更重要的是高等数学课程中贯穿的高度抽象（舍末求本）的方法。严密的逻辑思维与推理是任何一门学科都需要用到的人类智慧，因此，数学学习中解题的目的，绝不只是为了给出答案，而是通过它启迪与培养人们的逻辑思维和科学研究方法。

《高等数学自测、辨析与指导》一书，正是基于这种考虑，总结了多年来的教学经验，归纳了大学生们在学习中一些易犯的概念与逻辑的错误，把高等数学中较难辨别的概念予以辨析，指导同学们掌握正确的思考方法，并以多年累积的试题为基准，测试同学们对高等数学掌握的情况。本书的许多部分有其独到之处，如专题讲座的第二讲中“一般策略——想联系”及其对几个例题的剖析，对培养大学生科学的思维方法是很有好处的。又如关于辅助函数的构造，常常是同学们很感困惑的难点，作者也给出了许多启示。所以，这是一本同学们学习高等数学的好参考书。

爱因斯坦说：“在物理学中通向更深入的基本知识的道路是同最精密的数学方法联系着的。”并多次赞美黎曼创立非欧几何给予他的巨大帮助，他说黎曼“用纯粹数学推理的方法，得出了关于几何学和物理学不可分割的思想，70 年后，这个思想实际上体现在那个把几何学同引力论融合成一个整体的广义相对论中。”

要想在今后的科学研究中大有作为的人们，还敢忽视数学吗？

金治明

1994 年 11 月于长沙

前　言

多年的教学实践，深感大学一年级学生在高等数学的学习中，对一些基本概念理解不深且易混淆。对所做作业正确与否没有把握，甚至知道错了，也找不出原因。鉴于目前指导这些方面的书籍缺乏，我们根据工科各专业高等数学教学的基本要求，积多年的教学经验编写了这本书。

本书的编写特点如下：

1. 将高等数学内容分为八个单元，其顺序与教学一致。每个单元都精心设置了具有典型性、代表性且针对性比较强的试题。希望读者在使用本书时，先独立地将单元测试题目做一遍，而后再看单元测试讲评。

2. 每个单元测试题都配有讲评。讲评中的错解，很可能就是初学者自己的解法。因为这些错解是在学生的作业、试卷中发现并归纳出来的，具有一定的代表性。讲评中指出了错误之所在，剖析了产生错误的原因，进一步复习了有关的概念和理论。

3. 综合测试和专题讨论，可提高初学者综合运用知识来分析问题和解决问题的能力。综合测试题相当于每学期的期中测验和期末考试，专题讨论是全书知识的综合应用，着重在开阔思路，提高解题能力。

读了本书初稿后的学生感慨地说："该书针对我们易犯的错误，从基本概念入手，层层剖析，逐步展开，与相似、相关知识点进行比较、辨析，澄清一些比较模糊的概念。就像一位良师，循循善诱，帮助我们认识错误，更重要的是挖掘出错误的根源，避免再犯同样的错误，且在解题过程中达到触类旁通的效果"。——

这也正是作者编写本书的初衷。

本书的出版，得到了国防科技大学教务部、系统工程与应用数学系、基础数学教研室领导的关心与支持，金治明教授、赵殿阳副教授全面仔细地审阅了本书，提出了不少非常中肯、十分有益的意见，裘兆泰副教授阅读了本书部分内容，材料工程与应用化学系、机械电子工程与仪器系的93级部分同学以极大的兴趣和热情详读了本书的初稿，并提出了宝贵的意见，在此一并表示衷心的感谢。

因我们水平有限，书中错误之处在所难免，敬请广大读者批评指正。

编　者

1994年8月

目　录

第一部分　单元测试

试卷一　函数、极限与连续

一、选择题

1. 函数 $f(x)=xe^{\cos x}(-\infty<x<+\infty)$是

(A)奇函数。(B)有界函数。(C)单调函数。(D)周期函数。

2. 设数列的通项 $x_n=\begin{cases}\dfrac{1}{n},若 n 为奇数,\\ n,若 n 为偶数,\end{cases}$

则当 $n\to+\infty$时,x_n 是

(A)无穷小量。(B)无穷大量。(C)有界量。(D)无界量。

3. 当 $x\to0$ 时,$\mathrm{tg}x-\sin x$ 是 x^3 的

(A)低阶无穷小量。　　(B)高阶无穷小量。

(C)等价无穷小量。　　(D)同阶无穷小量。

4. 已知 $f(x)$与 $g(x)$在$(-\infty,+\infty)$上连续，且 $f(x)<g(x)$,则必有

(A)$f(-x)>g(-x)$.　　(B)$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)<\lim\limits_{x\to\infty}g(x)$.

(C)$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)<\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$.　　(D)$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)\leqslant\lim\limits_{x\to\infty}g(x)$.

5. 当 $x\to1$ 时,函数 $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}$的极限

(A)为∞.(B)不存在。(C)等于 2.(D)等于 0.

二、填空题

1. 已知 $f(x)=e^{x^2}$，$f[\varphi(x)]=1-x$，且 $\varphi(x)\geqslant 0$，则 $\varphi(x)=$__________，其定义域为__________.

2. 已知 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+bx+c}{x-1}=3$，则常数 $b=$____，$c=$____.

3. 已知 $f(x)=\begin{cases}\cos\dfrac{\pi}{2}x, & |x|\leqslant 1,\\ |x-1|, & |x|>1,\end{cases}$ 则 $x=$____为 $f(x)$ 的间断点，且为第__类间断点。

4. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^{\sin x}+\beta}{x}, & x>0\\ \alpha, & x\leqslant 0\end{cases}$ 连续，则常数 $\alpha=$_____，$\beta=$_____.

5. 当 $x\to 0^+$ 时，$\sqrt{x^2+\sin\sqrt{x}}$ 是 x 的__阶无穷小。

三、计算下列极限

1. $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\dfrac{1}{n\cdot(n+1)}\right]$

2. $\lim\limits_{x\to 0^+}(\cos\sqrt{x})^{\frac{1}{x}}$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\sin 2x}-e^{2\sin x}}{x\cdot\ln(1+x^2)}$

4. $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x})$

5. $\lim\limits_{n\to+\infty}2^n\sin\dfrac{x}{2^n}$

四、已知 $f(x)=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{x^n-x^{-n}}{x^n+x^{-n}}$，讨论 $f(x)$ 的连续性，并作出 $f(x)$ 的图形。

五、已知 $f(x)$ 在 $(a,b]$ 上连续，且 $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)$ 存在。证明 $f(x)$ 在 $(a,b]$ 上有界。

六、设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，且 $f(0)=f(1)$，试证对任何自然数 n，必存在一点 $c\in[0,1-\frac{1}{n}]$，使 $f(c)=f(c+\frac{1}{n})$.

七、设 $a_1>0, a_{n+1}=\frac{1}{2}(a_n+\frac{2}{a_n})(n=1,2,\cdots)$。证明 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n$ 存在，并求其极限值。

试卷二　一元函数微分学

一、选择题

1. 函数 $y=x^x(x>0)$ 的导数是

(A) $y'=x\cdot x^{x-1}$.　　(B) $y'=x^x\cdot\ln x$.

(C) $y'=x^x\cdot(\ln x+1)$.　　(D)以上结论都不对。

2. 设 $f(x)$ 在 $x=a$ 的某邻域内有定义，则 $f(x)$ 在 $x=a$ 处可导的一个充分条件是

(A) $\lim\limits_{h\to+\infty}h\cdot\left[f(a+\frac{1}{h})-f(a)\right]$存在.

(B) $\lim\limits_{h\to0}\frac{f(a+2h)-f(a+h)}{h}$存在.

(C) $\lim\limits_{h\to0}\frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}$存在.

(D) $\lim\limits_{h\to0}\frac{f(a)-f(a-h)}{h}$存在.

3. 若 $3a^2-5b<0$，则方程 $x^5+2ax^3+3bx+4c=0$

(A)无实根.　　(B)有唯一实根.

(C)有三个不同实根.　　(D)有五个不同实根.

4. 设 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f'(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f'(x)=a$，则

(A) $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处必可导且 $f'(x_0)=a$.

(B) $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处必连续但未必可导.

(C) $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处必有极限但未必连续.

(D)以上结论都不对.

5. 设函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 (a,b) 上可导，考虑下列断语

Ⅰ. 若 $f(x)>g(x)$，则 $f'(x)>g'(x)$.

Ⅱ. 若 $f'(x)>g'(x)$，则 $f(x)>g(x)$.

则

(A) Ⅰ、Ⅱ都正确. (B) Ⅰ、Ⅱ都不正确.

(C) Ⅰ正确但Ⅱ不正确. (D) Ⅱ正确但Ⅰ不正确.

二、填空题

1. 设 $f(x)$ 具有二阶导数，$y=f(\frac{1}{x})$，则 $\frac{d^2y}{dx^2}=$ ________.

2. 已知 $y=\operatorname{arctg}\frac{1-x}{1+x}$，则 $dy=$ ________.

3. 设 $f(x)=x^4\ln(2+x)$，则 $f^{(8)}(0)=$ ________.

4. 悬链线 $y=a\operatorname{ch}\frac{x}{a}(a>0)$ 在点 $(0,a)$ 处的曲率 $K=$ ____，曲率半径 $R=$ ________.

5. 与直线 $x+2y+3=0$ 垂直且与曲线 $y=x\ln x$ 相切的直线方程为________.

三、计算下列各题

1. 已知 $y=\arcsin e^{-\sqrt{x}}$，求 $\frac{dy}{dx}$.

2. 已知 $\begin{cases}x=\operatorname{arctg}\sqrt{t},\\ y=\ln(1+t),\end{cases}$ 求 $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=0}$ 及 $\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=0}$

3. 求 $f(x)=e^x\sin x$ 的 n 阶导数.

4. 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sin\frac{\pi}{x}+\cos\frac{1}{x}\right)^x$.

5. 设 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处二阶可导，且在 $x=x_0$ 处取极值，求

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+2h)-f(x_0-h)}{h^2}$$

四、设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}, & x>0,\\ x^2+\dfrac{1}{2}, & x\leqslant 0,\end{cases}$ 问

1. $f(x)$ 在 $x=0$ 处是否连续?
2. $f(x)$ 在 $x=0$ 处是否可导?

五、作函数 $y=\dfrac{6}{x^2-2x+4}$ 的图形.

六、设不恒为常数的函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续,在开区间 (a,b) 内可导,且 $f(a)=f(b)$. 证明在 (a,b) 内至少有一点 ξ,使 $f'(\xi)>0$.

七、设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续,在 $(0,1)$ 内可导二次,且 $f''(x)<0$,又 $f(0)=0$. 证明对于 $[0,1]$ 中的任何一点 a,都有

$$f(a)\leqslant 2f(\frac{a}{2}).$$

试卷三　一元函数积分学

一、选择题

1. 设 $f(x)$ 是以 T 为周期的连续函数，则 $I=\int_{l}^{l-T}f(x)\mathrm{d}x$ 的值

(A) 依赖于 l，T.　　(B) 依赖于 l，T 和 x.

(C) 依赖于 T，x 不依赖于 l.　(D) 依赖于 T 不依赖于 l.

2. 已知 $f(x)=\begin{cases}x^2, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 2-x, & 1<x\leqslant 2,\end{cases}$ $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$，$0\leqslant x\leqslant 2$，则

(A) $F(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3}{3}, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ \dfrac{1}{3}+2x-\dfrac{x^2}{2}, & 1<x\leqslant 2.\end{cases}$

(B) $F(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3}{3}, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ -\dfrac{7}{6}+2x-\dfrac{x^2}{2}, & 1<x\leqslant 2.\end{cases}$

(C) $F(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3}{3}, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ \dfrac{x^3}{3}+2x-\dfrac{x^2}{2}, & 1<x\leqslant 2.\end{cases}$

(D) $F(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3}{3}, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 2x-\dfrac{x^2}{2}, & 1<x\leqslant 2.\end{cases}$

3. $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\cdots+\dfrac{1}{n+n}\right]$ 的值为