程侃著

寿命分布类与可靠性数学理论

科学出版社

中国科学院科学出版基金资助出版　国家自然科学基金委员会资助出版

寿命分布类与可靠性数学理论

程　侃著

科学出版社

1999

内 容 简 介

本书从定量分析的角度出发，讨论可靠性理论研究中的一些活跃的问题．如寿命分布类及其基本性质，着重讨论基于对老化、磨损等随机现象不同角度的描述而引进的各种寿命分布类，各个类的特征刻划．研究了仅知一阶矩或一、二阶矩时在某个寿命分布类中的可靠度函数的上下界，以及考察了寿命分布与指数分布的贴近性．本书还对可靠性的一些概率模型进行了讨论．对高可靠部件组成的系统，讨论了其首次失效时间的渐近及近似公式．

本书可供从事可靠性理论、应用概率、随机运筹学和系统工程等科研人员阅读，也可以作为上述有关学科的研究生教材．

图书在版编目(CIP)数据

寿命分布类与可靠性数学理论/程侃著．-北京：科学出版社，1999

ISBN 7-03-007082-8

Ⅰ．寿… Ⅱ．程… Ⅲ．①寿命分布 ②可靠性-数学理论 Ⅳ．O211．1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(99)第 32357 号

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号
邮政编码：100717

中国科学院印刷厂 印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1999年9月第一版 开本：850×1168 1/32
1999年9月第一次印刷 印张：18 3/8
印数：1—1 800 字数：483 000

定价：39.00元

（如有印装质量问题，我社负责调换〈科印〉）

前　言

可靠性与人们的工作和生活休戚相关. 因为产品 (系统) 故障 (失效) 造成的后果随时都能感觉到. 有的也许只是造成生活上的不便, 有的可能带来经济上的损失. 但是, 有的系统的失效会对社会造成不可挽回的损失, 如大型客机的失事、核电站放射性物质的泄漏等. 因此, 如何有效地提高与改善系统的可靠性一直是设计、制造、管理及应用部门面临的重大问题.

可靠性问题从根本上来讲是一个工程问题, 其目标是制造出完美的产品. 这是一个永无止境的追求过程. 因此, 进行细微的失效机理分析, 采用新的设计方案、新的原材料及加工工艺等等是提高可靠性的根本途径. 但是, 作为一种补充手段, 在理解失效规律时基于概率论、数理统计及运筹学上的可靠性定量方法是不可缺少的工具. 本书试图从定量分析这个角度出发, 讨论可靠性理论研究中活跃的一些问题. 例如, 寿命分布类及其基本性质的研究. 着重研究基于对老化、磨损等随机现象不同角度的描述而引进的各种寿命分布类, 讨论了各个类的特征刻画, 研究了仅知一阶矩或一、二阶矩时, 在某个寿命分布类中的可靠度函数的上、下界, 以及考察了寿命分布与指数分布的贴近性. 其次, 本书对可靠性的一些概率模型进行了讨论. 特别是对 Markov 型可修系统进行了较为详细的论述. 最后, 对高可靠部件组成的系统, 讨论了其首次失效时间的渐近及近似公式, 其用意是为实际工作者提供可以应用的公式.

作者感谢国家自然科学基金多年来的支持, 亚太运筹中心 (Asian-Pacific Operations Research Center, APORC) 提供的工作条件, 以及中国科学院科学出版基金和国家自然科学基金委员会优秀研究成果专著出版基金提供的资助. 没有这些条件, 恐怕本书很难面世.

在本书的写作过程中作者得到越民义教授、徐光辉教授等的支持与鼓励，在此表示感谢. 同时感谢王文义、胡逸民、江晓岳、胡兴卫、李刚、罗永涛等同志，没有他们的协助，本书的完稿也是不可能的.

作者对已故的何宗福教授深表怀念，书中的不少成果是与他的工作分不开的.

最后，由于作者水平所限，书中难免有错误和不足的地方，欢迎读者批评指正.

著　　者

中国科学院应用数学研究所

亚太运筹中心

1998.3.

目　录

前　言 i

第一章　引论 1

§1. 可靠性数学理论与寿命分布类研究 1

1.1 可靠性数学理论概述 1

1.2 寿命分布类研究 3

§2. 可靠性定量指标 5

2.1 不可修系统 6

2.2 可修系统 13

§3. 各章内容简介 16

第二章　寿命及有关的分布 19

§1. 指数分布 19

1.1 定义及简单性质 19

1.2 与 Poisson 过程的关系 21

1.3 推广 22

1.4 指数分布被广泛应用的原因 24

§2. Weibull 分布与极值分布 24

2.1 Weibull 分布 25

2.2 极值分布 27

§3. Gamma 分布 29

§4. 对数正态与截尾正态分布 31

4.1 对数正态分布 32

4.2 截尾正态分布 35

§5. 离散寿命分布 38

5.1 0-1 分布 39

5.2 二项分布 39

5.3 几何分布 40
5.4 负二项分布 41
5.5 离散 Weibull 分布 42
5.6 Poisson 分布 42

第三章 寿命分布类 **44**

§1. 定义及基本性质 44
1.1 随机变量之间的比较 45
1.2 IFR 和 DFR 类 46
1.3 IFRA 和 DFRA 类 52
1.4 NBU 和 NWU 类 57
1.5 DMRL 和 IMRL 类 60
1.6 NBUE 和 NWUE 类 64
1.7 HNBUE 和 HNWUE 类及推广 66
1.8 L 和 $\overline{\mathrm{L}}$ 类 77
§2. 寿命类的封闭性质 78
2.1 预备知识 79
2.2 卷积下的封闭性 82
2.3 混合下的封闭性 88
2.4 组成关联系统时的封闭性 93
§3. 离散寿命分布类 104
§4. 寿命分布类研究的回顾 107

第四章 寿命分布类的特征刻画 **111**

§1. 利用 LS 变换的特征刻画 111
1.1 问题 111
1.2 全正性 112
1.3 利用 LS 变换的寿命类特征刻画 113
§2. 利用 TTT 变换的特征刻画 121
2.1 TTT 变换的概念 121
2.2 常见寿命分布的 TTT 变换 124

2.3 利用 TTT 变换的寿命类特征刻画 128

第五章　已知均值时的可靠度界 **132**

§1. 问题 132

§2. 经典结果 135

§3. 已知均值时寿命类中的可靠度界 140

3.1 B 类中的下界 140

3.2 B 类中的上界 147

3.3 W 类中的下界 157

3.4 W 类中的上界 158

§4. k-HNBUE 及 k-HNWUE 类的情形 163

4.1 B_k 类中的下界 164

4.2 B_k 类中的上界 171

4.3 W_k 类中的上界 172

第六章　已知前二阶矩时的可靠度界 **185**

§1. 记号与准备工作 185

§2. IFR 类的可靠度界 188

2.1 可靠度上界 188

2.2 可靠度下界 197

§3. IFRA 类的可靠度界 202

3.1 可靠度下界 202

3.2 可靠度上界 209

3.3 上下界的计算步骤 212

§4. NBUE 类的可靠度界 215

4.1 可靠度上界 215

4.2 可靠度下界 222

§5. HNBUE 类的可靠度界 233

5.1 可靠度下界 234

5.2 可靠度上界 241

§6. DFR 类的可靠度界 249

§7. DFRA 类的可靠度界 253
7.1 下界的情形 253
7.2 上界的情形 257
§8. IMRL 类的可靠度界 261
8.1 可靠度下界 262
8.2 可靠度上界 264
§9. NWUE 类的可靠度界 266
9.1 可靠度下界 267
9.2 可靠度上界 269
§10. HNWUE 类的可靠度界 270
10.1 下界的情形 270
10.2 上界的情形 273
§11. 关于可靠度界研究的回顾 277
第七章 寿命分布间贴近性研究 279
§1. 引 280
1.1 问题 280
1.2 预备知识 282
§2. NBUE 的情形 285
§3. DMRL 的情形 288
§4. IFR 的情形 292
4.1 初步结果 292
4.2 紧的界 297
4.3 进一步的探讨 303
4.4 应用 314
§5. IFRA 的情形 317
5.1 一般性讨论 317
5.2 $K_A(\rho)$ 表达式的进一步讨论 321
§6. HNBUE 的情形 327
§7. NWUE 的情形 333
§8. IMRL 及 DFR 类的情形 336

§9. DFRA 的情形 338
9.1 θ 的求法 338
9.2 另一半的界 344
§10. HNWUE 的情形 348
§11. 离散寿命分布与几何分布的贴近性 351
11.1 问题与准备知识 351
11.2 dNBUE 的情形 358
11.3 dDMRL 的情形 361
11.4 dIMRL 及 dDFR 的情形 367
11.5 dNWUE 的情形 370
第八章 可靠性中的随机模型 373
§1. 典型的不可修系统分析 373
1.1 串联及并联系统 373
1.2 k-out-of-n(F) 系统 381
1.3 串并联及并串联系统 382
1.4 冷备系统 383
1.5 热备系统 387
1.6 k-out-of-n(F)C 系统 390
1.7 相依部件组成的系统 403
§2. Markov 型可修系统 405
2.1 有限状态 Markov 过程的回顾 405
2.2 生灭过程 408
2.3 一般 Markov 型可修模型 411
2.4 Markov 型可修系统分析的一般步骤 424
§3. Markov 型可修系统的例子 424
3.1 两部件并联模型 424
3.2 r 个修理工的 k-out-of-n(F) 系统 431
§4. 用更新过程描述的可修系统 435
4.1 更新过程简介 435
4.2 单部件可修系统 441

4.3 两部件冷备系统 454
4.4 两部件冷备系统的进一步研究 461
§5. Markov 更新型可修模型 475
5.1 Markov 更新过程简介 475
5.2 Markov 更新过程描述的一般可修系统 481

第九章 可靠性模型中的近似与渐近方法 494

§1. 分布函数的近似 494
1.1 gamma 函数近似法 496
1.2 Gram-Charlier 近似 499
1.3 Edgeworth 近似 502
1.4 鞍点近似 503
1.5 数值例 507
§2. 关联系统首次失效时间研究 511
2.1 极限定理 511
2.2 可靠度界 515
§3. 快修下二部件可修系统 518
§4. 更新过程框架下的极限定理 523
§5. Markov 更新过程中的极限定理 539
5.1 Khinchin 收敛 540
5.2 Markov 更新过程的一个极限定理 545
5.3 应用 553

参考文献 561

索　　引 573

第一章　引　论

这一章将对本书研究的问题作一简要的概述. 我们先在 §1 中对可靠性数学理论作概要的评述, 然后简单叙述寿命分布类研究的问题. §2 给出描述可靠性的各种定量指标, 为本书后面各章做准备. §3 将对各章的内容作简单的介绍.

§1. 可靠性数学理论与寿命分布类研究

1.1 可靠性数学理论概述

随着科学技术的进步, 人类开发了许多新的大型复杂设备和系统. 例如计算机网络系统、通讯系统、自动生产线系统、银行服务系统、核电站、大型客机以及军事系统等等. 这些系统有一些显著的特点:

1) 系统的结构复杂, 但功能强大.

2) 系统需要在复杂的硬件及软件支持下才能完成其预定的功能, 有时还需要人的参与. 因此, 系统是复杂的人 — 硬件 — 软件系统.

3) 系统的研制开发周期长, 费用巨大.

4) 系统一旦发生故障, 将会对社会、经济、环境等方面造成不同程度的损害. 有的可能只是经济上的损失, 有的可能造成人员伤亡. 更有甚者, 如核电站放射性物质的泄漏等会对社会及环境造成巨大的损害, 很难在短期内消除.

因此, 对系统效能中最重要的指标之一 —— 系统可靠性就应予以严肃认真的考虑. 事实上, 可靠性也正在越来越受到人们的重视.

高可靠的产品 (系统) 是设计、制造与良好的管理共同努力的结果. 基于可靠性考虑的精良的设计可以大大改善系统的可靠

性. 选择合适的原材料, 进行精细的加工制造与装配, 以及在整个生产过程中贯彻全面质量管理, 这些都能大大减少产品质量的波动, 保证产品的高可靠性. 此外, 在系统的使用中, 创造一个良好稳定的工作环境, 对部件等进行经常性的检查、更换或维修, 以及其它完善的管理措施也能大大地改善系统的可靠性与有效性.

可靠性问题本质上是一个工程问题. 人类生产的最终目的是要在极大程度上满足各种不同的需求. 因此, 我们的目标是生产出完美的产品, 这是一个不断进取的目标. 在提高与改善系统可靠性的进程中, 可从不同角度进行研究. 通过元器件失效模式的分析与研究, 利用物理、化学等规律找出失效机理并寻求其解决办法, 再把这些信息反馈到工程设计与制造中去, 循环往复, 这是主要的一种研究方法. 但是, 对可靠性问题的研究中, 在分析与理解失效机制, 寻找劣化与磨损等随机现象与失效之间的量化关系, 进行失效数据的分析等方面, 定量方法是不可缺少的重要工具. 定量方法提供了分析可靠性问题的手段, 帮助人们洞察失效现象背后的规律, 最终也达到改善产品可靠性的目的. 在这种认识过程中, 数学、统计学及运筹学等学科为我们提供了各种有力的工具.

产品的老化、磨损和失效等都是随机的现象, 概率模型可以用来描述这些现象. 基于系统的结构, 以及部件寿命规律 (通常是随机变量) 的假定, 我们可以用数学模型来定量地描述和分析系统的可靠性性状. 各种不同的定量指标, 如可靠度、可用度等从不同的侧面反映了系统的效能与可靠性. 这些指标可以用来评定与比较不同的系统设计.

在一个新系统的开发试验阶段, 或者从使用的现场, 我们可以收集到失效数据. 利用统计方法对这些数据进行处理可以获得许多有用的信息, 例如可靠度、系统平均寿命等估计. 这些数据为设计、制造与管理提供了有价值的决策依据. 例如, 可以用来预测系统的可靠性水平, 判断其能否成功地完成预定的功能; 或者可以用来设计合理的检测、更换与维修方案.

系统的优异的效能，诸如多用途与高可靠性，是人们的愿望与客观上有限的资源所能达到的现实之间的一种折衷．要求一个系统越可靠，通常意味着需要更多的资源，诸如更好的原材料，更加精细的设计与制造，更好的工作环境等等．为了在各种限制(约束) 条件下达到预先规定的可靠性要求，就自然地出现了最优化问题．利用最优化模型，我们可以在高可靠性与有限的资源之间达到一种合理的平衡．

所有的大型复杂系统，除了有精良的硬件设备外，还有庞大的软件系统来控制与完成所有预定的功能．软件的故障往往会造成整个系统瘫痪或者丧失部分功能．由于软件故障导致系统故障的情形时有发生，许多情形下造成的损害是不可挽回的．因此，近年来出现了对软件可靠性研究的极大兴趣，并从不同的角度进行研究．有的用数学模型作为工具进行研究，试图对软件中故障发生的随机规律、软件改错过程、软件隐患的总数等进行描述与分析．有的从统计角度进行研究，如收集软件开发过程中的故障数据，进行数据的统计分析以及对软件可靠性作预测等．也有从软件工程的角度进行研究，试图把软件产品的开发、调试、改错、发行等过程放在一个规范的工程化的基础上进行组织与管理，以期提高软件的可靠性．

粗略地讲，可靠性的概率模型、寿命 (失效) 数据的统计分析、可靠性中的优化模型、软件可靠性问题组成了可靠性数学方法研究的主要方面．利用概率论、数理统计、运筹学以及其他的数学工具，可靠性中产生了丰富多采各具特色的定量方法．数学为定量地理解可靠性问题提供了有力的工具．反过来，可靠性问题为数学、运筹学等学科提供了广阔的未开发领域，为新的数学方法与理论的出现提供了实际背景与原动力．二者相得益彰．

1.2 寿命分布类研究

在研究寿命长度的随机规律时，通常用特定的分布函数来描述．最常用的有指数分布， Weibull 分布等 (参见第二章)．这些分布都由其参数唯一确定．在五六十年代的研究中，如何利用寿命

数据 (一组样本) 对其进行统计分析占据了很重要的地位. 例如, 确定这些数据来自什么总体 (分布形式), 以及如何进行参数估计等. 其后, 由于理论本身发展的需要, 如在更换策略等问题的研究中开始了对具有共性的一类寿命分布函数性质的探讨. 于是, 逐渐形成了寿命分布类的概念. 例如, 具有单调失效率的分布类及其性质的讨论 (见文献 [6,10]). 以后, 基于对老化、磨损等现象上的直观经验, 引进了诸如 "新比旧要好", "新比旧平均要好", "平均剩余寿命递减" 等分布类. 因而从 60 年代中期开始, 寿命分布类的研究变得活跃起来. 我们简要地叙述它所研究的问题.

1) 寿命分布类基本性质的研究.

包括等价的定义, 寿命分布类之间的相互包含关系; 在可靠性有意义的运算下的封闭性 (参见第三章); 新的寿命分布类的引进, 其性质以及与其它类之间的关系等.

2) 寿命分布类的特征刻画问题.

目的是想寻求等价的条件来描述不同的寿命分布类. 我们将在第四章中介绍利用 LS 变换及试验总时间的概念来刻画寿命分布类.

3) 寿命分布类中的可靠度上、下界.

与参数化的寿命分布不同, 仅知分布函数的一些信息, 如矩或分位点, 都不足以完全刻画一个寿命分布类. 因此, 在仅知一阶矩或一、二阶矩的条件下, 对于不同的类中的寿命分布, 研究其可靠度函数的上、下界是一个有理论与实际应用价值的问题. 本书的第五、六两章将作详细的讨论, 许多结果是新的.

4) 寿命分布与指数分布的贴近性研究.

指数分布由于它的无记忆性以及与 Poisson 过程之间的密切关系 (参见第二章), 因此在可靠性理论与应用概率模型中有非常重要的地位, 它是构成各种随机模型的基本构件. 但是, 理论与实际处理的问题中所遇到的分布往往并非是指数的. 因此, 有必要研究任一寿命分布类中的分布函数与指数分布之间的最大差异有多大. 本书的第七章将给出详细的讨论, 许多结果是新的.

5) 冲击模型.

大多数系统是在一个不断变化的环境中工作的. 在这种环境中, 冲击 (如振动、应力等外界干扰) 随机地发生. 假定冲击发生的概率规律已知, 来研究系统的寿命性质, 即系统的寿命属于什么分布类.

本书只在第九章 §3 的注记中对冲击模型作很简略的介绍. 有兴趣的读者可以参考文献 [49].

6) 多维寿命分布的推广.

从数学上考虑, 从一维到多维寿命分布类的研究是一种自然的推广, 读者可参阅文献 [11].

7) 寿命分布类的统计问题.

其中包括判断一组样本来自哪一个寿命分布类以及如何在寿命分布类中进行统计推断等问题. 读者可参阅文献 [4] 和 [67].

由于篇幅的限制及作者的兴趣, 本书不讨论 5)—7) 中的问题.

§2. 可靠性定量指标

在可靠性研究中, 我们主要关心一个系统的使用寿命, 即系统正常工作的时间. 由于寿命长度是随机的, 因此用非负随机变量 X 来表示一个系统的寿命. 我们称一个系统有寿命 X, 表示在 X 长度的一段时间中系统能满意地完成其预定的功能.

记 $F(t)$ 为相应于 X 的分布函数. 若无另外的说明, 我们采用定义

$$F(t) = P(X < t), \quad t \geq 0 \tag{1.2.1}$$

因此 $F(0) = 0$. 对 $t \geq 0$, $F(t)$ 是左连续的.

对不可修系统与可修系统, 本节将分别介绍描述系统可靠性的一些指标.

2.1 不可修系统

对不可修系统，我们对系统在 $[0,t]$ 中正常工作的概率感兴趣，即

$$R(t) = P(X \geq t) = 1 - F(t) \tag{1.2.2}$$

今后用 $\overline{F}$ 来表示 $1-F$. $R(t)$ 或 $\overline{F}(t)$ 称作时刻 t 的 **可靠度函数** 或 **生存函数**, 它描述系统在时间区间 $[0,t]$ 中的生存能力. 在工程中，系统在时刻 t 的可靠度定义为在时间区间 $[0,t]$ 中，在一定的工作条件下系统完成预定功能的概率，这个量就是 $\overline{F}(t)$. 系统的 **平均寿命** 或 **失效前的平均时间** 为

$$\mu_F = EX = \int_0^\infty t dF(t) = \int_0^\infty \overline{F}(t) dt \tag{1.2.3}$$

上述第三个等号是由于

$$\begin{aligned}\int_0^\infty t dF(t) &= \int_0^\infty dF(t) \int_0^t dx \\ &= \int_0^\infty dx \int_x^\infty dF(t) = \int_0^\infty \overline{F}(u) du\end{aligned}$$

这里用到了交换积分次序的 Fubini 定理 (见文献 [41]).

记

$$d = \sup\{t : t \geq 0, \overline{F}(t) > 0\} \tag{1.2.4}$$

$$D = [0, d), \quad D_0 = (0, d) \tag{1.2.5}$$

若寿命 X 是一个连续的随机变量，具有概率密度函数 $f(t)$, 则定义 X 的 **失效率函数** 为

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{\overline{F}(t)}, \quad t \in D \tag{1.2.6}$$

失效率函数 $\lambda(t)$ 有如下的概率意义. 考察系统在生存到时间 t 的条件下，在时间间隔 $[t, t+\triangle t)$ 中失效的条件概率，即有

$$\begin{aligned}P(X < t + \triangle t \mid X \geq t) &= \frac{F(t+\triangle t) - F(t)}{\overline{F}(t)} \\ &\approx \frac{f(t)}{\overline{F}(t)} \triangle t = \lambda(t) \triangle t\end{aligned}$$