线性自动调节系统的过渡过程

〔苏联〕З. Ш. 布洛赫著

上海科学技术出版社

〔苏联〕З. Ш. 布洛赫 著

孙季寬 曾向秋 譯

綫性自动調节系統的过渡过程

上海科学技术出版社

內 容 提 要

本书以傳递函数为共同的基础，介紹研究过渡过程的根分布法、积分評价法和频率法，其中对根分布法和频率法作了詳細討論。

本书对迟滞系統中的过渡过程問題、过渡过程的定性条件和校正环节参数的选擇等作了詳細探討，其中包含作者多年来的研究成果。

本书供已有綫性自动調节理論基本知識的工程技术人員、大专师生参考。

ПЕРЕХОДНЫЕ ПРОЦЕССЫ В ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМАХ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ

З. Ш. Блох

Физматгиз • 1961

綫性自动調节系統的过渡过程

孙季寬　曾向秋　譯

上海科学技术出版社出版（上海瑞金二路 450 号）

上海市书刊出版业营业許可証出 093 号

上海市印刷三厂印刷　新华书店上海发行所发行

开本 850×1156 1/27　印張 16 14/27　排版字数 394,000

1965 年10月第 1 版　1965 年10月第 1 次印刷

印数 1—2,000

統一书号 15119·1826　定价(科六) 2.40 元

前　言

总的説来，本书是研究連續綫性自动調节系統的过渡过程的。現时，在过渡过程的研究与計算方面已有了頻率法和根分布法。这两种方法最好能統一成为一种一般理論，而这种理論是以閉环調节系統的傳遞函数的概念为其基础的。如此，則两个研究方向的所有主要結果，不管它們实际上是怎样得到的，都可表示成典型傳遞函数研究中所得出的函数的某些性质。本书的总体結构和书中所討論的各种理論的結果就是根据上述观点而决定的。

开始第一章仅包含有关拉普拉斯变換与傅里叶变換的一些材料与公式，在后面研究过渡过程时将广泛用到它們。其中位移定理的叙述方式，可使以后在研究迟滞系統时有可能考虑非零初始函数。

第二章介紹了列出复杂調节系統的傳遞函数的方法。除了关于控制作用的傳遞函数外，还討論了关于扰动作用的傳遞函数，后者对应于卸除負載时的过渡过程。在討論各单个环节的典型特性时，詳細地論述了如何根据实驗取得的特性来确定环节的物理参数（时間常数与放大系数）的問題。

第三章討論的是在給定傳遞函数零点与极点分布的基础上求过渡过程的問題。其中对具有重极点的系統給予了必要的注意，它是精确求出迟滞系統过渡过程的基础。

第四章和第五章包含着一些公式，这些公式可用来对各种不同复杂程度的系統計算与估計超調量、調节时間、最大速度与最大加速度。为了使所得的公式便于实际应用，在叙述問題的同时附上了一系列計算图表。

第六章包括的內容是对过渡过程性质进行定性分析所得到的一系列結果。其中給出了振蕩性的标志，并且象研究結构不稳定系統一样，初次对結构非单調的調节系統作了研究。

在第七章中，利用第四和第五章中得出的結論与成果来选擇串联和并联校正环节的参数，以保証調节过程有給定品质。其中探討了保証給定的靜态偏差的問題，保証給定的稳定度与振蕩度的問題，以及保証超調量与調节时間两者的給定上限的問題。与过去討論的計算方法[1]有所不同，在这里，校正环节的参数是通过对特征多項式仅仅給定两个根(而不是所有的根)的分布来确定的，而且这方法还可保証所研究系統中各标准环节(除校正环节外)的所有其余預先給定的参数值不变。

第八章闡述了在普通系統和迟滯系統中分析与作出过渡过程的頻率法。在作过渡过程时对虛頻特性給予特别注意，在应用虛頻特性时，列专用的輔助函数表問題便成为完全不必要了，而在按实頻特性作过渡过程时这些函数表却是必不可少的。对于頻率特性的自然逼近法也給予了必要的注意，应用这方法可以在一些十分重要的情况下估計超調量与調节时間，可不必为了作閉环系統的頻率特性而进行极繁复的計算。本书中沒有討論根据开环系統的对数幅頻特性来选擇校正环节参数的方法，因为在这个理論中，甚至連所用的“預期对数特性”这个概念本身也还需要更严謹的論証。

总的說来，本书是为已經熟悉了現代調节理論基本概念的讀者写的，包括关于环节微分方程的推导，微分方程的綫性化以及系統的稳定性研究等。对于初学調节理論的讀者，建議先根据适当的文献[2]熟悉一下所有这些問題。

作者对于提出宝貴意見的 M. A. 埃捷尔曼教授表示感謝，在准备手稿付印时已将他的意見考虑进去了。作者对帮助制图与完成許多計算工作的 Г. М. 依琳娜和 И. З. 布洛赫亦表謝意。

参 考 文 献

[1] Блох З. Ш., Регулирование машин, Гостехиздат, 1950.

[2] Айзерман М. А., Лекции по теории автоматического регулирования, Физматгиз, 1958; Попов Е. П., Автоматическое регулирование (основные понятия), Физматгиз, 1959.

目　　录

第一章

拉普拉斯变换和傅里叶变换

1-1 拉普拉斯变換

在近代的調节理論中，所应用的基本数学工具是拉普拉斯变换或与拉普拉斯变换差別很小的卡逊-海維賽特变换。应用这类变换，可以在自动調节系統的各种时間特性和一些复变量 (z) 函数之間建立对应的关系式。

关于这些时間特性在进行过程中的特点，可以直接从它們的拉普拉斯象函数得到一系列重要而实用的結論。例如，在一定的典型扰动作用下，集中参数調节系統的运动可用常系数綫性微分方程来描述，这时，方程式解的象函数将是有理分式。如果象函数的全部极点(有理分式分母的零点)都位于左半平面上，則当 $t \to \infty$ 时，相应的时間特性将逐漸趋近于零。如果象函数在坐标原点有一阶极点而其余的极点都位于左半平面上，那末，相应的时間特性将逐漸趋近于某一不等于零的常数。如果象函数有一对位于虛軸上的共軛极点，則表明相应的时間特性是不衰减的振蕩；而当有一些极点分布在右半平面上时，时間特性将随时間而无限增长。象函数的这些簡单性质是研究自动調节系統稳定性的基础。

关于自动調节系統时間特性在进行过程中的更精确和可靠的性质，可以根据系統的頻率特性来判断。頻率特性則可直接从相应的象函数求得。自动調节系統的頻率特性和时間特性的若干重要关系式，可

以很簡单地由傅里叶变换的一般性质导出。因此，有必要扼要地叙述一下拉普拉斯变换和傅里叶变换的一些基本性质。往后，将利用这些基本性质来研究自动調节系統的时間特性。关于这类問題的更詳尽的材料則在有关的专門文献[1]中論述。

設一个单值的具有有限个第一类間断点的时間函数 $\varphi(t)$ 在 $t<0$ 时等于零，并存在实数 σ，使广义积分

$$\int_0^\infty |\varphi(t)|e^{-\sigma t}dt<\infty$$

亦即为有限值，則在上列积分存在的所有实数 σ 中的最小値 σ_0 称为函数 $\varphi(t)$ 的絕对收斂横坐标。在上述条件下，在 $\sigma>\sigma_0$ 的半平面中解析的复变量函数

$$w(z)=\int_0^\infty \varphi(t)e^{-zt}dt \tag{1-1}$$

是存在的，它称为函数 $\varphi(t)$ 的拉普拉斯象函数，其中 $z=\sigma+i\omega$。式(1-1)通常写成

$$L[\varphi(t)]=w(z) \tag{1-2}$$

式中，L 是对函数 $\varphi(t)$ 作拉普拉斯正变换的符号。

1-2 典型函数的象函数

由拉普拉斯变换本身的积分式定义可得到其綫性性质如下

$$\left.\begin{aligned}&L[A\varphi_1(t)]=Aw_1(z)\\&L[\varphi_1(t)+\varphi_2(t)+\cdots+\varphi_n(t)]\\&\qquad=w_1(z)+w_2(z)+\cdots+w_n(z)\end{aligned}\right\} \tag{1-3}$$

式中，$L[\varphi_k(t)]=w_k(z)$，A 是一个与 t 和 z 无关的量。

現在来求在研究集中参数綫性自动調节系統时經常遇到的某些典型函数的象函数。令式(1-1)中的 $\varphi(t)=e^{-pt}$，积分后得

$$L[e^{-pt}]=\frac{1}{z+p} \tag{1-4}$$

在上式中以 $p=i\beta$ 代入，由于

$$e^{-pt}=\cos\beta t-i\sin\beta t$$

得到

$$L[\cos\beta t-i\sin\beta t]=\frac{z-i\beta}{z^2+\beta^2}$$

再利用式 (1-3) 的性质，并使上式两端的实数部分和虚数部分分别相等，得到三角函数的拉普拉斯象函数为

$$\left.\begin{aligned} L[\cos\beta t] &= \frac{z}{z^2+\beta^2} \\ L[\sin\beta t] &= \frac{\beta}{z^2+\beta^2} \end{aligned}\right\} \tag{1-5}$$

設 $p=\alpha-i\beta$，因此

$$e^{-pt}=e^{(-\alpha+i\beta)t}=e^{-\alpha t}(\cos\beta t+i\sin\beta t)$$

于是，按照式(1-4)有

$$L[e^{-pt}]=\frac{1}{z+\alpha-i\beta}=\frac{z+\alpha+i\beta}{(z+\alpha)^2+\beta^2}$$

由此又得到另两个函数的拉普拉斯象函数

$$\left.\begin{aligned} L[e^{-\alpha t}\cos\beta t] &= \frac{z+\alpha}{(z+\alpha)^2+\beta^2} \\ L[e^{-\alpha t}\sin\beta t] &= \frac{\beta}{(z+\alpha)^2+\beta^2} \end{aligned}\right\} \tag{1-6}$$

現在来求函数 $\varphi(t)=t^n e^{-pt}$ 的拉普拉斯象函数，式中 n 是正整数。按照式(1-1)有

$$L[t^n e^{-pt}]=\int_0^\infty t^n e^{-(p+z)t}dt$$

对上式用部分积分法进行积分，并考虑到当 k 为任意有限值时

$$\left|\frac{t^k e^{-(p+z)t}}{p+z}\right|_0^\infty=0$$

可得

$$L[t^n e^{-pt}]=\frac{n!}{(z+p)^{n+1}} \tag{1-7}$$

在特殊情况 $p=0$ 时

$$L[t^n]=\frac{n!}{z^{n+1}} \tag{1-8}$$

同样可以求得单位阶跃函数或单位阶跃的拉普拉斯象函数。单位阶跃函数是在自动調节理論中最經常討論的，通常用它来表示加在調节系統各个环节上的典型扰动作用。单位阶跃函数的定义如下(图1-1)

$$\mathbf{1}(t)=\begin{cases}0 & 当\ t<0\\ 1 & 当\ t>0\end{cases} \tag{1-9}$$

不难看出，单位阶跃函数在 $t=0$ 时有一个第一类間断点，它满足应用拉普拉斯变换的条件，因此，按照式(1-1)有

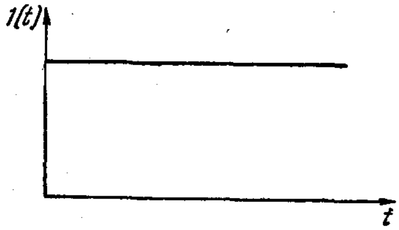

图 1-1　单位阶跃函数

$$L[\mathbf{1}(t)]=\frac{1}{z} \qquad (1\text{-}10)$$

由式(1-9)的单位阶跃函数 $\mathbf{1}(t)$ 的定义可得，絕对值为有限的函数 $f(t)$ 与 $\mathbf{1}(t)$ 的乘积可定义为

$$\mathbf{1}(t)f(t)=\begin{cases}0 & \text{当 } t<0\\ f(t) & \text{当 } t>0\end{cases} \qquad (1\text{-}11)$$

因此，将函数 $f(t)$ 乘上 $\mathbf{1}(t)$ 的运算总能保証函数 $f(t)$ 满足应用拉普拉斯变换的一个条件。基于上述，自动調节理論中的一些重要函数，如 $\sin\omega t$, $\cos\omega t$, $e^{-\alpha t}$ 等，严格地說，应当分别写成 $\mathbf{1}(t)\sin\omega t$, $\mathbf{1}(t)\cos\omega t$, $\mathbf{1}(t)e^{-\alpha t}$。但是在一些不会引起誤解的場合，例如在研究 $t>0$ 的各种物理过程时，根据定义在所有 $t>0$ 时的 $\mathbf{1}(t)=1$，所以略去乘数 $\mathbf{1}(t)$ 是恰当的。现在再来討論下列函数

$$\mathbf{1}(a-t)=\begin{cases}0 & \text{当 } t>a\\ 1 & \text{当 } t<a \quad (t>0)\end{cases} \qquad (1\text{-}12)$$

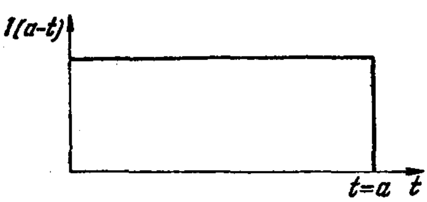

图 1-2　有限区間的单位阶跃函数

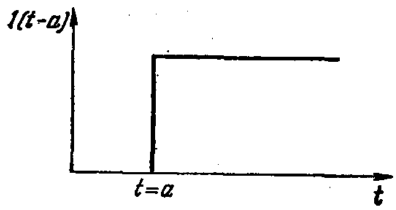

图 1-3　截头单位阶跃函数

这个自变量为 t 的函数是有限区間的单位阶跃函数(图 1-2)。将給定的函数 $f(t)$ 乘上 $\mathbf{1}(a-t)$ 后，可以保証这函数在 $t>a$ 时等于零。函数 $\mathbf{1}(a-t)$ 的拉普拉斯象函数为

$$L[\mathbf{1}(a-t)]=\int_0^\infty \mathbf{1}(a-t)e^{-zt}\,dt=\int_0^a e^{-zt}\,dt=\frac{1-e^{-za}}{z} \qquad (1\text{-}13)$$

若考虑到函数 $\mathbf{1}(a-t)$ 在 $t<a$ 时等于零，而在 $t>a$ 时等于 1 (图 1-3)，那末，有限区間的单位阶跃函数也可定义为差値

$$\mathbf{1}(a-t)=\mathbf{1}(t)-\mathbf{1}(t-a) \tag{1-14}$$

利用上式，可以定义单位脉冲函数。由于

$$L\left[\frac{\mathbf{1}(t)-\mathbf{1}(t-a)}{a}\right]=\frac{1-e^{-az}}{az}$$

对上式两端分别取 $a\to 0$ 的极限，得

$$\lim_{a\to 0}\frac{1-e^{-az}}{az}=1, \quad \lim_{a\to 0}\frac{\mathbf{1}(t)-\mathbf{1}(t-a)}{a}=\mathbf{1}'(t)$$

作为上式的极限形式的函数 $\mathbf{1}'(t)$，称为单位脉冲函数。它的拉普拉斯象函数等于

$$L[\mathbf{1}'(t)]=1 \tag{1-15}$$

同样地可以看出

$$\int_0^t \mathbf{1}'(t)dt=1(t) \tag{1-16}$$

因此，单位脉冲函数可以看作是单位阶跃函数的导数形式。

1-3 若干基本关系式

由基本关系式(1-1)可以直接得出任意阶导数的象函数公式。对式(1-1)的等号右端应用部分积分法进行积分，可得

$$\int_0^\infty \varphi(t)e^{-zt}dt=\frac{1}{z}\left[\varphi(0)+\int_0^\infty \frac{d\varphi(t)}{dt}e^{-zt}dt\right] \tag{1-17}$$

或者引用拉普拉斯变换的符号写成

$$L[\varphi'(t)]=zw(z)-\varphi(0) \tag{1-18}$$

式中，$w(z)=L[\varphi(t)]$ 是所研究函数 $\varphi(t)$ 的已知象函数。再继續应用式(1-17)，可以求得任意阶导数的象函数

$$\left.\begin{aligned}L[\varphi''(t)]&=z^2w(z)-z\varphi(0)-\varphi'(0)\\L[\varphi'''(t)]&=z^3w(z)-z^2\varphi(0)-z\varphi'(0)-\varphi''(0)\\L[\varphi^{(m)}(t)]&=z^mw(z)-z^{m-1}\varphi(0)-z^{m-2}\varphi'(0)\\&\quad-\cdots-z\varphi^{(m-2)}(0)-\varphi^{(m-1)}(0)\end{aligned}\right\} \tag{1-19}$$

根据拉普拉斯变换的定义，当 $t=-0$ 时，亦即 t 取負值而趋近于零时，$\varphi^{(k)}(t)=0(k=0, 1, \cdots, m)$。因此在式(1-18)～(1-19)中，所有的初始值 $\varphi^{(k)}(0)(k=0, 1, \cdots, m)$ 是在 $t=+0$ 时，亦即 t 取正值而趋近于

零时定义的。上面所导出的公式,还可用来計算函数 $\varphi(t)$ 及其各阶导数分别在 $t=0$ 和 $t\to\infty$ 时的初始值和最終值。事实上,把式(1-18)改写成下式

$$\int_0^\infty \frac{d\varphi(t)}{dt} e^{-zt}dt = zw(z) - \varphi(0) \tag{1-20}$$

并取 $z\to\infty$ 的极限,得到函数 $\varphi(t)$ 的初始值为

$$\varphi(0) = \lim_{z\to\infty}[zw(z)] \tag{1-21}$$

将上式应用到上述各阶导数的象函数表示式,便得

$$\left.\begin{aligned}
\varphi'(0) &= \lim_{z\to\infty}[z^2w(z) - z\varphi(0)] \\
\varphi''(0) &= \lim_{z\to\infty}[z^3w(z) - z^2\varphi(0) - z\varphi'(0)] \\
\varphi^{(m)}(0) &= \lim_{z\to\infty}[z^{m+1}w(z) - z^m\varphi(0) - z^{m-1}\varphi'(0) \\
&\qquad - \cdots - z\varphi^{(m-1)}(0)]
\end{aligned}\right\} \tag{1-22}$$

同时,应当特别指出,根据拉普拉斯变换的定义,式(1-21)和(1-22)給出的数值 $\varphi^{(k)}(0)$ ($k=0, 1, \cdots, m$) 表示 $t=+0$ 时,亦即 t 取正值而趋近于零时的数值。

在式(1-20)中取 $z\to0$ 的极限,得

$$\int_0^\infty \varphi'(t)dt = \lim_{z\to0}[zw(z) - \varphi(0)]$$

此外

$$\int_0^\infty \varphi'(t)dt = \lim_{t\to\infty}\varphi(t) - \varphi(0)$$

因此,函数 $\varphi(t)$ 的最終值等于

$$\lim_{t\to\infty}\varphi(t) = \lim_{z\to0}[zw(z)] \tag{1-23}$$

这里,只要函数 $zw(z)$ 在虚軸和右半平面上沒有极点,上式的右端是可以取极限的。

如要計算导数的最終值,可以利用式(1-18),这时有

$$\lim_{t\to\infty}\varphi'(t) = \lim_{z\to0}[z^2w(z) - z\varphi(0)] = 0 \tag{1-24}$$

因为根据假設条件,$zw(z)$ 的全部极点都位于左半平面上,所以上式中 $\lim\limits_{z\to0} z^2w(z)=0$。显然,上述結論对于所有的高阶导数也是同样正确的。

如果象函数 $w(z)$ 的全部极点都位于左半平面上，并且 $w(0)$ 是一个有限量，那末

$$\lim_{t\to\infty}\varphi(t)=0$$

现在再来指出象函数与其对应的时間函数的比例尺性质。为了导出所需的关系式，把基本公式(1-1)改写成

$$w(\zeta)=\int_0^\infty f(\tau)e^{-\zeta\tau}d\tau$$

令 $\zeta=az$，$a\tau=t$，其中 a 是正的常数。于是

$$aw(az)=\int_0^\infty f\left(\frac{t}{a}\right)e^{-zt}dt \tag{1-25}$$

因此，将变量 t 除以常数 a（相当于改变时間軸 t 的比例尺），就使象函数及其自变量均乘上同样的常数 a。

当按給定的象函数 $w(z)$ 求函数 $\varphi(t)$ 时，可以应用拉普拉斯反变换公式

$$\varphi(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}w(z)e^{tz}dz \tag{1-26}$$

式中，积分是沿一条与虛軸平行并位于函数 $w(z)$ 所有奇点右边的直綫进行的。关于按求得的象函数作过渡过程的基本方法，我們将在以后再詳細討論。

现在来推导复数域中的微分公式，这在以后計算某些积分准則时将要用到。将式(1-1)的两端对参数 z 取导数，得

$$\frac{dw(z)}{dz}=-\int_0^\infty t\varphi(t)e^{-zt}dt$$

由此得象函数

$$L[t\varphi(t)]=-\frac{dw(z)}{dz}$$

将这种微分运算重复 m 次，便可得到一般公式

$$\begin{aligned}L[t^m\varphi(t)]&=\int_0^\infty t^m\varphi(t)e^{-zt}\\&=(-1)^m\frac{d^mw(z)}{dz}\end{aligned} \tag{1-27}$$

式中，$w(z)=L[\varphi(t)]$。

1-4　褶 积 定 理

在实数域中函数的褶积运算同样具有重要的理論与实际意义，由此可以得出积分

$$\varphi(t)=\int_0^t \varphi_1(t-\tau)\varphi_2(t)d\tau \tag{1-28}$$

的象函数为 $\varphi_1(t)$ 和 $\varphi_2(t)$ 两个函数的象函数乘积的形式。将式(1-1)中的 $\varphi(t)$ 值用式(1-28)代换，得

$$w(z)=\int_0^\infty e^{-zt}dt\int_0^t \varphi_1(t-\tau)\varphi_2(\tau)d\tau$$

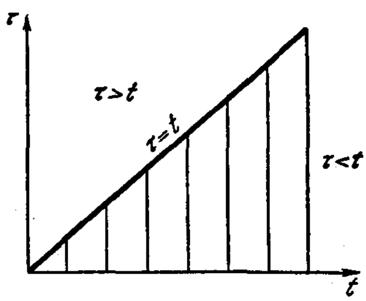

图 1-4　变量 t 和 τ 的积分区域

考虑到在討論式(1-1)时的規定，函数 $\varphi_1(t)$ 实际上应为乘积 $\mathbf{1}(t)\varphi_1(t)$，因此函数 $\varphi_1(t-\tau)$ 实际上应为乘积 $\mathbf{1}(t-\tau)\varphi_1(t-\tau)$。按照自变量为 τ 的函数 $\mathbf{1}(t-\tau)$ 的性质(1-12)，积分号內的表示式对于所有的 $\tau>t$ 均应等于零，且变量 τ 和 t 的积分区域，将是第一象限中以坐标角的等分綫 $\tau=t$ 为上限的部分区域(图 1-4)。对于所述的区域，应用狄里希萊(Dirichlet)公式可以在二重积分中改变积分次序，首先在 $t=\tau$ 到 $\tau=\infty$ 区間內对 t 积分，然后再在 $\tau=0$ 到 $\tau=\infty$ 区間內对 τ 积分。这样便得

$$w(z)=\int_0^\infty \varphi_2(\tau)d\tau\int_\tau^\infty \varphi_1(t-\tau)e^{-zt}dt \tag{1-29}$$

設 $t-\tau=x$，則

$$\int_\tau^\infty \varphi_1(t-z)e^{-zt}dt=\int_0^\infty \varphi_1(x)e^{-z(\tau+x)}dx$$

根据拉普拉斯变换的定义，积分

$$\int_0^\infty \varphi_1(x)e^{-zx}dx=w_1(z)=L[\varphi_1(t)]$$

是函数 $\varphi_1(t)$ 的象函数。因此，由式(1-29)得

$$w(z)=\int_0^\infty \varphi_2(\tau)e^{-z\tau}d\tau\cdot w_1(z)=w_1(z)w_2(z)$$