模糊控制工程

章正斌 吴汝善 于 健 编著

m. hu kongzhi gongcheng

重庆大学出版社

模糊控制工程

章正斌　吴汝善　于健　编著

重庆大学出版社

内容提要

本书前半部介绍模糊集合论的有关内容，如模糊数学和模糊控制工程的兴起和发展，模糊集合论，隶属函数，模糊关系的概念及计算方法。后半部主要介绍模糊逻辑控制，模糊语言，及一般模糊控制器的设计和计算方法。最后给出一些国内外模糊控制的应用实例。本书可作高等学校有关专业的本科生及研究生的教材或教学参考书，也可供有关的工程技术人员阅读和参考。

模糊控制工程

章正斌　吴汝善　于健　编著

责任编辑　唐利

*

重庆大学出版社出版发行

新　华　书　店　经　销

重庆花溪印制厂印刷

*

开本:787×1092　1/16　印张:12.75　字数:313千

1995年6月第1版　　1995年6月第1次印刷

印数:1—3500

ISBN 7-5624-0983-8/TP·58　定价:9.80元

(川)新登字020号

前　言

自从美国的控制理论专家、模糊集合论的奠基人，L. A. 札德(L. A. Zadah)教授于1965年发表模糊集合论的第一篇论文《模糊集合论》("Fuzzy Set")起，模糊数学在理论上和应用上都得到飞速的发展。

模糊控制是模糊数学在工业控制中应用的成功范例。1974年，英国的自动控制专家马丹尼(Mamdani)教授首先把模糊集理论应用于锅炉和蒸汽机的控制，并得到成功。这一开创性的工作标志着模糊控制工程的诞生。到了80年代后期，模糊控制工程在日本、美国等国家到处启动，得到广泛的应用。在我国，从70年代末起，也开始进行模糊控制的理论研究和应用，并取得了可喜的成果。

由于各种原因，模糊控制的内容，只散见于模糊集理论著作的个别章节中。迄今为止，编者尚未见到国内外有关模糊控制工程的专著或教材出版。经过数年的准备和酝酿，我们认为，编写一部以模糊控制器的设计和计算为中心内容，上承模糊控制的基本原理，下接实际工程应用的书籍，对于普及模糊集理论、推广应用模糊控制不无裨益，也希望能抛砖引玉，以后有关这个课题的更多更好的著作能不断涌现。

本书可作为工科院校本科生的选修课教材、研究生教材或教学参考书，也可供有关的工程技术人员阅读和参考。其着重点在于工程实际的应用、特别是各种模糊控制器的设计及应用。考虑到大多数读者对模糊数学比较陌生，所以在本书前四章介绍了模糊集理论的基本知识。又因为模糊集理论包括模糊控制理论尚在不断的发展和完善中，尚未发展成为完整的理论体系，所以对一些纯理论问题就不进行过多深入的探讨，略去一些定理证明及公式推导。希望读者能通过学习，掌握模糊集理论的思想方法及模糊控制器的设计计算，对自己将来的工作有所帮助。

本书第一章、第六章、第七章、第八章由章正斌编写，第二章及第三章的的隶属函数部分由吴汝善编写，第二章§2-5节、第三章的§3-6、3-7节及第四章、第五章由于健编写。于健还做了很多资料搜集及整理工作。由章正斌担任主编，校订全书。最后由葛真老师进行审阅。提出很多宝贵的意见。在此，全体编者对葛老师致以谢意。

由于编者的水平及所掌握的信息资料有限，书中一定有不少错误和遗漏之处，望有关专家学者及广大读者们不吝赐教。

编　者

1992.5

目　录

第一章 概 论

模糊控制工程是模糊集理论(简称模糊理论)在控制工程上的运用和发展,是模糊理论实用化的一个重要分支及成功应用的典范。学习模糊控制工程,首先必须学习模糊理论的有关知识。本章的主要内容是介绍模糊理论的基本概念,模糊工程诞生的历史背景和发展概况。

§1-1 确定性数学与不确定性数学

迄今为止,我们所学过的数学,绝大部分属于普通数学即所谓确定性数学的范畴。确定性数学包含有初等数学如算术、几何、代数等,高等数学如微积分、微分方程、集合论等。不管是哪一种确定性数学,在其思想方法和推理形式上都属于所谓"二值逻辑"的范畴。在二值逻辑中:一个命题,或为真,或为假,二者必居其一;从集合论的观点来看,一个元素或属于某集合或不属于某集合,不可能有中间状态。在推理上有"非此即彼"的关系,也就是说,集合的外延是十分清晰的:

例如:三角形三内角之和为180°,此命题为真。某直角三角形有一内角为钝角,此命题为假。

又如:数$n=2k+1$(其中k为整数)属于奇数集合$A=\{x\mid x为奇数\}$,记为$n\in A$。而数$n=2k$(其中k为整数)则不属于上述奇数集合A。记为$n\overline{\in}A$。集合A的外延是十分清晰的。

如集合用特征函数C表示,应用特征函数可以表示元素x是否属于集合A。如果x属于A,记为$C_A(x)=1$;若x不属于A,则$C_A(x)=0$。特征函数只能取两个值:或为1,或为0。以此对应,如命题为真记为1,命题为假则记为0。这种逻辑推理的方法就是所谓的二值逻辑。这恰好可以和计算机的二进制相对应。

总之,确定性数学所描述的对象,应具有确定性或固定性的特点,在逻辑判断上具有"非此即彼"、"非对则错"、"非1则0"的严格性和精确性。

确定性数学自人类开始从事有目的,有意识的生产劳动以来就已开始萌发,迄今已得到很大的发展,形成了严格、系统的科学体系,对人类的科学技术和生产力的发展,起了并仍将起着重大的作用。

与确定性数学相对应,自动控制理论中的经典控制理论,近代控制理论中的线性控制理论,最优控制理论,数学模型辩识等内容所应用的数学工具都属于确定性数学的范畴。

但随着生产力的发展和人类对自然现象和社会现象认识的深化,人们发现只是应用基于二值逻辑的确定性数学来描述人类丰富多彩的思维活动及复杂的自然现象和社会现象是远远不够的,因为人的思维活动和自然、社会现象往往带有不同程度的随机性(或然性)及模糊性,并不都是"非此即彼"、"非对则错"的关系。为了更好地认识世界和发展生产力,客观上要求人们必须另辟蹊径来认识和描述确定性数学不能描述的现象。于是产生了所谓不确定性数学。

§1-2　不确定性数学——随机性和模糊性

上一节提到，因为客观现象存在随机性和模糊性，因此产生了描述这类现象的不确定性数学。下面分别予以介绍。

一、随机性

随机性或称或然性，指事件发生具有偶然性或随机性的性质。现举例说明：

一个众所周知的例子就是抛硬币，每次抛硬币后出现正反面的可能性是不能预测的，是不确定的，随机的。但随作试验次数的增加，其出现“正”、“反”的或然率（概率）趋近于二分之一。这说明，虽然单个事件的结果是不确定的，但从大量具有随机性和偶然性的单个事件所组成的总体中可找出规律性。这就是不确定性数学中随机数学（包括概率论和数理统计等）所研究的一种现象。

另一个例子：在研究气体性质时，由于气体是由很多高速运动的分子所组成，并互相碰撞而改变其速度和方向，如果试图对每个分子列出其微分方程式来研究它的运动规律，这样的微分方程将包含大量的未知数及复杂的因素，其难度可想而知。即使列出了方程，也无法求解。其实这样做既不可能，也无必要，因为我们对个别气体分子的运动并不感兴趣，只注意由大量分子运动呈现出来的宏观总体现象如温度、压力等。这时气体中每一分子处的状态是“偶然的”，“随机的”（即不确定的），但其宏观总体现象则有规律可寻。对这种因素众多的复杂现象，用不确定性数学中的数理统计和概率论来进行研究也是很方便的。

在自动控制中，很多自动控制系统（如导弹制导系统）的给定值和扰动值也是随机信号，也就是说，信号的产生及形式带有偶然性，因而不能用确定性的函数关系来表示。分析综合这种系统要应用随机控制理论，其数学基础是不确定性数学中的随机数学。

前面说过，确定性数学是用来描述具有确定性或必然性的现象。其思维和推理方式是“非1则0。”的二值逻辑。而随机数学是描述具有或然性的随机现象，用概率分布函数来表示事件发生的可能性，概率分布函数的取值范围是闭区间〔0，1〕中的任意实数。“1”表示事件必然发生，“0”表示事件不会发生；0和1之间的值表示事件发生的可能性的大小。随机事件的或然性（随机性）表示它不可能用二值逻辑的确定性数学来描述。

二、模糊性

不确定性数学中的随机数学是描述随机现象的。由于随机事件出现的条件不充分，所以事件是否会发生，不是必然的，而只能以0至1之间的概率来进行估计，但事件本身的含义是明确的。例如无数次抛一只硬币，其出现正、反面的可能性为二分之一，即概率为二分之一。但每一次抛硬币的结果是确定的，或为正面，或为反面，不可能介于二者之间或二者之外。所以其结果是确定的。

但在人类的思维和表示思维活动的语言中，在社会现象和生产过程中还存在着大量的现象和事件，其本身的含义就是不确定、模糊的，所以既不能用确定性数学，也不能用随机数学来描述。在生活和生产中，这种例子是很多的。例如我们说：“某人很高，并蓄有大胡子”；

“把汽车停在大门附近；”

“水温偏高，关小蒸汽阀，水温偏低，开大蒸汽阀”等。

由一些副词和形容词组成的陈述语句或描述一些经验性的因果关系的条件语句等，往往是表达一些模糊的。不确定的含义。例如在上述例子中，多高才算“很高”，多近才算“附近”。同理，“偏高”，“偏低”，“关小”，“开大”等都没有用确定的数字来表示，但我们很容易理解这些词的含义。这是基于二值逻辑的计算机无法理解的。再举一个例子，如果让一个警察到火车站去拘捕一个“蓄有大胡子的高个子年轻人”，这个特征很明显，一般警察是决不会弄错的；如果叫一个计算机操纵的机器人去完成这个任务就很困难了，首先要输入程序定义什么叫“大胡子”？胡子的长度和密度等于或大于多少才叫“大胡子”？同样还要给出“年轻”和“高个子”的定义，这就很荒唐了。当然，在确定性数学的领域内，计算机有其不可比拟的优点，例如要求解一个有100个未知数的联立方程组，用人工计算起码要几个月，而且很容易出错；但如果排好程序用计算机求解，不到一小时就可解出。和人脑相比，计算机具有不可比拟的快速性和精确性。但这只是问题的一个方面。如果要设计一个自动控制的汽车驾驶仪，目前是十分困难的，因为驾驶汽车包含了许多模糊性的概念，一个普通司机很容易做到的事情，计算机很难做到。

由此看来，人类社会和生产力发展到一定的阶段，出现了许多确定性数学和随机数学不能解决的问题，于是属于不确定性数学的模糊数学及其重要的应用分支——模糊控制工程就应运而生了。

§1-3 模糊数学的兴起

在一般人的印象中，数学应该是精确的，严格的说，不应该是模糊的。但模糊现象又的确客观存在于人类思维、社会现象和自然现象中，为了描述研究这类现象而产生了模糊数学。在此，“模糊”这个词并不是一个贬意词，而是客观事物的准确反映。而且，随着科学技术的发展和互相渗透，过去有些与数学无关或关系不大的学科如生物学、心理学、医学、语言学等。都迫切要求数学化和定量化。而这些学科又包含了大量的模糊概念，不能或不便应用确定性数学。所以只能改变数学本身，使其适应于更广泛的学科，这就是模糊数学产生的社会背景和历史背景。

模糊数学诞生于1965年，它的创始人是美国加利福尼亚大学的自动控制专家札德教授(Prof. L. A. Zadeh)，他在第一篇论文《模糊集合》(Fuzzy Set)中，首先引入了隶属函数(membership function)的概念。隶属函数的取值范围是闭区间〔0,1〕中的任何实数，从而打破了确定性数学“非对则错”，“非1则0”的局限性，而用0,1间的数来描述中间过渡状态。隶属函数等于0或1只是一种极端情况，或者说，确定性只是模糊性的特殊情况。札德建立了模糊集合论的基础，首次运用数学方法来描述模糊现象，这无疑是一件具有开创意义的工作。

模糊数学一经出现就表现出其强大的生命力和渗透力。在70年代以后，在广泛的领域内得到了很快的发展。

以天气预报为例，如“多云”、“偏南风”、“中到大雨”等气象术语都是模糊概念。在国外和国内，应用模糊数学进行天气预报已有若干成功的先例。再如医疗诊断，一些症状 如“食欲不振”、“头痛”、“疲乏无力”等也都是模糊概念。某种疾病实际上是众多症状的模糊集合。根据某位医学专家多年的临床经验，编制程序后用计算机进行诊断时，应用模糊数学可以取得良好的

效果。这在国内外都有很多成功应用的例子。在此不一一赘述。

又如模式识别，人工智能和专家系统是近年发展起来的前沿学科。这些学科的共同特点之一是让计算机尽可能地模拟人的思想方法，如前所述，人的思维和推理过程在很多时候是带有模糊性的。所以，模糊数学也已广泛应用于这些领域。

在社会科学和经济学中也存在着大量的模糊概念，而且大都是复杂的多因素影响和互相作用的大系统。如果用确定性数学对其进行描述、估计或预测是十分困难的；而应用模糊数学对其进行研究，可得到较好的效果。一门新学科——模糊经济学由此诞生。

模糊数学在工业生产和管理方面也得到广泛的运用，如生产过程控制，单机自动控制及交通管制等，形成了自动控制和模糊数学的一门交义学科——模糊控制工程。

§1-4 模糊控制工程的诞生和发展

现有的自动控制理论（包括经典理论和现代控制理论）有一个共同的特点，即控制器的综合设计都要建立在被控对象准确的数学模型（微分方程，传递函数或状态方程）的基础上、有了数学模型及被控对象对控制系统性能指标的要求，才能设计出各种类型的控制器。建立被控对象的数学模型基本上是两种方法：一是从已知的物理化学定律进行数学推导得出；二是进行实验，根据被控对象的输入输出数据，再经过数学模型辨识的方法计算得出。不管用哪一种方法都存在两个主要问题：

1. 在计算数学模型时，为了简化计算方法，一般都要经过很多理想化的假设，如非线性假设为线性，分布参数假设为集中参数，时变假设为定常等。

2. 在实际工业生产中，很多系统影响因素很多，十分复杂，还往往伴随着生物化学的过程（如一些化工系统和发酵系统等）。在经济管理，医学、生物学等领域中，影响因素众多，建立精确的数学模型更是困难，甚至是不可能的。

因此对这类复杂的系统用常规的控制方法，其控制结果往往与理论值之间存在较大的偏差，有时要在生产现场进行反复的调试修改，结果还不大理想。面对这种情况，人们在探索是否能不建立数学模型，只根据实际系统的输入输出数据，参考现场操作人员的运行经验对系统进行实时控制。这就是模糊控制工程要解决的问题。

1974 年英国伦敦大学的教授马丹尼(Prof. Mamdani)首先把模糊集理论用于锅炉和蒸汽机的控制（见本书§8-11）效果良好。这一开拓性的工作标志着模糊控制工程的诞生。随后在英国、丹麦、荷兰等国先后对热交换过程、烧结工厂原料、混合渗透率以及压力容器等进行了模糊控制，也都取得了良好的效果。

1977 年英国的佩比斯(Pappis)等人应用模糊控制方法对十字路口交通管理进行控制（见本书§8-11），结果使车辆平均等待时间比原来减少了 7%。

进入 80 年代，模糊工程的应用在日本和美国兴起，超过了西欧各国。特别是在日本，模糊工程正在到处启动，截止到 1988 年，应用和研究开发项目已有一百多项：从小到家如电器如微波炉、洗衣机、家用浴池给水混合装量等，到净化系统的温度湿度控制系统、乙烯设备控制，直到大型的炼钢高炉作业系统、电梯群控管理系统、地铁列车的自动运转系统等都应用了模糊工程，并取得了良好的效果。难怪有的日本刊物宣称："模糊工程时代正在到来"（日本《钻石》周刊

1989 年 3 月 11 日报导标题)。在美国,有的学者认为:“模糊逻辑”将是“下一代工厂自动化系统的基础”。这一部分内容将在本书第八章作较详细的介绍。

模糊控制的理论研究也正在发展之中。1976 年英国的汤(Tong)写出了第一篇有关模糊控制的论文。1980 年我国学者汪培庄、楼带博给出了模糊控制器的数学定义,并提出了可响应问题。李宝绥等人用连续数字仿真方法,研究了典型模糊控制器的性能。清华大学的郑维敏教授等利用模糊集理论分析了模糊控制器的鲁棒性等。近年来,国内外学者在研究自校正、自学习的模糊控制器、分层分级的模糊控制方面,以及专家系统与模糊控制结合等问题上都取得了一定的进展。

但是,模糊工程无论在理论上和实用上都是一门年轻的科学,正处于不断发展和完善的阶段,不像经典调节理论和近代控制理论已形成了较完善的理论体系。正因为它的不完善和正在发展,也说明了它的潜力很大、前途无量。

另一方面,模糊控制虽有其独特的优点,但并不能取代传统的控制方法,而是作为后者的补充和改进。现在已有人尝试把两者结合起来,构成了一种新型的调节器例如 Fuzzy-PI 调节器,自适应,自学习 Fuzzy 调节器等。这种取长补短的思路是值得探索的。

§1-5 模糊控制工程的特点

前面曾提到:人类的很多思维活动及很多生产过程是不能用确定性数学来描述的。因此,由于客观的需要,才诞生了数学的一个重要分支——模糊数学及模糊数学的一个重要应用领域——模糊控制工程。

人们注意到,对于很多复杂的,多因素影响的生产过程,即使不知道该过程的数学模型,有经验的操作人员也能够根据长期的实地观察和操作经验进行有效的控制,而采用传统的自动控制方法效果并不理想。

例如:要控制一个燃油加热的热水器,使水温保持在一定范围内。这个看来很简单的问题,如果仔细分析起来是受到多种因素的影响的。如进水水温和压力、用水量的多少、气温、水质等。一个有经验的操作工可以根据对这些因素的观察和测量来调节燃油阀门,达到控制水温的目的。因为他们经过长期的操作,已经在头脑中形成了一整套控制这种热水器的经验。这些经验可以总结成一组控制规则。例如:水温偏高,减少燃油阀门;水温偏低,加大燃油阀门;进水量大,加大燃油阀门;气温上升,减少燃油阀门等。

这些规律虽然带有一定的主观性和模糊性,但往往是简单易行,行之有效的。

模糊工程的任务正是要用计算机来模拟这种人的思维和决策方式,对这些复杂的生产过程进行控制和操作。

为了实现这个目的,首先要到生产现场仔细观察工艺过程和操作人员的操作情况,并和有关人员交谈讨论,认真查阅有关生产记录和报表曲线,然后总结出一套生产现场的手动控制策略。这些策略是用定性的、不精确的模糊语言来表达的控制规则。然后再应用一系列的模糊控制算法,得到一组确定性的模糊控制表。例如前例燃油加热器的控制,应该得到:如果水温偏差多少度,则燃油阀门开度变化多少度,组成一系列的定量条件语句。这样就可通过检测出的温度偏差,输入计算机进行计算,然后输出指令去操作阀门开度。

由以上的简述可以看出模糊控制工程有以下的特点：

(1)模糊工程的计算方法虽然是运用模糊集理论进行的模糊算法，但最后得到的控制规律是确定性的、定量的条件语句。

(2)不需要知道被控对象的数学模型，因为对某些系统来说，建立数学模型是很困难的，甚至是不可能的。

(3)与传统的控制方法相比，更接近于人的思维方法和推理习惯。因此便于现场操作人员的理解和使用，便于人机对话以得到更有效的控制规律。

(4)模糊工程与计算机密切相关。从控制角度上来看，它实际上是一个由很多条件语句组成的软件控制器。目前，模糊控制还是应用二值逻辑的计算机来实现，模糊规律经过运算，最后还是进行确定性的控制。

近年来，国内外已在进行所谓第六代计算机——模糊逻辑计算机和推理机的研制，并应用这种推理机对模糊工程进行一些实验性的研究，取得了显著的进展。我们相信，一旦这种计算机实用化以后，必将对模糊控制工程甚至于整个控制工程产生深远的影响。由于这种计算机和推理机尚未普遍应用，因此本书暂以前一种控制方法的论述为主，即用一般的计算机，通过编制程序实现模糊控制。

第二章　普通集合和模糊集合

§2-1　概　　述

人类社会的发展取决于社会生产力的不断提高，而生产力的提高又促使数学得到了发展。人类从结绳记事的时代逐步发展到现在的计算机时代，在对数学的认识上通过了“模糊—精确—模糊”的漫长历程。在生产力低下在原始社会，我们的祖先对于“数”的认识只有多和少的模糊概念，至于多多少和少多少则没有一个明确的界限，因此那时的数学概念只能停留在朦胧的混沌阶段。随着生产力的发展和科学计数法的应用，人们对数的多和少的概念就有了精确的计数方法，从而数学进入了它的全盛时期。但是，事物总是一分为二的，精确并不是永远都是需要的。对于具体的某一件事，有时用模糊的概念去描述要远比用精确的语言去描述更能表现其本质。特别是最近几年来模糊数学的蓬勃发展更使“模糊”这个词正式走进了数学王国的殿堂。

精确数学是建立在集合论的基础上，即是普通集合论，而模糊数学则是建立在模糊集合论的基础上。本章试图通过学习普通集合论的一些基本知识然后用类比对偶的方法去学习模糊集合论的基本知识，并为以后的学习打下一个良好的基础。

§2-2　普通集合的定义及其描述

康托(Cantor)创建的集合论是现代数学的基础。现在人们已经越来越广泛而深入地应用集合的概念。为了以后学习和讨论的方便和需要，本节将对集合的定义及其描述作一简单介绍，需要深入了解集合论的读者可进一步找有关参考资料进行学习和研究。

一、论域

我们在考虑一个具体问题时，总是要先把这个问题局限在一定的场合或某个特定的范围内，人们通常把这个范围称之为“论域”。并且常常用大写字母 U、E、X、Y 等来表示。例如我们在讨论自然数范围内的问题时，则把自然数这个范围称为讨论问题的论域。

论域中每个对象叫元素，通常用小写字母 a、b、c、x、y 等来表示。如上例中的自然数论域中的 1，2，3 等数则是其中的一些元素。

二、集合

在某一论域中，由具有某种特定性质的具体的或抽象的事物(即元素)之全体叫做该论域中的一个集合，一般用大写字母 A、B、C 等表示。例如给定自然数论域 N，那末小于 10 的自然

数就组成了一个集合，其中的元素就是 1 至 9 等 9 个数。

三、集合的描述

对于一个集合 A 来说，某一事物 x 或者是 A 的元素，我们说 x 属于 A，记作 $x\in A$；或者 x 不是 A 的元素，我们说 x 不属于 A，记作 $x\overline{\in} A$（有的资料上记作 $x\notin A$）。二者必居其一并且只居其一。那么如何来描述集合呢？常用的有如下二种方法：

1. 穷举法（也称列举法，枚举法）：把组成集合的所有元素都列写在大括号内。例如上例的集合则可记作 $A=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$，或记作 $A=\{1,2\cdots,9\}$。当然对于元素个数有限的集合用穷举法是可行的，但对于元素个数为无限的集合时，穷举法则显然不能用了，而只能采用第二种方法——"描述法"描述了。

2. 描述法：集合 A 是由具有某种性质的元素或由满足某种条件的元素组成时，则常常用下面的形式来表示：$A=\{x|x$ 具有的性质或应满足的条件$\}$。例如 $A=\{x|x^2-1=0\}$ 就是表示 A 是由方程 $x^2-1=0$ 的解的全体所组成的集合。又如 $A=\{x|x$ 是中国人$\}$则是表示 A 是由全体中国人所组成的一个集合。再如 $A=\{x|x$ 是质数$\}$则表示 A 是由所有质数所组成的集合。

显而易见，对于个数有限或简单的元素的集合可以采用穷举法也可采用描述法表示，而对于元素个数无限的集合或较复杂的集合则只能采用描述法表示。

3. 几种特殊的集合：有二类较为特殊的集合，对以后的学习影响较大，有必要单独加以说明。

(1)全集：由论域 U 中的所有元素所组成的集合称为 U 上的全集，通常记作 U 或 I。例如论域 U 为有理数，那么由所有分数构成的集合则是 U 上的全集。

(2)空集：不含论域 U 中的任何一个元素的集合称为 U 上的空集，记作 $\varnothing$。例如论域 U 为实数，那么集合 $A=\{x|x^2+1=0,x\in U\}$ 则是 U 上的一个空集，实际上方程 $x^2+1=0$ 在实数范围内无解。

§2-3 普通集合的运算

既然集合是由一定的元素所组成，那么集合之间由于所构成的元素的异同而有各种不同的关系，我们把这种关系称之为集合的运算。

一、集合的相等

同一论域上的二个集合 A 和 B，如果组成 A 和 B 的元素完全相同，我们则说 A 等于 B（或 B 等于 A），记作 $A=B$（或 $B=A$）。例如实数论域 U 上有 $\{x|x^2-1=0\}=\{-1,1\}$。

二、子集

如果集合 A 中的元素同时也都是集合 B 中的元素，那么我们则说 A 是 B 的一个子集，记作 $A\subseteq B$，读作 A 包含在 B 中；或记作 $B\supseteq A$，读作 B 包含 A。显然 $A\subseteq A$。例如：$A=\{x|x$ 是中国人$\}$，$B=\{x|x$ 是亚洲人$\}$，则有 $A\subseteq B$。又例如论域 U 上的集合 A，显然有 $A\subseteq U$。为了理论叙述上的方便和完整起见，我们规定空集是任何集合的子集，即 $\varnothing\subseteq A$。

如果 A 是 B 的子集且 B 中至少有一个元素不属于 A，则我们称 A 是 B 的真子集。记作 $A \subset B$。例如：$A=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$，$B=\{x|x$ 是小于 20 的自然数$\}$，则有 $A \subset B$。因为 B 中的 10~19 等数确实没有包含在 A 中。

要证明 $A \subseteq B$ 或 $A \subset B$，只要首先假设 $x \in A$，然后证明 $x \in B$，那末就可证得 $A \subseteq B$。如果再能证得如有 $x \in B$ 但 $x \overline{\in} A$，则说明 $A \subset B$。

要证明二个集合相等可先证明 $A \subseteq B$，再证明 $B \subseteq A$，则说明 $A=B$。

三、余集

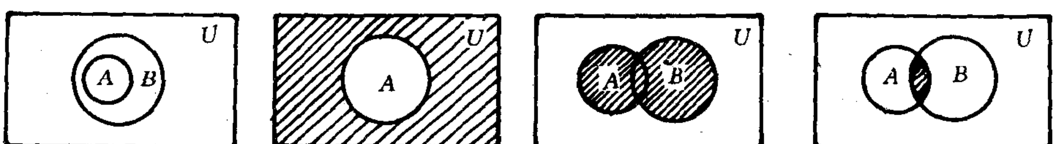
论域 U 上集合 A 的余集集记作 $\overline{A}$，其定义为：$\overline{A}=\{x|x \in U$ 但 $x \overline{\in} A\}$。例如 $U=\{1,2,3,4\}$，$A=\{1,3\}$，则 $\overline{A}=\{2,4\}$。显然 $\overline{U}=\psi$，$\overline{\varnothing}=U$。

四、并集（或和集）

设 A 和 B 是论域 U 上的二个集合，那末由组成 A 和 B 的所有元素所组成的一个较大的集合称作 A 与 B 的并集或和集。记作 $A \cup B$。例如 $U=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$，$A$，$B$ 是论域 U 中的集合且 $A=\{x|x$ 是质数$\}$，$B=\{x|x$ 是偶数$\}$，那么 $C=A \cup B=\{2,3,4,5,6,7,8$
注意，A，B 中的相同元素在并集中只计一个。如上例中的元素 2 在 C 中只出现一次。

五、交集（或通集）

设 A 和 B 是论域 U 上的二个集合，那末由既属于 A 又属于 B 的元素所组成的集合称作 A 与 B 的交集或通集。记作 $A \cap B$，例如在论域 $U=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ 中的集合 $A=\{x|x$ 是质数$\}$。$B=\{x|x$ 是隅数$\}$，那么 $C=A \cap B=\{2\}$。如果 $A \cap B=\varnothing$，我们则说 A 与 B 不相交，而当 $A \cap B \neq \varnothing$ 时，则称 A 与 B 相交。



(a) $B \supseteq A$　(b) $\overline{A}$　(c) $A \cup B$　(d) $A \cap B$

图 2-1 "并"、"交"、"余"运算的"文氏图"表示

不难证明，"并"、"交"、"余"等运算具有下面的一些性质：

1. 幂等律：$A \cup A=A$，$A \cap A=A$；
2. 结合律：$(A \cup B) \cup C=A \cup (B \cup C)$，$(A \cap B) \cap C=A \cap (B \cap C)$；
3. 交换律：$A \cup B=B \cup A$，$A \cap B=B \cap A$；
4. 分配律：$A \cup (B \cap C)=(A \cup B) \cap (A \cup C)$；
   $A \cap (B \cup C)=(A \cap B) \cup (A \cap C)$；
5. 同一律：$A \cup \varnothing=A$，$A \cup U=A$；
6. 基元律：$A \cup U=U$，$A \cap \varnothing=\varnothing$；

7. 补全律：$A\cup\overline{A}=U, A\cap\overline{A}=\varnothing$；

8. 吸收律：$A\cup(B\cap A)=A, A\cap(B\cup A)=A$；

9. 德・摩根律：$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}, \overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$；

10. 双重否定律：$A=A$；

11. 互反律：$\overline{U}=\varnothing, \overline{\varnothing}=U$。

上面列举的 11 条性质中，U 是论域，$\varnothing$是空集，A、B、C 是 U 中的任意集合。

"并"、"交"、"余"等运算可用所谓的"文氏图"来表示，见图 2-1。

§2-4 集合的特征函数、幂集和势

如前所述，论域 U 上的一个元素 x 和 U 上的某个集合 A 的关系只能有 $x\in A$ 和 $x\overline{\in}A$ 二种可能的情况。因此集合 A 与元素 x 的关系可以用一个函数来描述，我们称之为 A 的特征函数 $C_A(x)$，其定义如下

$$C_A(x)=\begin{cases}1 & 当\ x\in A\\ 0 & 当\ \overline{\in}\ A\end{cases} \tag{2-1}$$

易见，集合 A 完全由它的特征函数来确定，也就是说，当且仅当 $C_A(x)=C_B(x)$时，有 $A=B$。集合 A 的特征函数的图形如图 2-2 所示。

另外，我们还可通过简单的证明（证明留给读者去完成）得出其有关集合的特征函数的一些重要性质：

1. $A=U\Leftrightarrow C_A(x)\equiv1, A=\varnothing\Leftrightarrow C_A(x)\equiv0$；
2. $A\subseteq B\Leftrightarrow C_A(x)\leqslant C_B(x)$；
3. $C_{\overline{A}}(x)\Leftrightarrow1-C_A(x)$；
4. $C_{A\cup B}(x)=\max(C_A(x),C_B(x))$；
5. $C_{A\cap B}(x)=\min(C_A(x),C_B(x))$。

符号"$\Leftrightarrow$"就是数学上常用的"充要条件"。max 和 min 分别表示"取大"，"取小"运算。

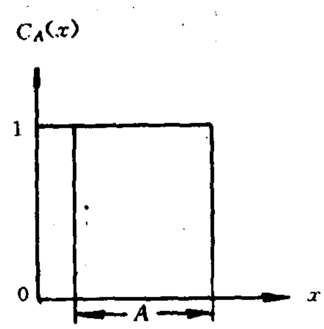


图 2-2 集合 A 的特征函数

从特征函数的定义可见，特征函数的值域只是$\{0,1\}$二个可取值，从数学角度看，它属于二值逻辑范畴，从控制的角度来看，它是一个开关函数。另外，也可把 A 的特征函数看作是集合 A 的一种描述方法，因此连同前述的穷举法和描述法，那么描述集合可有三种表示法。

下面对集合的一些基本概念再作一些简要的叙述，其中幂集与势是二个较为重要的内容。

所谓幂集，简言之就是集合的集合。因为从另一个角度来看，论域U上的所有子集可以把它们看作元素，再由这些元素所构成的集合就是幂集，记作 $P(U)$。例如：$U=\{0,1\}$，那么 U 的子集有$\varnothing$，U，$\{0\}$，$\{1\}$，于是 U 的幂集 $P(U)=\{\{0,1\},\{0\},$

$\{1\},\varnothing\}$。

同理可以构成幂集的幂集，记作 $P(P(U))=P^2(U)$，$P(P^2(U))=P^3(U)$ 等等。

所谓集合的"势"，简言之就是集合中元素的数目。如果集合 A 中的元素个数为 n，我们则说 A 的势为 n，记作 $\#A=n$。对于幂集的势，有以下公式

$$\#P(U)=2^{\#U} \tag{2-2}$$

若 $\#U=n$，则

$$\#P(U)=2^n \tag{2-3}$$

关于元素个数为无限多的集合的势，由于本书篇幅所限，就不作介绍了，有兴趣的读者可参看有关集合论的专著。

§2-5 集合的直积、关系和关系图

一、笛卡尔积(直积)

为了更好地理解笛卡尔积(又称直积)的概念，我们首先讨论有序 n 元组。

所谓有序 n 元组是由 n 个具有给定次序的个体组成的序列，记作 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的形式，其中的第 i 个元素 x_i 常称为该有序 n 元组的第 i 个坐标。当 $n=2$ 时，有序二元组 (x,y) 被称为序偶。序偶的一个熟悉的例子是可以表示平面上唯一确定的一个点。例如，序偶 $(1,1)$、$(2,3)$ 和 $(3,4)$ 均表示平面上不同的点，显然两个序偶相同必须是对应坐标相同。

这里必须注意的是一个有序 n 元组不是由 n 个元素组成的集合，前者对元素的排列次序有严格要求，而集合的元素则没有此要求。例如序组 $(a,b,c)\neq(b,a,c)\neq(c,b,a)$，但集合 $\{a,b,c\}=\{b,a,c\}=\{c,b,a\}$。

因此两个有序 n 元组 $(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 和 $(b_1,b_2,\cdots,b_n)$ 相等必须满足对应坐标相同，即 $a_i=b_i$ $(i=1,2,\cdots,n)$，有了有序 n 元组的概念后，下面给出笛卡尔积的定义。

定义 2.1 设 X 和 Y 是两个普通集合，X 和 Y 的笛卡尔积定义为 $X\times Y=\{(x,y)\mid x\in X,y\in Y\}$，一般地，$n$ 个集合 $X_1,X_2\cdots X_n$ 的笛卡尔积定义为

$$X_1\times X_2\times\cdots\times X_n=\{(x_1,x_2\cdots,x_n)\mid x_i\in X_i,i=1,2,\cdots,n\}$$

对上述定义作几点说明：

1. 直积是由 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 产生出的新集合。
2. 直积是以 n 元有序组 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 作为集合元素的。当 $n=2$ 时，直积是以序偶 (x,y) 为元素的集合。
3. 若所有的 $X_i(i=1,2,\cdots,n)$ 都是有限集，则直积 $X_1\times X_2\times\cdots\times X_n$ 也是有限集，且
$$\#(X_1\times X_2\times\cdots\times X_n)=(\#X_1)\cdot(\#X_2)\cdots(\#X_n)$$
4. 当所有的 X_i 都相同且等于 X 时，$X_1\times X_2\times\cdots\times X_n$ 可用 X^n 表示。

例 2-1：扑克牌有四种花色，它们组成一个集合 $X=\{$黑桃，红桃，方块，梅花$\}$，牌的号码有 13 种，组成一个集合 $Y=\{2,3\cdots,J,Q,K,A\}$ 而具体得到一张牌是由 X 和 Y 的元素搭配而成的，可以记作序偶(方块,4)，(红桃,Q)(梅花,K)等等，总共有 $(\#X)$。$(\#Y)=4\times13=52$ 种搭配。它们既不是 X 中元素，也不是 Y 中的元素，而是由 X 和 Y 搭配起来的新元素 (x,y)=(花色,号码)。这些元素的全体就构成了笛卡尔积 $X\times Y$。