现代变分原理

XIANDAI
BIANFEN
YUANLI

北京工业大学出版社

现代变分原理

牛庠均 著

北京工业大学出版社

内 容 简 介

本书系统地论述了固体力学范畴中，作为工程结构近似求解方法的理论基础的现代变分原理。在本书中采用统一的方法论述了弹性、非线性弹性、塑性、蠕变理论范畴的三类、二类、一类独立变量函数的现代变分原理。

本书共分九章，内容包括：固体力学概述；变分法简介；古典变分原理；广义变分原理；修正变分原理；可动边界变分原理；最佳剖分变分原理；断裂分析中的变分问题；模糊因子加权变分原理。

本书可作为理工类高校师生的教材，也可作为有关科学研究人员、工程技术人员的参考读物。

现代变分原理

牛庠均 著

*

北京工业大学出版社出版发行

各 地 新 华 书 店 经 销

北 京 育 才 印 刷 厂 印 刷

*

1992年7月第一版　1992年7月第一次印刷

850×1168毫米　32开　23.5印张　583千字

印数：1～2500册

ISBN7-5639-0202-3/O·10

定价：12.00元

（京）新登字212号

序

现代变分原理是利用变分问题来描述力学、物理、工程范畴中的现象的理论性学科。近30年来，变分原理得到了迅速的发展，特别是离散方法的进展，如有限元法、边界元法、变分方法、广义伽略金方法等对变分原理的发展产生了深刻的影响，以至于形成系统完整的现代变分原理学科。相辅相成，现代变分原理的发展也促进了力学、物理和数学中的某些分支学科的发展。

现代变分原理是以积分形式的数学模型来描述力学、物理、工程中的现象，与描述同一现象的微分形式的数学模型具有同等的重要意义。现代变分原理为各类离散方法，以及开拓新的离散方法提供了系统的理论基础，也为探讨解决当代工程结构中的疑难问题提供了理论基础。

当代变分原理研究的焦点集中在广义变分原理的研究与应用，修正变分原理的研究与应用，可动边界变分问题的理论研究与应用，自适应有限元与边界元法的误差分析的研究与应用，非结构领域中的变分问题的理论研究与应用，以及离散方法统一理论的研究与应用。

本书的内容正是针对上述的现代变分原理的核心内容，结合作者多年来的研究成果进行了系统的论述。第1～3章对固体力学、数学中的变分法、古典变分原理进行了概述。第四章论述了广义变分原理。基于势能密度与余能密度的新的表示式的基础上，根据变分条件、变分约束条件及一般约束条件之间的匹配原理，利用拉氏乘子法建立了三类变量函数的广义变分原理。然后利用规一化方法，从三类变量函数的广义变分原理中，既导出一

系列新型的变分原理，又导出已有的变分原理。第五章论述了修正变分原理。第六章为可动边界变分问题的论述。这一章为解决接触问题、弹塑性问题、断裂分析问题、自适应有限元边界元的误差分析等提供了理论依据。第七～八章为可动边界变分问题在离散分析与断裂分析中的应用。第九章论述了具有模糊因子的加权变分原理。这些原理是描述工程结构问题的最广泛的统一形式的数学模型，为编制大型通用系统软件提供了理论依据。同时，在数值分析过程中，通过不断改进数学模型的表达式，改进解的精度可达到理想的逼近解。

最后，向阅读部分原稿并提出许多宝贵意见的山东建筑工程学院院长姚传玺教授，以及在编辑过程中提出许多宝贵意见的周汝忠编审表示衷心的感谢。

于北京工业大学

牛 庠 均

1991年6月

目　录

第一章　固体力学概述

§1.1　概　述

固体在某些外界因素作用下，产生应力、应变和位移。研究应力、应变、位移之间的客观规律，形成了固体力学的基本理论方面的内容，应用这些基本理论去解决有关工程结构中的实际问题，形成了固体力学应用方面的内容。这些固体力学范畴内的问题，可以化为微分方程的边值问题来描述和解决，亦可在某些条件下化成与之等价的泛函的变分问题来描述和解决。就固体力学而言，这种等价的变换是存在的。在解决固体力学范畴内的问题时，用求解微分方程边值问题的方法去处理问题，往往会遇到较多的困难，但化为与之等价的泛函的变分问题，用各种不同的近似方法去解决固体力学范畴内的问题，常常是方便的。当前由于经济发展的需要与计算技术的迅速发展，促使了固体力学中的变分原理的蓬勃发展。

为了分析、研究、建立和应用固体力学中的变分原理，本章概括介绍在解决固体力学范畴内的问题时，待解函数(应力函数、应变函数、位移函数）应满足的微分方程与边界条件。这些方程可分为四类：其一是平衡方程；其二是应力应变关系式；其三是应变位移关系式；其四是边界条件，包括已知的力的边界条件和已知的位移边界条件。

为了方便，采用卡氏张量符号表示固体力学中的物理量与几何量。

固体体系记为V，其边界记为$S=S_1+S_2$；在整体边界S_1上

作用着已知的表面力$\bar{P}_i$；在整体边界S_2上已知位移$\bar{u}_i$。

卡氏坐标系记为O $(x_i, i=1,2,3)$；

应力分量记为σ_{ij} $(i,j=1,2,3)$；

应变分量记为ε_{ij}；

有限变形的应变分量记为e_{ij}；

位移分量记为u_i；

体积应变记为$\varepsilon_{ii}=\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22}+\varepsilon_{33}$，这里符号$i$是哑标符号，在同一项中的足标符号相同时，表示该符号的数从1到3求和。

平均应力分量记为

$$\sigma_{cp}=\frac{1}{3}(\sigma_{11}+\sigma_{22}+\sigma_{33})=\frac{1}{3}\sigma_{ii}$$

平均应变分量记为

$$\varepsilon_{cp}=\frac{1}{3}(\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22}+\varepsilon_{33})=\frac{1}{3}\varepsilon_{ii}$$

应力偏张量分量记为$\sigma'_{ij}=\sigma_{ij}-\sigma_{cp}\delta_{ij}$；

应变偏张量分量记为$\varepsilon'_{ij}=\varepsilon_{ij}-\frac{\sigma_{cp}}{\varepsilon_{cp}}\delta_{ij}$，其中$\delta_{ij}$为克氏符号(Kronecker符号)，定义为

$$\delta_{ij}=\begin{cases}1 & i=j\\ 0 & i\neq j\end{cases}$$

应力速度分量记为$\dot{\sigma}_{ij}$；

应变速度分量记为$\dot{\varepsilon}_{ij}$，$\dot{e}_{ij}$；

位移速度分量记为$\dot{u}_i$；

固体密度记为ρ（单位体积的质量）；

固体的单位体积的体积力记为$\bar{F}_i$；

整体边界$S=S_1+S_2$的外法线的方向余弦记为l_j；

杨氏模数记为E；

波桑比记为ν；

剪切模量记为G；

拉梅系数记为

$$G=\frac{E}{2(1+\nu)},\quad \lambda=\frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$

$$T=\frac{1}{\sqrt{6}}\left[(\sigma_{11}-\sigma_{22})^2+(\sigma_{22}-\sigma_{33})^2+(\sigma_{33}-\sigma_{11})^2\right.$$

$$\left.+6\,(\sigma_{12}^2+\sigma_{23}^2+\sigma_{31}^2)\,\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$H=\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{2}}\left[(\dot{\varepsilon}_{11}-\dot{\varepsilon}_{22})^2+(\dot{\varepsilon}_{22}-\dot{\varepsilon}_{33})^2+(\dot{\varepsilon}_{33}-\dot{\varepsilon}_{11})^2\right.$$

$$\left.+\frac{3}{2}(\dot{\varepsilon}_{12}^2+\dot{\varepsilon}_{23}^2+\dot{\varepsilon}_{31})\right]^{\frac{1}{2}}$$

下面简要介绍求解固体力学问题时所需的基本方程，详细内容请参阅文献[1～17]。

§1.2 弹性力学

1.2.1 弹性力学的基本方程

在边界S_1上作用着已知表面力$\bar{P}_i$，在边界S_2上的已知位移$\bar{u}_i$和具有已知的体积力$\bar{F}_i$的固体体系，处于弹性静力平衡状态时，待解函数（应力函数、应变函数、位移函数）应满足下面四类基本方程：

（1）平衡方程

$$\sigma_{ij,j}+\bar{F}_i=0 \qquad (V) \qquad (1.1)$$

（2）应变位移关系式

$$\varepsilon_{ij}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)=\frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i}) \qquad (V) \qquad (1.2)$$

式中

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j}=u_{i,j}$$

（3）应力应变关系式

应变表示应力为

$$\sigma_{ij}=\frac{E}{1-2\nu}\varepsilon_{cp}\delta_{ij}+2G\varepsilon'_{ij} \qquad (V) \quad (1.3)$$

或为

$$\sigma_{ij}-a_{ijkl}\,\varepsilon_{kl}=0$$

应力表示应变为

$$\varepsilon_{ij}=\frac{1-2\nu}{E}\sigma_{cp}\delta_{ij}+\frac{1}{2G}\sigma'_{ij} \qquad (V) \quad (1.4)$$

或为

$$\varepsilon_{ij}-b_{ijkl}\sigma_{kl}=0$$

其中a_{ijkl}，b_{ijkl}为弹性常数，有

$$a_{ijkl}=a_{jikl}=a_{ijlk}=a_{klij}$$

$$b_{ijkl}=b_{jikl}=b_{ijlk}=b_{klij}$$

$$a_{ijkl}\,b_{klmn}=\delta_{mn}^{ij}=\begin{cases}1 & ij=mn\\ 0 & ij\neq mn\end{cases} \qquad (i,j,k,l=1,2,3)$$

对于各向异性弹性体而言，有21个弹性常数；对于各向同性弹性体而言，仅有两个独立弹性常数。

应力应变关系式亦可写为

$$\sigma_{ij}-\frac{\partial A(\varepsilon_{ij})}{\partial\varepsilon_{ij}}=0 \qquad (V) \quad (1.5)$$

和

$$\varepsilon_{ij}-\frac{\partial B(\sigma_{ij})}{\partial\sigma_{ij}}=0 \qquad (V) \quad (1.6)$$

其中$A(\varepsilon_{ij})$为弹性体的势能密度；$B(\sigma_{ij})$为弹性体的余能密度。

(4) 边界条件

已知力的边界条件为

$$\sigma_{ij}l_j-\bar{P}_i=0 \qquad (S_1) \quad (1.7)$$

已知位移边界条件为

$$u_i-\bar{u}_i=0 \qquad (S_2) \quad (1.8)$$

满足上述四类基本方程的待解函数是唯一的（刚体位移除外），称为弹性力学问题的真实解。

1.2.2 势能密度与余能密度

弹性体由于变形而具有弹性势能。对复杂应力而言，弹性势能密度为

$$A(\varepsilon_{ij})=\int_0^{\varepsilon_{ij}}\sigma_{kl}\mathrm{d}\varepsilon_{kl}=\frac{1}{2}a_{ijkl}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl} \tag{1.9}$$

弹性体具有的弹性余能密度为

$$B(\sigma_{ij})=\int_0^{\sigma_{ij}}\varepsilon_{kl}\mathrm{d}\sigma_{kl}=\frac{1}{2}b_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl} \tag{1.10}$$

弹性势能密度与余能密度具有互补性质，其互补条件为

$$A(\varepsilon_{ij})+B(\sigma_{ij})=\sigma_{ij}\varepsilon_{ij} \tag{1.11}$$

在$\sigma_{ij}-a_{ijkl}\varepsilon_{kl}=0$成立时，弹性势能密度可表示为

$$A(\varepsilon_{ij})=\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}-B(\sigma_{ij})=\frac{1}{2}a_{ijkl}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl} \tag{1.12}$$

在$\varepsilon_{ij}-b_{ijkl}\sigma_{kl}=0$成立时，弹性余能密度可表示为

$$B(\sigma_{ij})=\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}-A(\varepsilon_{ij})=\frac{1}{2}b_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl} \tag{1.13}$$

§1.3 有限变形弹性力学

1.3.1 有限变形弹性力学的基本方程

这里采用拉格朗日坐标系来描述有限变形弹性力学问题。

当固体处于静力的弹性有限变形状态时，待解函数应满足下面四类基本方程：

(1) 平衡方程

考虑到单元体表面面积变形的影响，有限变形的平衡方程为

$$[\sigma_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i})]_{,j}+\bar{F}_k=0 \qquad (V) \tag{1.14}$$

(2) 应变位移关系式

考虑到非线性的影响，有限变形的应变位移关系式为

$$e_{ij}=\frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i}+u_{k,i}u_{k,j}) \qquad (V) \quad (1.15)$$

(3) 应力应变关系式

假定变形过程中是等温过程，并且变形状态不依赖于加载过程。

假定用应变表示应力的函数为

$$\sigma_{ij}=\sigma_{ij}(e_{kl}) \qquad (V) \quad (1.16)$$

若

$$\frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial e_{kl}}=\frac{\partial\sigma_{kl}}{\partial e_{ij}} \qquad (1.17)$$

成立，一定存在势能密度$A(e_{ij})$。定义

$$\sigma_{ij}-\frac{\partial A(e_{ij})}{\partial e_{ij}}=0 \qquad (V) \quad (1.18)$$

假定用应力表示应变的函数为

$$e_{ij}=e_{ij}(\sigma_{kl}) \qquad (V) \quad (1.19)$$

若

$$\frac{\partial e_{ij}}{\partial\sigma_{kl}}=\frac{\partial e_{kl}}{\partial\sigma_{ij}} \qquad (1.20)$$

成立，则存在余能密度$B(\sigma_{ij})$。定义

$$e_{ij}-\frac{\partial B(\sigma_{ij})}{\partial\sigma_{ij}}=0 \qquad (V) \quad (1.21)$$

(4) 边界条件

已知力的边界条件为

$$\sigma_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j-\bar{P}_k=0 \qquad (S_1) \quad (1.22)$$

已知位移边界条件为

$$u_i-\bar{u}_i=0 \qquad (S_2) \quad (1.23)$$

满足上述基本方程的待解函数为有限变形弹性力学问题的真实解。

1.3.2 势能密度和余能密度

由(1.18)式可知，有限变形弹性体的势能密度为

$$dA(e_{ij})=\sigma_{kl}de_{kl} \tag{1.24}$$

当应变e_{ij}较小时，可略去(1.16)式展为e_{ij}的幂级数的高阶项，于是可得到应力应变线性关系式，即

$$\sigma_{ij}=a_{ijkl}e_{kl} \tag{1.25}$$

将此式代入(1.24)式积分可求得

$$A(e_{ij})=\int_0^{e_{ij}}a_{ijkl}e_{kl}de_{kl}=\frac{1}{2}a_{ijkl}e_{ij}e_{kl} \tag{1.26}$$

即为小应变时，有限变形弹性体的势能密度。

由(1.21)式可知，有限变形弹性体的余能密度为

$$dB(\sigma_{ij})=e_{kl}d\sigma_{kl} \tag{1.27}$$

当应变e_{ij}较小时，可略去(1.19)式展为幂级数的高阶项，仅取应力应变线性关系(1.25)式，其逆关系为

$$e_{ij}=b_{ijkl}\sigma_{kl} \tag{1.28}$$

将此式代入(1.27)式，积分后可得

$$\begin{aligned}B(\sigma_{ij})&=\int_0^{\sigma_{ij}}b_{ijkl}\sigma_{kl}d\sigma_{kl}\\&=\frac{1}{2}b_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl}\end{aligned} \tag{1.29}$$

再考虑到微元体的变形的影响，有限变形弹性体等效余能密度为[7~8]

$$B_n(\sigma_{ij},u_i)=\frac{1}{2}b_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl}+\frac{1}{2}u_{k,i}u_{k,j}\sigma_{ij} \tag{1.30}$$

§1.4 塑性力学的形变理论

1.4.1 形变理论的基本方程

塑性力学的形变理论不能准确的描述固体处于塑性状态的塑性性质，但是由于它具有运算简单，应用方便等优点，所以经常

被应用于实际问题之中。对于静力学问题，在满足简单加载和屈服条件下，固体处于塑性状态时，待解函数应满足下面塑性形变理论的基本方程：

(1) 平衡方程

$$\sigma_{ij,j}+\bar{F}_i=0 \qquad (V) \quad (1.31)$$

(2) 应变位移关系式

$$\varepsilon_{ij}=\frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i}) \qquad (V) \quad (1.32)$$

(3) 应力应变关系式

当采用应变表示应力时，假定应力应变关系式为

$$\sigma_{ij}=\sigma_{ij}(\varepsilon_{kl}) \qquad (V) \quad (1.33)$$

$$(i,j,k,l=1,2,3)$$

或定义为

$$\sigma_{ij}-\frac{\partial A}{\partial \varepsilon_{ij}}=0 \qquad (1.34)$$

A存在的充要条件是方程(1.33)式中的σ_{ij}与ε_{kl}必须满足

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}}=\frac{\partial \sigma_{kl}}{\partial \varepsilon_{ij}} \quad (i,j,k,l=1,2,3) \qquad (1.35)$$

的条件。

当采用应力表示应变时，假定应力应变关系式为

$$\varepsilon_{ij}=\varepsilon_{ij}(\sigma_{kl}) \qquad (V) \quad (1.36)$$

$$(i,j,k,l=1,2,3)$$

或定义为

$$\varepsilon_{ij}-\frac{\partial B}{\partial \sigma_{ij}}=0 \qquad (V) \quad (1.37)$$

B存在的充要条件是方程(1.36)式中的ε_{ij}与σ_{kl}必须满足

$$\frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial \sigma_{kl}}=\frac{\partial \varepsilon_{kl}}{\partial \sigma_{ij}} \quad (i,j,k,l=1,2,3) \qquad (1.38)$$

的条件。

(4) 边界条件

已知力的边界条件为

$$\sigma_{ij}l_j-\bar{P}_i=0 \qquad (S_1) \qquad (1.39)$$

已知位移边界条件为

$$u_i-\bar{u}_i=0 \qquad (S_2) \qquad (1.40)$$

1.4.2 应力应变关系类型

上述应力应变关系是一般的形式，下面介绍几种具体的应力应变关系式。

1. 割切模量理论

满足应力应变关系

$$\sigma'_{ij}=\mu\varepsilon'_{ij} \qquad (1.41)$$

的理论叫割切模量理论。其中μ为正值比例常数。

由(1.41)式有

$$\Sigma=\frac{\mu}{2}\Gamma \qquad (1.42)$$

其中

$$\Gamma^2=2\varepsilon'_{kj}\varepsilon'_{ij}，\quad \Gamma\mathrm{d}\Gamma=2\varepsilon'_{ij}\mathrm{d}\varepsilon'_{ij} \qquad (1.43)$$

$$\Sigma^2=\frac{1}{2}\sigma'_{ij}\sigma'_{ij}，\quad \Sigma\mathrm{d}\Sigma=\frac{1}{2}\sigma'_{ij}\mathrm{d}\sigma'_{ij} \qquad (1.44)$$

Σ与Γ为单值连续函数，且有

$$\Sigma=\Sigma(\Gamma) \qquad (1.45)$$

或

$$\Gamma=\Gamma(\Sigma) \qquad (1.46)$$

如图1-1所示。Σ与Γ 的关系式可用简单拉伸或简单剪切实验的结果决定。

由上述结果，方程(1.41)式可改写为

$$\sigma'_{ij}=\frac{\Sigma(\Gamma)}{\Gamma}\varepsilon'_{ij} \qquad (1.47)$$

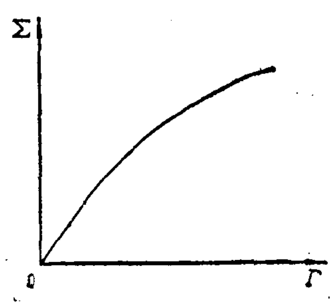

图1-1　Σ-Γ曲线