学习经济数学指导　备考硕士研究生指南

经济数学（微积分）
解题方法技巧归纳

松联工作室
毛纲源

华中理工大学出版社

学习经济数学指导　备考硕士研究生指南

经济数学（微积分）解题方法技巧归纳

松联工作室

毛纲源

华中理工大学出版社

（鄂）新登字第10号

图书在版编目(CIP)数据

经济数学(微积分)解题方法技巧归纳/毛纲源

武汉：华中理工大学出版社，1997年6月

ISBN 7-5609-1583-3

Ⅰ.经…

Ⅱ.毛…

Ⅲ.经济数学-解题方法与技巧-教学参考书

Ⅳ.O13

经济数学(微积分)解题方法技巧归纳

毛纲源

责任编辑：唐元瑜

华中理工大学出版社出版发行

(武昌喻家山　邮编：430074)

新华书店湖北发行所经销

武汉市皇冠印刷厂印刷

开本：850×1168　1/32　印张：16.5　字数：420 000

1997年6月第1版　1998年2月第2次印刷

印数：80001—13000

ISBN 7—5609—1583—3/O·174

定价：18.00元

内 容 提 要

本书将经济数学(微积分)的主要内容按问题分类,通过引例,归纳、总结各类问题的解题规律、方法和技巧。强调解决问题的思路与方法,以期引导学生对方法的灵活运用,达到举一反三的目的。

本书以讨论微积分中的方法为主,但对于微积分在经济中的应用给予充分重视,占有相当篇幅,它不同于一般的微积分教材、习题集和题解。

本书实例多,且类型广,梯度大。例题取材于两部分。一部分是人大"微积分"中的典型习题,另一部分是历届全国攻读硕士学位研究生入学考试数学试题,其中经济类的数学三、数学四和原数学四、数学五的考题绝大部分都已收入。

本书可供本(专)科学生学习经济数学(微积分)阅读与参考,对于自学者和有志攻读经济学和工商管理(即 MBA)硕士学位的青年,本书更是良师益友,对于从事经济数学(微积分)教学的教师也有一定的参考价值。

前　言

为帮助经济类和财政类在校学生和自学者学好经济数学(微积分);为给他们备考研究生提供一份复习资料,编写了“经济数学(微积分)解题方法技巧归纳”这本书。

本书将经济数学(微积分)的主要内容按问题分类,通过引例,归纳、总结各类问题的解题规律、方法和技巧。它不同于一般的教材、习题集和题解,自具特色。

本书实例较多,且类型广、梯度大。例题一部分取材于赵树嫄主编、中国人民大学出版社出版的“微积分”中的典型习题(习题的原题号在例序后用表示章序、类序(A 类还是 B 类)、题序和小题序的三个或四个文字后加上方括号标志。例如,例 3[$8A3(2)$]表示例 3 是人大“微积分”(第二版)第 8 章 A 类第 3 题的第 2 小题。)例题的另一部分取材于历届全国攻读硕士学位研究生入学考试数学试题,其中 1997 年数学(试卷)三、四和原数学四、五的考题(适用经济类、工商管理专业的考生)绝大部分都已收入[例序后用表示年份的 5 个文字后写上 4 或(和)5,或 3 或(和)4 加上方括号标志。例如,例 1[1989 年 4]表示例 1 是 1989 年原数学(试卷)4 中的考题。]。

今年起,原数学四、数学五分别更名为数学三、数学四。新的数学三和数学四考试科目没有变化。新的数学三增加考查一阶差分方程的内容,新的数学四考试内容是在数学三要求的基础上略去以下内容:(1)多元微积分学中的二重积分概念及其计算;(2)无穷级数;(3)常微分方程和差分方程(上述内容均用 * 号标出)。

采用人大“微积分”中的典型习题,是因为该书是目前我国文科类专业使用量最大的一本数学教材,习题部分准确地反映了学习经济数学(微积分)的基本要求,因此该书也被指定为研究生考

试的复习教材。通过这些例题的学习将有利于促进学生全面掌握经济数学(微积分)的基础知识、基本理论和基本方法,正确理解该课程的基本内容。

需查找人大"微积分"中习题解答的读者,请参看书末附录。

通过统考试题的研讨,使有志攻读硕士学位的同学"平战结合",了解考研试题的特点及其逐年发展趋势,从知识上,题型上,方法和技巧上作好应试准备,做到心中有数。这些考题一般并非都是难题,其突出特点是全面、准确地体现教学大纲的要求。不少试题的原型就是"微积分"中的习题。多做考题,并由此总结、归纳解题规律、方法和技巧,无疑,对于启迪思维,开发智力,提高能力及加深经济数学(微积分)的理解都是大有好处的。

考虑到经济类和工商管理类的学生和自学者学习经济数学(微积分)的困难,编写此书时,在选材、理论推导、文字叙述等诸多方面尽量适应其特点。此外,还在不少例后加写注意部分,以总结解题经验,避免常犯错误。

本书可供全日制大专院校、电大、职大、函大、夜大等广大学生学习经济数学(微积分)时阅读和参考;对于自学者和有志攻读经济学和工商管理(即 MBA)硕士研究生的青年,本书更是良师益友;对于从事经济数学(微积分)教学的教师也有一定的参考价值。

鉴于目前有关读物尚缺,适用于理工科学生阅读的高等数学参考读物,文科学生阅读多有不便。作者使用多年来在教学过程中所积累的资料,汇集自1987年以来原数学四、五及1997年数学三、四的绝大部分考题和其他试卷的部分考题,编写成这本书,为推进我国高校数学教学改革尽微薄之力。希望它能激起在校和自修的广大同学学习经济数学(微积分)的兴趣,这是作者最大的心愿。

限于作者水平,书中不当之处在所难免,敬请读者不吝赐教!

毛纲源

1997 年 3 月于武汉工业大学

目　录

第一章 函　数

§1.1 函数定义域的求法

(一)排除法

若函数单用数学式子表示,又没给出实际意义,则其定义域就是使这个数学式子有意义的自变量的取值范围,常用"排除法"求出。即去掉使数学式子没有意义的自变量的取值部分,就得到该函数的定义域。常用以下几条法则去掉之。

(Ⅰ)分式中分母不能为零;

(Ⅱ)偶次根号下的被开方数非负,即应大于或等于零;

(Ⅲ)对数式的真数不能为负和零,即应大于零;

(Ⅳ)反正弦(反余弦)符号下的函数式,其绝对值不能大于1。

例1 [1A28(1)]确定函数 $y=\sqrt{9-x^2}$ 的定义域。

解 由 $9-x^2\geqslant 0$ 得到 $x^2\leqslant 9$,即 $|x^2|\leqslant 9$,两端开平方,有 $|x|\leqslant 3$,于是所求的定义域为 $|x|\leqslant 3$,即 $-3\leqslant x\leqslant 3$。

注意 这里使用了不等式运算的下述法则:

若 $a>b$,且 a,b 为正数,n 为正整数,则 $\sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}$。

由 $x^2\leqslant 9$,得到 $x\leqslant \pm 3$,这是常见错误。

例2 [1992年5]已知 $f(x)=\sin x$,$f[\varphi(x)]=1-x^2$,求 $\varphi(x)$ 及其定义域。

解 由 $f(x)=\sin x$,得到 $f[\varphi(x)]=\sin[\varphi(x)]=1-x^2$,于是 $\varphi(x)=\arcsin(1-x^2)$。从而 $|1-x^2|\leqslant 1$。解之得到 $x^2\leqslant 2$,即 $|x|^2\leqslant 2$,故所求的定义域为 $|x|\leqslant\sqrt{2}$,即 $[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$。

注意 不等式一端为 x^2,应先化成正数平方,即 $x^2=|x|^2$,再

在不等式两端开方。

例 3 [1A28(7)]求 $y_1=\sqrt{\lg[(5x-x^2)/4]}$的定义域。

解 注意到所给对数的底数大于1，其真数部分满足 $(5x-x^2)/4\geqslant 1$，即$(x-4)(x-1)\leqslant 0$，由此得到

$$x-4\geqslant 0, x-1\leqslant 0;\quad 或\quad x-4\leqslant 0, x-1\geqslant 0。$$

前一不等式组无解，后一不等式组的解为 $1\leqslant x\leqslant 4$，此为所求的定义域。

例 4 求 $y_2=1/\sqrt{\lg[(5x-x^2)/4]}$的定义域。

解 在上例y_1的定义域中去掉使$(5x-x^2)/4=1$的两点 $x=1,4$ 即得 y_2 的定义域为$(1,4)$。

例 5 分别求出下列两函数的定义域：

$$(1) y_3=\sqrt{\log_{\frac{1}{2}}(x-1)},\qquad (2) y_4=1/\sqrt{\log_{\frac{1}{2}}(x-1)}。$$

解 因所给对数的底数为$\frac{1}{2}<1$，故 y_3 与 y_4 中对数的真数分别满足

$$0<x-1\leqslant 1,\qquad 0<x-1<1,$$

故 y_3 与 y_4 的定义域分别为$(1,2]$与$(1,2)$。

注意 由上三例可知：

(1) 偶次根式的被开方数是对数式，当对数底数大于 1 时，则该对数式的真数只能取大于、等于 1 的实数；当其底数小于 1 时，只能取$(0,1]$内的实数。

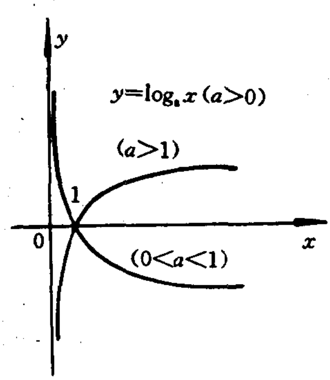

图 1.1.1

(2) 偶次根式的被开方数为对数式，且该对数式为分式的分母，若其底数大于 1，则其真数取大于 1 的实数；若其底数小于 1，则只能取$(0,1)$内的实数。

其理由可由图 1.1.1 说明。

例6 [1A56]分别就$a=2$，$a=1/2$，$a=-2$讨论$y=\lg(a-\sin x)$是不是复合函数？如果是，求其定义域。

解 当$a=2$时，$y=f(x)=\lg(a-\sin x)=\lg(2-\sin x)$，显然$f$的定义域$D(f)=(-\infty,+\infty)$。因$|\sin x|\leqslant 1$，故$\varphi(x)=2-\sin x>2-1=1>0$，即$\varphi(x)$的值域$Z(\varphi)=[1,3]$。因而$D(f)\cap Z(\varphi)=[1,3]$为非空集，故$y$是复合函数。其定义域为一切实数，因当$-\infty<x<+\infty$时，均有$2-\sin x>0$。

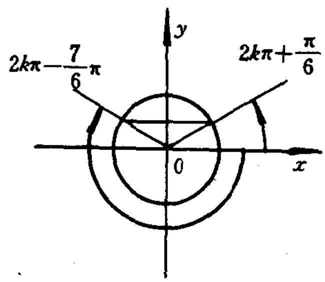

图 1.1.2

当$a=1/2$时，$y=f(x)=\lg\left(\frac{1}{2}-\sin x\right)$。由$\varphi(x)=\frac{1}{2}-\sin x>0$，即$\sin x<\frac{1}{2}$，在$(0,2\pi)$内有$-\frac{7\pi}{6}<x<\frac{\pi}{6}$，如图 1.1.2 所示。其定义域为

$$2k\pi-\frac{7\pi}{6}<x<\frac{\pi}{6}+2k\pi\quad(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)。$$

因$D(f)\cap Z(\varphi)$为非空集，故y为复合函数。

当$a=-2$时，无论x取何值时，均有$\varphi(x)=-2-\sin x<0$，即$Z(\varphi)=(-\infty,0)$，而$y=f(x)=\lg(-2-\sin x)$的$D(f)$为空集，故$D(f)\cap Z(\varphi)$为空集，y不是复合函数。

例7 已知$f(x)=\frac{1}{1+x}$，求$f[f(x)]$的定义域。

解 由题设，有

$$f[f(x)]=\frac{1}{1+f(x)}=\frac{1}{1+[1/(1+x)]}$$

要使上式有意义，应有

$$\begin{cases}1+x\neq 0\\ 1+\dfrac{1}{1+x}\neq 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}1+x\neq 0\\ \dfrac{x+2}{1+x}\neq 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x\neq -1\\ x\neq -2\end{cases}$$

故所给函数的定义域为不等于-1和-2的一切实数。

注意 如把$\dfrac{1}{1+1/(1+x)}$变形为$\dfrac{x+2}{x+1}$，由此得到定义域为不等于1的所有实数，那就不对了。事实上在变形时，已有约束$x+1\neq 0$，即$x\neq -1$。

(二)交集法

若函数的表示式由几个函数经四则运算所组成，则其定义域是各函数定义域的交集(公共部分)。为求出此交集，应根据各个函数的限制条件列出不等式组，其公共解就是所求的定义域。

例 8 [1A28(8)]求函数$y=\dfrac{\arccos[(2x-1)/7]}{\sqrt{x^2-x-6}}$的定义域。

解 要使y有意义，必有

$$\begin{cases}\left|\dfrac{2x-1}{7}\right|\leqslant 1\\ x^2-x-6>0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}-1\leqslant\dfrac{2x-1}{7}\leqslant 1\\ (x+2)(x-3)>0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}-3\leqslant x\leqslant 4\\ \begin{cases}x+2>0\\ x-3>0\end{cases}\text{或}\begin{cases}x+2<0\\ x-3<0\end{cases}\end{cases}$$

前一不等式组的解为$x>3$；后一不等式组解为$x<-2$。将其分别与$-3\leqslant x\leqslant 4$求交，即求不等式组

$$\begin{cases}-3\leqslant x\leqslant 4\\ x>3\end{cases},\quad \begin{cases}-3\leqslant x\leqslant 4\\ x<-2\end{cases}$$

的解，易知其解分别为$(3,4]$，$[-3,-2)$，因而所求的定义域为$(3,4]$或$[-3,-2)$，即为$[-3,-2)\cup(3,4]$。

例 9 求$y=1/\sqrt{\cos x}+\lg(25-x^2)$的定义域。

解 要使y有意义必有$\cos x>0$且$25-x^2>0$。

由$\cos x>0$得到$2k\pi-\dfrac{\pi}{2}<x<2k\pi+\dfrac{\pi}{2}$ (k为整数)。

由$25-x^2>0$，即$|x|^2<25$，得到$|x|<5$，即$-5<x<5$。

$k=0$ 时上不等式变为 $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$ 与 $-5<x<5$ 求交得 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$；$k=1$ 时，上一不等式变为 $\frac{3\pi}{2}<x<\frac{5\pi}{2}$ 与 $-5<x<5$ 求交得 $\left(\frac{3\pi}{2},5\right)$；$k=-1$ 时，上一不等式变为 $-\frac{5\pi}{2}<x<-\frac{3\pi}{2}$ 与 $-5<x<5$ 求交得 $\left(-5,-\frac{3\pi}{2}\right)$。于是 y 的定义域为

$$\left(-5,-\frac{3\pi}{2}\right)\cup\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{3\pi}{2},5\right)。$$

(三)并集法

分段函数的定义域是各段函数定义域的并集。

例 10 [1B7]设 $f(x)=\begin{cases}1, 0\leqslant x\leqslant 1;\\ 2, 1<x\leqslant 2。\end{cases}$（$x>2$ 及 $x<0$ 无定义。）求 $g(x)=f(2x)+f(x-2)$ 的定义域。

解 先求出 $f(2x)$ 与 $f(x-2)$ 的定义域。

因 $f(x)=\begin{cases}1, 0\leqslant x\leqslant 1;\\ 2, 1<x\leqslant 2,\end{cases}$

故 $f(2x)=\begin{cases}1, 0\leqslant 2x\leqslant 1;\\ 2, 1<2x\leqslant 2,\end{cases}=\begin{cases}1, 0\leqslant x\leqslant 1/2;\\ 2, 1/2<x\leqslant 1;\end{cases}$

$f(x-2)=\begin{cases}1, 0\leqslant x-2\leqslant 1;\\ 2, 1<x-2\leqslant 2,\end{cases}=\begin{cases}1, 2\leqslant x\leqslant 3;\\ 2, 3<x\leqslant 4。\end{cases}$

因 $f(2x)$ 与 $f(x-2)$ 为分段函数，其定义域分别为

$$\left[0,\frac{1}{2}\right]\cup\left(\frac{1}{2},1\right]=[0,1]; \quad [2,3]\cup(3,4]=[2,4]$$

显然其交为空集，即 $g(x)$ 的定义域为空集，因而 $g(x)$ 无意义。

例 11 [1A36(2)]确定下列函数的定义域，并作出函数的图形：

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{1-x^2}, |x|\leqslant 1;\\ x-1, \quad 1<|x|<2。\end{cases}$$

解 $f(x)$ 的定义域是 $|x|\leqslant 1$ 与 $1<|x|<2$ 的并集。

因 $1<|x|<2$ 为 $|x|<2$ 与 $|x|>1$ 之交，而 $|x|>1$ 为 $x>1$ 或 $x<-1$，于是 $1<|x|<2$ 为下列两不等式组

$$\begin{cases}-2<x<2\\x>1\end{cases},\quad\begin{cases}-2<x<2\\x<-1\end{cases}$$

之解 $1<x<2$ 与 $-2<x<-1$ 的并。再将它们与 $|x|\leqslant 1$ 即 $-1\leqslant x\leqslant 1$ 求并，得到所求的定义域为

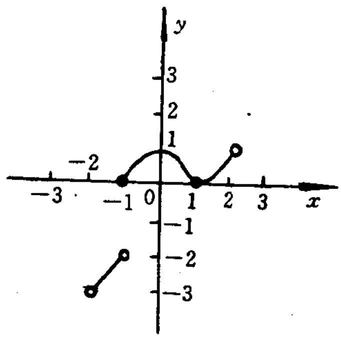

图 1.1.3

$$(-2,-1)\cup[-1,1]\cup(1,2)=(-2,2)。$$

其图形如图 1.1.3 所示。

（四）代入法

已知 $f(x)$ 的定义域，用代入法可求出 $f[\varphi(x)]$ 的定义域。

例如，设 $f(x)$ 的定义域为 $a<x<b$，将 $\varphi(x)$ 替换不等式中的 x，得到 $a<\varphi(x)<b$，由此解出 x，即得 $f[\varphi(x)]$ 的定义域。

例 12 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $[1,2]$，试求 $f(ax)$ $(a\neq 0)$ 的定义域。

解 由 $f(x)$ 的定义域为 $[1,2]$，得到 $1\leqslant ax\leqslant 2$。

(1) 当 $a>0$ 时，有 $\dfrac{1}{a}\leqslant x\leqslant\dfrac{2}{a}$，即 $f(ax)$ 的定义域为 $\left[\dfrac{1}{a},\dfrac{2}{a}\right]$。

(2) 当 $a<0$ 时，有 $\dfrac{2}{a}\leqslant x\leqslant\dfrac{1}{a}$，即 $f(ax)$ 的定义域为 $\left[\dfrac{2}{a},\dfrac{1}{a}\right]$。

例 13 已知 $f(x)$ 的定义域为 $[1,2]$，求 $f(1-\ln x)$ 的定义域。

解 将 $1-\ln x$ 代换 $1\leqslant x\leqslant 2$ 中的 x，得到

$$1\leqslant 1-\ln x\leqslant 2 \quad 即 \quad 1/e\leqslant x\leqslant 1。$$

所求定义域为 $[1/e,1]$。

（五）由自变量的实际意义确定

例 14 ［1A42］在半径为 r 的球内嵌入一圆柱，试将圆柱的体积表为高的函数，并确定此函数的定义域。

解 设 V 为圆柱体体积，h 为其高，r 为球之半径，r' 为圆柱底面半径，则

$$r'=\sqrt{r^2-(h/2)^2}=\sqrt{r^2-h^2/4},$$

$$V=\pi(r')^2h=\pi h(r^2-h^2/4)。$$

因 $V>0$，故 $r^2-h^2/4>0$ 即 $0<h<2r$（圆柱体在球内，故其高必小于球的直径），此为 V 的定义域。

例 15 ［1992 年 4,5］设商品的需求函数为 $Q=100-5P$，其中 Q,P 分别表示需求量和价格。如果商品需求弹性的绝对值大于 1，则商品价格的取值范围是多大？

解 由弹性定义及题设有 $\left|\dfrac{-5P}{100-5P}\right|>1$，又由价格和需求量 $Q=100-5P$ 的实际意义可知，必有 $P\geqslant 0,Q\geqslant 0$。从而 $100-5P\geqslant 0$ 即 $P\leqslant 20$，于是

$$\left|\frac{-5P}{100-5P}\right|=\frac{5P}{100-5P}>1。$$

解之得到 $P>10$，又 $100-5P\neq 0$，故 $P\neq 20$，从而 $P<20$，所以价格 P 的变化范围为 $(10,20)$。

习题 1.1

1. 确定下列函数的定义域：

(1)［1A28(2)］$y=\dfrac{1}{1-x^2}+\sqrt{x+2}$；(2)［1A28(6)］$y=\dfrac{\lg(3-x)}{\sqrt{|x|-1}}$；

(3) $y=\arcsin\dfrac{2x-1}{15}+\dfrac{1}{\sqrt{\log_2(x-3)}}$；

(4)［1B4］$y=\dfrac{1}{\ln|x-5|}$；(5) $y=\sqrt{x^2(x^2-1)}$。