

● 非线性科学丛书 ●

非线性代数方程组 与定理机器证明

杨路 张景中 侯晓荣 著

上海科技教育出版社

本书出版由上海市新闻出版局
学术著作出版基金资助

78301.75

395636

非线性科学丛书

非线性代数方程组 与定理机器证明

杨路 张景中 侯晓荣 著



上海科技教育出版社

内 容 提 要

本书是“非线性科学丛书”中的一种,介绍参系数非线性代数方程组的构造性理论和求解算法。全书计分五章,即:导论,消去法基础,三角型方程组,一般多项式方程组,机器证明的例证法。其中有不少内容是作者的研究成果,尤其是5次以上代数方程的判定问题,作者在书中完全解决了这一几个世纪以来悬而未决的经典问题。本书可供理工科大学教师、高年级学生、研究生、博士后阅读,也可供自然科学和工程技术领域中的研究人员参考。

非线性科学丛书

非线性代数方程组与定理机器证明

杨 路 张景中 侯晓荣 著

上海科技教育出版社出版发行

(上海市冠生园路393号 邮政编码200233)

各地新华书店经销 上海市印刷六厂印刷

开本 850×1168 1/32 印张7.125 字数 173,000

1996年9月第1版 1996年9月第1次印刷

印数 1—3200本

ISBN 7-5428-1379-X/O · 126 定价:(精装本)14.00元

Advanced Series in Nonlinear Science

Nonlinear Algebraic Equation System
and
Automated Theorem Proving

Lu Yang & Jing-Zhong Zhang

Chengdu Institute of Computer Applications, Chengdu 610041, China

Guangzhou Normal University, Guangzhou 510400, China

Xiao-Rong Hou

Chengdu Institute of Computer Applications, Chengdu 610041, China

Shanghai Scientific and Technological Education
Publishing House, SHANGHAI, 1996

非线性科学丛书编辑委员会

主 编：郝柏林

副主编：郑伟谋 吴智仁

编 委：(按姓氏笔画为序)

丁鄂江	文志英	朱照宣
刘式达	刘寄星	孙义燧
杨清建	李邦河	张洪钧
张景中	陈式刚	周作领
赵凯华	胡 岗	顾 雁
倪皖荪	徐京华	郭柏灵
陶瑞宝	谢惠民	蒲富恪
霍裕平	魏荣爵	

出版说明

现代自然科学和技术的发展,正在改变着传统的学科划分和科学研究的方法。“数、理、化、天、地、生”这些曾经以纵向发展为主的基础学科,与日新月异的新技术相结合,使用数值、解析和图形并举的计算机方法,推出了横跨多种学科门类的新兴领域。这种发展的一个重要特征,可以概括为“非”字当头,即出现了以“非”字起首而命名的一系列新方向和新领域。其中,非线性科学占有极其重要的位置。这决非人们“想入非非”,而是反映了人类对自然界认识过程的螺旋式上升。

曾几何时,非线性还被人们当作个性极强,无从逾越的难题。每一个具体问题似乎都要求发明特殊的算法,运用新颖的技巧。诚然,力学和数学早就知道一批可以精确求解的非线性方程,物理学也曾经严格地解决过少数非平庸的模型。不过,这些都曾是稀如凤毛麟角的“手工艺”珍品,人们还没有悟出它们的普遍启示,也没有看到它们之间的内在联系。

20世纪60年代中期,事情从非线性现象的两个极端同时发生变化。一方面,描述浅水波运动的一个偏微分方程的数值计算,揭示了方程的解具有出奇的稳定和保守性质。这启发人们找到了求解一大类非线性偏微分方程的普遍途径,即所谓“反散射”方法。反散射方法大为扩展了哈密顿力学中原有的可积性概念,反映了这类方程内秉的对称和保守性质。到了80年代,反散射方法推广到量子问题,发现了可积问题与统计物理中严格可解模型的联系。

60年代初期还证明了关于弱不可积保守系统普遍性质的KAM定理. 于是,非线性问题的可积的极端便清楚勾划出来,成为一个广泛的研究领域. 虽然这里的大多数进展还只限于时空维数较低的系统,但它对非线性科学发展的促进作用是不可估量的.

另一方面,在“不可积”的极端,对KAM定理条件的“反面文章”,揭示了保守力学系统中随机性运动的普遍性,而在耗散系统中则发现了一批奇怪吸引子和混沌运动的实例. 这些研究迅速地融成一片,一些早年被认为是病态的特例也在新的观点下重新认识. 原来不含有任何外来随机因素的完全确定论的数学模型或物理系统,其长时间行为可能对初值的细微变化十分敏感,同投掷骰子一样地随机和不可预测. 然而,混沌不是无序,它可能包含着丰富的内部结构.

同时,由于计算科学特别是图形技术的长足进步,人们得以理解和模拟出许多过去无从下手研究的复杂现象. 从随机与结构共存的湍流图象,到自然界中各种图样花纹的选择与生长,以及生物形态的发生过程,都开始展现出其内在的规律. 如果说,混沌现象主要是非线性系统的时间演化行为,则这些复杂系统要研究的是非线性地耦合到一起的大量单元或子系统的空间组织或时空过程. 标度变换下的不变性、分形几何学和重正化群技术在这里起着重要作用.

在由上述种种方面汇成的非线性科学洪流中,许多非线性数学中早已成熟的概念和方法开始向其他学科扩散,同时也提出了新的深刻的数学问题. 物理学中关于对称和守恒,对称破缺,相变和重正化群的思想,也在日益增多的新领域中找到应用. “非线性”一词曾经是数学中用以区别于“线性”问题的术语,非线性科学正在成为跨学科的研究前沿. 各门传统学科中都有自己的非线性篇章,非线性科学却不是这些篇章的总和. 非线性科学揭示各种非线性现象的共性,发展处理它们的普适方法.

这样迅猛发展的跨学科领域,很难设想用少数专著加以概括,

何况学科发展的不少方面还未成熟到足以总结成书的地步。于是,有了动员在前沿工作的教学和研究人员,以集体力量撰写一套“非线性科学丛书”的想法。在上海科技教育出版社的大力支持下,这一计划得以付诸实现。

这套“非线性科学丛书”不是高级科普,也不是大块专著。它将致力于反映非线性科学各个方面的基本内容和最新进展,帮助大学高年级学生、研究生、博士后人员和青年教师迅速进入这一跨学科的新领域,同时为传统自然科学和工程技术领域中的研究和教学人员更新知识提供自学教材。非线性科学的全貌将由整套丛书刻划,每册努力讲清一个主题,一个侧面,而不求面面俱到,以免失之过泛。在写作风格上,作者们将努力深入浅出,图文并茂,文献丰富;力求有实质内容,无空洞议论,以真刀真枪脚踏实地武装读者。从读者方面,自然要求具备理工科大学本科的数学基础,和读书时自己主动思索与推导的习惯。

“非线性科学丛书”的成功,取决于读者和作者的支持。我们衷心欢迎批评和建议。

郝柏林

1992年4月30日于北京中关村

前 言

代数方程组的构造性理论及有关算法是具有基本重要性的经典课题,并且在技术工程领域有着极其广泛的应用.对于线性方程组,已经进行了非常深入的研究.关于非线性代数方程组的系统研究,主要是在电子计算机出现之后才逐渐兴旺发达起来.常系数代数方程组的数值解法是一个实用性特别强的课题,现代计算科学提供了大量的技术工具.另一方面,现代高科技领域如自动推理、机器人学等要求对更一般的含文字系数的非线性代数方程组进行符号操作.这时的方程组既无数值解,一般也无传统所谓的封闭解.人所能作的是将方程组归化为某些适当的“标准”形式,权且充当其符号解,并据之研究解的性状等等.这类将方程组化归标准形的工作,也可以看作是某种意义上的“求解”.该方向有时被称做计算代数几何.在我国,这一研究方向肇始于70年代吴文俊院士将代数方法用于几何定理机器证明的突破性工作.正是由于关于非线性方程组的符号操作的强有力的算法工具的引入,改变了定理机器证明领域长期以来举步维艰的局面.80年代以来,在国际同行的积极参与下,用代数方法作自动推理这一方向取得了日新月异的长足进展.目前国际上有许多计算机科学家致力于代数方程组符号算法的研究.同时,正如吴先生多次指出的那样,对于非线性代数方程组本身的研究,其理论和实际意义比几何定理机器证明更为重要.本书的作者们,正是在吴文俊院士成就的鼓舞下和他这一思想的指引下进入这个领域的.

本书的主要内容,是我们在1985年—1995年期间的研究成果.为了使读者对参系数非线性代数方程组的构造性理论和求解算法有一个系统的了解,还补充了若干必要的基本知识.书中属

于作者的工作主要是：

1. 关于三角型方程组的相关性判准 (第 3 章, §19—§20).
2. 相对单纯分解, 即 WR 方法 (第 3 章, §21—§23).
3. 新的非退化条件和解的结构定理 (第 3 章, §24—§25).
4. 解非线性代数方程组的聚筛法 (第 4 章, §31—§32).
5. 定理机器证明的例证法 (第 5 章).
6. 代数方程的完全判别系统 (第 6 章).

以上第二部分——相对单纯分解, 即 WR 方法——是我们所建立的非线性代数方程组的理论和求解算法的核心. 它与相关性判准和解的结构定理相结合, 就成为非线性代数方程组的一套系统而完整的理论和方法. 在此基础上, 已经开发了非线性代数方程组求解的通用 MAPLE 程序 WRSOLVE. 初步的运行表明, 它的效率比我们已知的若干方法的通用程序要高. 聚筛法 (Gather-and-Sift) 是作者将在多元结式方面的研究成果与 WR 方法相结合而创立的新算法, 它在许多情况下极大地增强了原有算法的力量. 至于例证法, 则是我们的理论的一个应用.

这里应当提到, 第 6 章的主要内容是作者最近完成的工作. 实系数代数方程实虚根分类的判定问题, 是代数学基本的经典问题之一. 但对于五次以上具有文字系数的方程, 相应的显式判准一直无人给出, 这里我们系统而彻底地回答了这一长期悬而未决的问题. 我们希望, 它将为涉及不等式的自动推理的研究开辟一条新路.

如所周知, 关于非线性代数方程组求解的系统而完全的方法, 还有格罗布讷基法和吴法, 都早有专书介绍. 特别是本丛书中还计划有一本专门阐明吴法的书, 所以, 对这两种重要方法, 限于篇幅就不再介绍了.

顺便提到, 我们的方法与格罗布讷基方法的不同是明显的. 但和吴法却有一主要之点相同, 即都用到了三角型方程组这个古典而朴素的想法. 我们的方法独特之处在于: (1) 以相对单纯分解为

理论基础, 整序算法是其推论. (2) 不用代数扩域上的因式分解, 大部分算法原则上甚至可以不用任何因式分解. (3) 我们采用了弱非退化条件, 因而解的结构形式不同, 避免了过多的无用分支的出现. (4) 与逐个消元的方法不同, 我们引进的聚筛法, 可以一举消去多个变元. (5) 我们的方法中特别突出了结式的作用, 包括对多元结式的运用. (6) 现有算法的大多数, 实质上属于复代数几何的范畴, 而我们的工作中有一部分属于实代数几何.

总的说来, 我们的工作还刚起步. 有大量的理论问题和实践检验尚有待去做. 如算法复杂度分析, 程序的完善等. 本书内容和这里的观点, 也难免有不当之处. 欢迎读者批评指正.

作者衷心感谢我国机械化数学的开拓者和奠基者吴文俊先生, 没有他带领我们进入这一生机勃勃的新领域, 就不可能有这本书. 在此同时, 本书的前两位作者衷心感谢我们的恩师程民德先生和吴文达先生, 四十年前我们大学时期的启蒙老师, 今天在同一个人“攀登”项目组里, 仍孜孜不倦地给我们以悉心的指导、教诲和扶持.

作 者

1995年12月15日于成都

Abstract

This book is concerned mainly the constructive theory and algorithms for nonlinear algebraic equation system which currently play a very important role in algebraic approaches to Automated Theorem Proving, but the results would have extensively applications to various fields including technology and engineering involving symbolic and algebraic computation. Most of the space is used to expound the authors' recent work on the subject. Unlike most publications in this aspect, both the successive elimination and multivariate resultant elimination are equally emphasized and the studies on real zeros of polynomials are paid enough attention. The methods based on characteristic set and Groebner Basis are not introduced here in detail since there exist well-known monographs for them.

目 录

非线性科学丛书出版说明

前 言

第 1 章	导论	1
§ 1	代数方程	1
§ 2	结构与计算	3
§ 3	计算机与数学	5
§ 4	定理机器证明	6
§ 5	非线性代数方程组	8
§ 6	计算机代数	10
第 2 章	消去法基础	14
§ 7	除法与整相关性	15
§ 8	除法的显式表示	18
§ 9	辗转相除法	20
§ 10	结式消去法	23
§ 11	联合消去法	26
§ 12	结式的某些性质	29
§ 13	用低阶行列式表示的结式	31
§ 14	方程组与消去法	35
第 3 章	三角型方程组	39
§ 15	一个例子	40
§ 16	互素性	43
§ 17	整相关性	45
§ 18	整相关性定理的证明	48
§ 19	相关性	50

§ 20	应用相关性判准的几个实例	53
§ 21	相对单纯分解	57
§ 22	相对分解算法	61
§ 23	相对单纯分解的一个实例	64
§ 24	非退化条件	68
§ 25	解的结构	74
第 4 章	一般多项式方程组	78
§ 26	一个例子	79
§ 27	基本概念	81
§ 28	迪克逊导出方程组	86
§ 29	一般情形的迪克逊结式	90
§ 30	显式解	93
§ 31	聚筛法	95
§ 32	聚筛法一例:WRSOLVE	100
§ 33	麦考莱商	103
§ 34	麦考莱商的例	108
§ 35	矩阵广义特征值方法	112
§ 36	伯恩斯坦定理	114
§ 37	多元结式的一些性质	116
第 5 章	机器证明的例证法	118
§ 38	概述	118
§ 39	起点	120
§ 40	推广	122
§ 41	几何命题的代数化	125
§ 42	构造性几何命题	127
§ 43	实例的选取和检验	129
§ 44	例子	132
§ 45	通用程序的运行实例	135
第 6 章	多项式方程的判别系统	137

§ 46	多项式的重根	138
§ 47	实根个数的经典判定法	141
§ 48	多项式的判别矩阵	144
§ 49	两个判别矩阵的关系	149
§ 50	判别矩阵与斯图姆组的关系	153
§ 51	参系数多项式实根个数的显式判定	160
§ 52	例子	166
§ 53	六次多项式根的分类	170
§ 54	稳定多项式	176
附录 A	用 MAPLE 实现的 WR 程序	180
附录 B	用 MAPLE 实现的 GPS 程序	184
附录 C	用 MAPLE 实现的 WRSOLVE 程序	186
索引	195
科学家中外译名对照表	197
参考文献	198

Contents

Preface

Chapter 1 Introduction	1
§ 1 Algebraic Equations	1
§ 2 Structures and Computations	3
§ 3 Computer and Mathematics	5
§ 4 Automated Theorem Proving	6
§ 5 Non-linear Algebraic Equation Sets	8
§ 6 Computer Algebra	10
Chapter 2 Basic Elimination	14
§ 7 Division and Full Dependency	15
§ 8 Explicit Expression for Division	18
§ 9 Euclidean Algorithm for Polynomials	20
§ 10 Elimination by Resultant	23
§ 11 Joint Elimination	26
§ 12 Some Properties of Resultant	29
§ 13 Resultants Expressed by Determinants with lower orders	31
§ 14 Equation Set and Elimination	35
Chapter 3 Triangular Equation Sets	39
§ 15 An Example	40
§ 16 Relatively Prime with Triangular Set	43
§ 17 Full Dependency with Triangular Set	45
§ 18 Proof to Full Dependency Theorem	48
§ 19 Dependency	50

§ 20	Examples Applying Dependency Criterion	53
§ 21	Relatively Simplicial Decomposition	57
§ 22	A Relatively Simplicial Decomposition Algorithm	61
§ 23	An Example for Relatively Simplicial Decomposition	64
§ 24	Non-degenerate Condition	68
§ 25	Structure of Solutions	74
Chapter 4	General Polynomial Equation Sets	78
§ 26	An Example	79
§ 27	Basic Concepts	81
§ 28	Derived Equation Set of Dixon's	86
§ 29	Dixon Resultant in General	90
§ 30	Explicit Solutions	93
§ 31	Gather-and-Sift Method	95
§ 32	An Example for Gather-and-Sift; WRSOLVE ...	100
§ 33	Macaulay Quotient	103
§ 34	Examples for Macaulay Quotient	108
§ 35	Generalized Eigenvalue Method	112
§ 36	Bernstein Theorem	114
§ 37	Properties of Multivariate Resultants	116
Chapter 5	Automated Theorem Proving by Citing Instances	118
§ 38	A Survey	118
§ 39	Beginning	120
§ 40	Generalization	122
§ 41	Algebraization of Geometric Propositions	125
§ 42	Constructive Geometric Propositions	127
§ 43	Selection and Verification of Examples	129