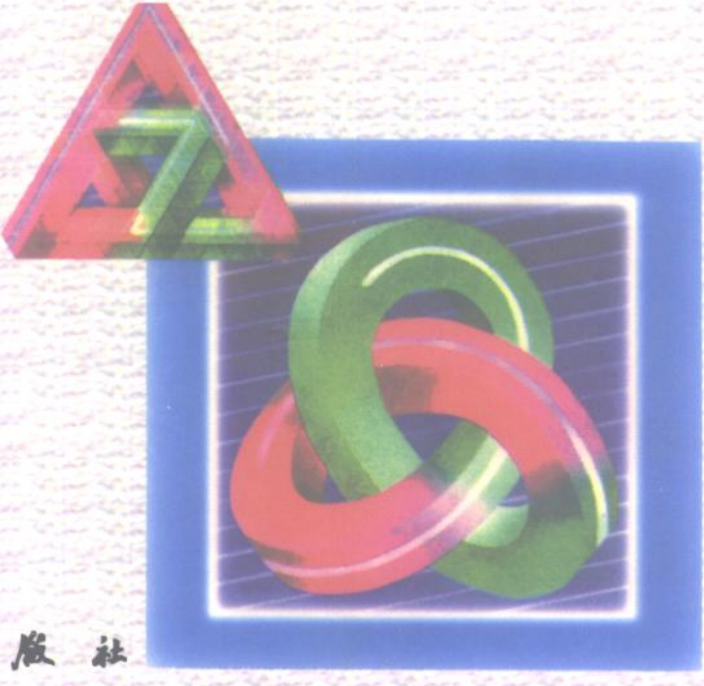
现代数学基础丛书

随机模型的密度演化方法

●史定华 著



学 出 版 社

内 容 简 介

本书论述随机模型的密度演化方法及其应用，目的是将随机模型通过微分方程用完全确定的动力系统描述和研究. 本书作者于80年代提出并研究了状态转移计数过程，得到了一般的转移频度公式、吸收分布公式、更新分布公式和进入概率公式. 在此基础上研究并解决了可修系统、排队系统和库存系统等随机运筹模型中的问题. 本书是作者这些研究工作的总结. 本书特点是分析方法和概率方式并重、相互补充、相互促进.

本书适于高等学校数学系概率和运筹专业的研究生和教师，以及科研人员阅读.

图书在版编目(CIP)数据

随机模型的密度演化方法/史定华著. -北京：科学出版社，1999

(现代数学基础)

ISBN 7-03-007263-4

Ⅰ. 随… Ⅱ. 史… Ⅲ. 随机-数学模型-解析理论-微分方程 Ⅳ. O22

中国版本图书馆 CIP 数据核字(1999)第 02901 号

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100717

新蕾印刷厂 印刷

新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售

*

1999年6月第 一 版　开本：850×1168　1/32

1999年6月第一次印刷　印张：8

印数：1—2 000　字数：206 000

定价：18.00元

（如有印装质量问题，我社负责调换〈北燕〉）

前　　言

前苏联数学大师柯尔莫哥洛夫在年轻时就以两篇名著《概率论的基本概念》和《概率论的解析方法》赢得了莫斯科大学的教授席位. 第一篇名著奠定了概率论在数学科学中的地位, 这是众所周知的事. 有人认为(见卢 侃和孙建华编译的《混沌学传奇》第 394 页), 第二篇名著对马尔科夫过程与爱因斯坦、普朗克工作之间的关系指明了轮廓.

柯氏在第二篇名著中对马氏过程的转移概率函数, 使用了一组确定的微分方程来描述,这就是后人所称的著名柯氏微分方程组.柯氏通过微分方程在随机模型和古典力学之间建立了某种联系, 或许混沌学传奇的作者指的正是这一思想.

众所周知, 马氏过程是已知现在, 将来与过去无关, 但许多复杂的随机模型并不满足这一条件. 换句话说, 我们必须面对非马氏过程, 它不仅与现在状态而且与(整个)先期历史有关. 柯氏在他的名著中曾指出可以用同样的方法来避免先期历史的影响, 但没有深入展开讨论.

然而, 在排队论的研究进程中, 有许多先辈的工作, 如 Erlang 的阶段化、Kosten 和 Cox 的补充变量, Neuts 的矩阵解析途径, 他们通过引进离散或连续补充变量使非马氏过程扩维后变成向量马氏过程, 为实现柯氏的思路做了不少探索.

本书与柯氏第二篇名著的论题有关, 将沿着前人开辟的道路继续前进, 探讨随机模型的密度(或分布)演化方法及其应用. 目标是试图将随机模型纯粹无规的演化行为通过密度的偏微积分方程组用完全确定的动力系统去描述和研究. 密度演化方法不仅能用来研究纯随机模型, 而且是研究非线性动力系统复杂演化行为的新工具, 见 Lasota 和 Mackey 的专著: 《**Chaos, Fractals, and**

Noise —— Stochastic Aspects of Dynamics》. 普里高津在其《确定性的终结》一书中甚至认为这是建立新自然法则的统一理论.

要想对一般的向量马氏过程建立密度演化方法，必定会涉及诸如偏微积分方程组成立的条件，解的存在性和唯一性，各种分析运算的合理性和可交换性等等理论问题. 但本书重点是针对具体的随机模型探讨如何构造向量马氏过程，然后借助状态转移图去建立偏微积分方程组并求解. 因此为了更贴切研究重点，所以在书中我们使用了向量马氏过程(VMP)方法一词. 而书名采用《随机模型的密度演化方法》则是为了抛砖引玉.

本书第一章简要介绍向量马氏过程并讨论其离散状态转移计数过程的转移频度公式，它是作者 80 年代初引入并一直研究的内容. 我们将看到这是比马氏更新过程更一般的计数过程.

第二章论述位相型分布，在介绍随机模型杂志主编 Neuts 教授的有限位相型(PH)分布理论后，着重讨论无限位相型分布理论及其计算. 然后用一个求联合分布的释例介绍如何构造向量马氏过程去研究这类问题.

从第三章起探讨用非马氏过程描述的随机模型的密度演化方法和性能分析.

第三章可靠性模型面临的是有限(离散)状态向量马氏过程的问题，首先通过简单模型介绍方法的步骤和求间歇随机变量分布的技巧. 然后研究美国加利福尼亚大学伯克利分校 Barlow 教授提出的一个变种模型，它是一个无再生点的随机模型. 我们证明了其稳态可用度与分布无关的重要性质. 对与可靠性有关的易腐物品库存决策问题，我们推导了一个有明显物理意义的平衡方程使决策问题得以简化.

第四章经典排队模型涉及如何处理可数状态向量马氏过程的问题. 在介绍了单服务台泊松到达一般服务排队后，首次通过构造向量马氏过程对 GI/M/1 排队给出了简单的处理，并研究了忙期、忙期中服务顾客数及闲期的联合分布. 再在美国贝尔实验室 Ramaswami 和 Sengupta 的工作基础上，对一个具有无穷子分块

的GI/M/1型排队，证明了二维离散马氏链和二维马氏过程的平稳分布分别为算子几何分布和算子指数分布．可以说这是矩阵解析方法的一个简要介绍和推广．然后对无穷服务台排队，结合有效的概率技巧给出了完整的解答．

第五章流体模型将出现带漂移系数的向量马氏过程．我们用密度演化方法重新研究了旅居海外华裔学者 Chen 和 Yao 研究过的一个交替环境流体模型，特别是讨论了非指数情形．然后介绍美国贝尔实验室 Mitra 关于特殊马氏环境流体模型的有效算法．这里为了避免复杂的边界条件采用了分布演化方法．

第六章其它排队模型包括从实际工程背景引进的休假排队、可修排队和再入排队．这些复杂模型使用别的方法很难奏效，同时针对 VMP 方法在求解有困难时，我们还采用了简化的办法使问题最终得以解决．

因篇幅所限，本书只能介绍一些有代表性的模型和技巧．希望读者能从中领悟如何构造向量马氏过程，如何求解微分方程组，以及如何运用转移频度公式、吸收分布公式、更新分布公式和进入概率公式，并将其发扬光大．特别是将密度演化方法与概率方法相结合使它们相互补充，相互促进．

本书包含了作者及其合作者近 20 年的某些工作．合作者有：香港科技大学刘黎明博士；原上海科技大学毕业的郭进利博士；以及美国 AT&T 贝尔实验室刘 丹博士；中科院应用数学所李 伟博士和刘 斌博士．

感谢中国国家自然科学基金会对“可修排队理论”课题的支持．感谢香港科技大学工业工程与工程管理系邀请我客座访问期间所提供的良好条件和支持；感谢我工作过的单位所给予的理解和支持．对本书引用其工作的国内外教授和专家，在此深表谢意．衷心感谢陈希孺院士和邓永录教授仔细审阅了本书，他们提出了许多宝贵的改进意见．最后还要感谢科学出版社刘嘉善先生为出版本书所作的努力．

本书的出版得到了上海市学位委员会给予的“上海市研究生

教育专项经费资助”和上海市教委设立的“上海市重点学科建设基金资助”. 同时, 上海大学研究生部也给予了部分经费资助. 没有他们的大力提倡和鼎力相助本书是不可能完成和出版的, 在此谨向他们表示由衷的谢意.

为了简便, 定义、定理、公式和图表均按小节编号. 书中错误之处敬请读者批评指正, 我们将衷心感谢诸君的帮助.

史定华 1999 年 3 月于
上海大学(嘉定)数学系

目　　录

第一章 转移频度公式

在大量的随机模型中往往都涉及多个随机变量的相互作用.它们按某种规则在不同的日历时间开始启动，从而形成一个具有离散或连续参数的离散状态随机过程 $S(t)$，一般状态空间可编号成 $E=\{0,1,2,\cdots\}$. 例如，可靠性模型中的部件状态过程，排队模型中的队长过程，库存模型中的库存容量过程，流体模型中的环境状态过程等等. 除非涉及的随机变量都服从指数分布，$S(t)$才是马氏(Markov)链，一般来说，$S(t)$是非马氏过程.

为了能利用 Kolmogorov[8]开创的解析方法去研究这类非马氏过程，Cox[10]曾引入补充变量使其马氏化，再求解状态概率密度函数满足的偏微积分方程组. 然而 Erlang[11]的阶段化思想似乎应看成是最早引入(离散)补充变量的文章，据说 Kosten[12]也先于 Cox 使用过补充变量技巧. 不过要将 Kolmogorov 开创的解析方法和补充变量技巧程式化，根据我们的经验必须引进向量马氏过程(VMP)并研究其离散状态转移计数过程. 不仅状态转移计数过程在某些情况下比马氏更新过程更一般，而且对不同的问题,构造向量马氏过程和求解状态概率微分方程组都有一定的技巧性，所以我们不妨把这套程式化的方法简称为 VMP 方法. 它是 Kolmogorov 解析方法与补充变量技巧的发展和完善.

本章§1.1 在列举马氏链的有关知识基础上简要介绍了向量马氏过程的基本概念. §1.2 则是论述作者提出并研究的向量马氏过程中离散状态转移计数过程，目的是证明一个在随机模型中有重要应用的转移频度公式及其推论：吸收分布公式，更新分布公式和进入概率公式.

§ 1.1　向量马氏过程

关于马氏过程方面的内容我们推荐读者去查阅 Ross[16], 何声武[5]和钱敏平, 龚光鲁[6]等人的著作. 下面简要介绍一下马氏链的有关基础知识.

1.1.1　离散马氏链

定义 1　令 $N=\{0,1,2,\cdots\}$, 设随机变量序列 $\{X_n, n\in N\}$ 取值于状态空间 $E=N$; 若对任意的 $n\in N$, $j\in E$, 有

$$P\{X_{n+1}=j|X_0,\cdots,X_n\}=P\{X_{n+1}=j|X_n\},$$

则它称为状态空间 E 上的离散(时间)马氏链.

定义 2　若离散马氏链定义中的转移概率

$$p_{ij}=P\{X_{n+1}=j|X_n=i\} \tag{1}$$

与 n 无关, 则称为齐次离散马氏链, 简称离散马氏链. 进一步, 可定义 n 步转移概率

$$p_{ij}^{(n)}=P\{X_n=j|X_0=i\}. \tag{2}$$

而 $P^{(n)}=[p_{ij}^{(n)}]$ 称为 n 步转移概率矩阵.

n 步转移概率矩阵有性质: (a)非负矩阵, 即 $p_{ij}^{(n)}\geq 0$; (b)行和为 1, 即 $\sum\limits_{j=0}^{\infty}p_{ij}^{(n)}=1$; (c)满足 C-K 方程 $p_{ij}^{(m+n)}=\sum\limits_{k=0}^{\infty}p_{ik}^{(m)}p_{kj}^{(n)}$, 即 $P^{(n)}=P^n$.

定义 3　令 $p_j(n)=P\{X_n=j\}$. 它称为离散马氏链的一维分布, $p_j(0)$ 称为初始分布. 若 $\lim\limits_{n\to\infty}p_j(n)$ 存在, 称为极限状态概率. 又如果方程组 $\pi P=\pi$, $\pi e=1$, $\pi>0$ 存在唯一解, 其中 e 是元素全为 1 的列向量, 则它称为平稳分布.

定理 1　离散马氏链由初始分布和转移概率矩阵唯一确定.

定义 4 $f_{ij}^{(n)} = P\{X_n = j, X_k \neq j, k = 1,\cdots,n-1 \mid X_0 = i\}$ 称为从状态 i 第 n 步首达状态 j 的概率，$f_{ij} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(n)}$ 称为首达概率；而 f_{ii} 称为返回状态 i 的概率，$\mu_i^{-1} = \sum_{n=1}^{\infty} n f_{ii}^{(n)}$ 称为平均返回的步数.

定理 2 对离散马氏链成立下述重要关系：

$$0 \le f_{ij}^{(n)} \le p_{ij}^{(n)} \le f_{ij} \le 1; \tag{3}$$

$$p_{ij}^{(n)} = \sum_{r=1}^{n} f_{ij}^{(r)} p_{jj}^{(n-r)}. \tag{4}$$

利用返回概率和转移概率对离散马氏链中状态 i 的分类表和判别准则如下：

i

- $f_{ii} < 1$ 非常返 $\left(\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} < \infty\right)$
  - $f_{ii} = 0$ 不可回 $\left(\forall n, p_{ii}^{(n)} = 0\right)$
  - $f_{ii} > 0$ 可回 $\left(\exists N, p_{ii}^{(N)} > 0\right)$
- $f_{ii} = 1$ 常返 $\left(\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = \infty\right)$
  - $\mu_i = 0$ 零常返 $\left(\lim_{n\to\infty} p_{ii}^{(n)} = 0\right)$
  - $\mu_i > 0$ 正常返 $\left(\overline{\lim_{n\to\infty}} p_{ii}^{(n)} > 0\right)$

定义 5 对离散马氏链中的状态 i，若 $p_{ii} = 1$，则 i 称为吸收状态. 如果正整数子集 $\{n \mid p_{ii}^{(n)} > 0\}$ 非空，最大公因子 d 称为它的周期. 若 $d > 1$，则 i 称为周期状态；否则，即 $d = 1$，i 称为非周期状态.

定理 3 对离散马氏链，n 步转移概率的极限性态如下：

(a) 若 j 是非常返或零常返状态，则 $\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = 0$；

(b) 若 j 是正常返状态，d 为周期，则

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(nd+r)} = d\mu_j \sum_{m=0}^{\infty} f_{ij}^{(md+r)}, \quad r = 0,1,\cdots,d-1;$$

(c) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}p_{ij}^{(k)}=\mu_j f_{ij}$.

定义 6 如果存在$n\geq 1$，使$p_{ij}^{(n)}>0$，则称从状态 i 可到达状态j，记为$i\to j$；若$i\to j$，且$j\to i$，则称状态i与状态j相通，记为$i\leftrightarrow j$.

定理 4 相通关系是状态空间 E 上的等价关系；相通的状态类型相同，即若$i\leftrightarrow j$，则状态 i 与状态j 同常返或非常返，同零常返或正常返，同周期或非周期.

定义 7 离散马氏链的一个状态集合 A 称为闭集，如果对每个$i\in A$，有$\sum\limits_{j\in A}p_{ij}=1$. 闭集 A 称为极小闭集，若 A 的任意真子集都不是闭集. 显然，整个状态空间 E 是闭集，如果它又是极小闭集，则离散马氏链称为不可约马氏链.

定理 5 不可约马氏链的所有状态都是相通的，因此具有相同的类型.

定理 6 不可约正常返非周期离散马氏链称为遍历链，对遍历链平稳分布存在并等于极限(状态概率存在并形成)分布.

定理 7 不可约非周期马氏链的 Forster 准则(见 Cohen[9])：

(a) 正常返充要准则：左方程组 $xP=x$ 存在唯一正收敛解；

(b) 非常返充要准则：右方程组 $Py=y\quad(i,j\neq 0)$ 存在有界非常数解；

(c) 常返充分性准则：右不等式组 $Py\leq y(i\neq 0)$ 存在无界解，即当 $j\to\infty$ 时，$y_j\to\infty$ 的解.

1.1.2 连续马氏链

定义 1 设 $X(t)$是一随机过程，参数空间$T=[0,\infty)$，状态空间$E=\{0,1,2,\cdots\}$. 若对 T 中的 $t_1<t_2<\cdots<t_k<t_{k+1}$，$k\geq 1$为任意整数，以及$j\in E$，有

$$P\{X(t_{k+1})=j|X(t_1),\cdots,X(t_k)\}=P\{X(t_{k+1})=j|X(t_k)\},$$
则它称为状态空间 E 上的连续(时间)马氏链.

定义 2 若连续马氏链定义中的转移概率函数

$$p_{ij}(t)=P\{X(t+s)=j|X(s)=i\} \tag{1}$$

与 s 无关, 则称为齐次连续马氏链, 简称连续马氏链. 而 $P(t)=[p_{ij}(t)]$ 称为转移概率函数矩阵. 若对所有的 $i,j\in E$, 存在 $t>0$, 使得 $p_{ij}(t)>0$, 则称为不可约连续马氏链.

同样, 对于转移概率函数矩阵也有性质: (a)非负矩阵, 即 $p_{ij}(t)\ge 0$; (b)行和为 1, 即 $\sum_{j=0}^{\infty}p_{ij}(t)=1$; (c)满足 C-K 方程 $p_{ij}(t+s)=\sum_{k=0}^{\infty}p_{ik}(t)p_{kj}(s)$, 即 $P(t+s)=P(t)P(s)$.

定义 3 $p_j(t)=P\{X(t)=j\}$ 称为连续马氏链的一维分布, $p_j(0)$ 称为初始分布, 若 $\lim\limits_{t\to\infty}p_j(t)$ 存在称为极限状态概率(它不一定构成分布).

定理 1 连续马氏链由初始分布和转移概率函数矩阵唯一确定.

定义4 任取$h>0$, 令 $X_n=X(nh),n\in N$, 得一离散马氏链, 称为连续马氏链的骨架链, 其 n 步转移概率 $p_{ij}^{(n)}=p_{ij}(nh)$.

定理 2 若连续马氏链不可约, 则它的骨架链不可约非周期且两者状态类型相同; 进一步有:

(a) 极限 $\lim\limits_{t\to\infty}p_{ij}(t)=\pi_{ij}$ 存在,

(b) 状态 i 正常返的充要条件是 $\pi_{ii}>0$,

(c) 状态 i 常返的充要条件是 $\int_0^{\infty}p_{ii}(t)dt=\infty$.

为深入研究连续马氏链, 对转移概率函数需引进某些假设.

A 1 连续性假设: $\lim\limits_{t\to 0}p_{ij}(t)=\delta_{ij}$

定理3 满足A 1的连续马氏链称为标准链. 对标准链, 下列极限存在.

$$\lim_{t\to 0}\frac{p_{ii}(t)-1}{t}=q_{ii}, \quad 0\le q_i \equiv -q_{ii} \le \infty,$$

$$\lim_{t\to 0}\frac{p_{ij}(t)}{t}=q_{ij}<\infty. \tag{2}$$

A 2 保守性假设: $\forall i,\ q_i=\sum_{j\neq i} q_{ij}$

定义5 矩阵$Q=[q_{ij}]$称为连续马氏链的生成元矩阵或Q矩阵. 若方程组$\pi Q=0$, $\pi e=1$, $\pi>0$存在唯一解, 则称为它的平稳分布.

定义6 令$T_1=\inf\{t|X(t)\neq X(0)\}$, 假定$\inf\{\varnothing\}=\infty$, 它是连续马氏链状态发生第一次跳跃的时刻. 记$T_0=0$, 则$\{T_n,\ n\in N\}$为连续马氏链依次发生跳跃的时刻序列.

定义7 因$P\{T_1>t|X(0)=i\}=e^{-q_i t}$, 所以可按$q_i$的取值将状态$i$分为: (a)瞬时状态$q_i=\infty$; (b)吸收状态$q_i=0$; (c)稳定状态$0<q_i<\infty$.

A 3 稳定性假设: $\forall i,\ q_i<\infty$

定理 4[6] 对轨道右连续(并满足保守性与稳定性假设)的标准链成立

$$P\{T_1\le t, X(T_1)=j|X(0)=i\}=\frac{q_{ij}}{q_i}(1-e^{-q_i t}). \tag{3}$$

定义8 满足A 1~A 3的连续马氏链称为稳定链. 对稳定链, 设$\{T_n,\ n\in N\}$为它依次发生跳跃的时刻序列. 令$X_n=X(T_n)$, 它是一个离散马氏链, 称为连续马氏链的跳跃链, 其转移概率当$q_i=0$时, $r_{ij}=\delta_{ij}$; 当$q_i\neq 0$时, $r_{ij}=(1-\delta_{ij})q_{ij}/q_i$.

定理 5 轨道右连续稳定马氏链是强马氏链[6]且不可约稳定链常返的充要条件是其跳跃链常返.

A 4 规则性假设: $T_n\to\infty$, $w.p.1$(以概率 1 成立)

A 5 有界性假设: $c = \sup_i q_i < \infty$

定义 9 满足 A 1～A 4 的连续马氏链称为规则链; 满足 A 5 的连续马氏链称为有界链. 对有界链, 以 $P = I + c^{-1}Q$ 为转移概率矩阵的离散马氏链称为它的一致链.

定理 6 有界马氏链是规则链; 不可约稳定链若其跳跃链常返, 则它是规则链. 不可约规则链存在平稳分布.

定理 7 规则链的转移概率函数满足下述 Kolmogorov 向前和向后方程组, 且是方程组的唯一解.

(a) 微分形式

$$p'_{ij}(t) = \sum_{k \in E} p_{ik}(t) q_{kj}, \quad p'_{ij}(t) = \sum_{k \in E} q_{ik} p_{kj}(t); \tag{4}$$

(b) 积分形式

$$p_{ij}(t) = \delta_{ij} e^{-q_j t} + \sum_{k \neq j} \int_0^t p_{ik}(s) q_{kj} e^{-q_j (t-s)} ds,$$

$$p_{ij}(t) = \delta_{ij} e^{-q_i t} + \sum_{k \neq i} \int_0^t e^{-q_i (t-s)} q_{ik} p_{kj}(s) ds; \tag{5}$$

(c) 代数形式(*号表示相应函数的 L 变换)

$$p_{ij}{}^*(s) = \frac{\delta_{ij}}{s + q_j} + \sum_{k \neq j} p_{ik}{}^*(s) \frac{q_{ij}}{s + q_j},$$

$$p_{ij}{}^*(s) = \frac{\delta_{ij}}{s + q_i} + \sum_{k \neq i} \frac{q_{ik}}{s + q_i} p_{kj}{}^*(s). \tag{6}$$

1.1.3 向量马氏过程

假定我们讨论的随机过程其参数空间都取为$[0,\infty)$, 先给出某些定义和记号.

定义 1 向量随机过程$\{S(t), X(t)\}$称为混合型向量随机过程, 如果它的状态空间为 $E \times R^n$, 其中 $E=\{0,1,2,\cdots\}$, R^n 是 n 维欧氏

空间或它的子集.

定义 2 混合型向量随机过程$\{S(t), X(t)\}$称为混合型向量马氏过程，如果对任意的$t > \tau \ge 0$，$\forall i, j \in E$ 和 R^n 中的任意子集 A 有

$$P\{S(t) = j, \ X(t) \in A | S(u), \ X(u), \ 0 \le u \le \tau\}$$
$$= P\{S(t) = j, \ X(t) \in A | S(\tau), \ X(\tau)\}. \tag{1}$$

定义 3 混合型向量马氏过程称为时齐的，如果对任意的$t > \tau \ge 0$，$\forall i, j \in E$ 和 R^n 中的任意子集 A 有

$$P\{S(t+\tau) = j, \ X(t+\tau) \in A | S(\tau) = i, \ X(\tau) = x\}$$
$$= P\{S(t) = j, \ X(t) \in A | S(0) = i, \ X(0) = x\}. \tag{2}$$

记

$$p_{ij}(t, x, A) = P\{S(t) = j, \ X(t) \in A | S(0) = i, \ X(0) = x\},$$

它称为转移概率函数. 仿照连续时间马氏链和过程，我们对此转移概率函数引进如下的两类假设.

对转移概率函数矩阵 $P(t, x, A)$，关于离散状态可作如下假设:

假设 1(连续性假设) 存在矩阵 $Q(x)=[q_{ij}(x)]$ 使得

$$\lim_{t \to 0} \frac{1}{t}[P(t, x, R^n) - I] = Q(x) \tag{3}$$

成立，$Q(x)$ 称为生成元矩阵.

假设 2(保守性假设) 若 $Q(x)$，$\forall i \in E$ 有

$$q_i(x) = -q_{ii}(x) = \sum_{j \ne i} q_{ij}(x), \tag{4}$$

则称 $Q(x)$ 为保守的.

假设 3(稳定性假设) 若 $Q(x)$ 对给定的 $x \in R^n, \forall i \in E$ 有 $q_i(x) < \infty$，则称 $Q(x)$ 为稳定的.

假设 4(规则性假设) 在任意有限时间区间内 $S(t)$ 以概率 1 只发生有限次状态转移.

对转移概率函数矩阵 $P(t, x, A)$，关于连续状态可作如下假设:

假设 5(慢变化假设) 对$\delta > 0$，使得