

## 内容提要

本书系统阐述地球物理电磁探测方法的原理和场的计算。其主要特点是对各种情况采用了自成体系的统一的数学处理方法，因此不仅便于了解各种方法的原理，而且能从中掌握基本计算方法的应用。全书分七章，由简到繁地讲述了直流电阻率法、激发极化法、电磁法、磁大地电流法和感应瞬变法的原理及计算，包括多种形状的地下媒质对电磁场的响应。着重原理，也介绍了某些应用。可作为地球物理勘探和天线、通讯等专业的教学参考书，也可供有关专业的科研、工程技术人员参考。

## Geo-Electromagnetism

James R. Wait

1982

ACADEMIC PRESS

## 大地电磁学

[美] James R. 维特 著

纪英楠 译

杨传耕 校

\*

责任编辑：张怀素

地质出版社出版

(北京西四)

地质出版社印刷厂印刷

(北京海淀区学院路29号)

新华书店北京发行所发行·各地新华书店经售

\*

开本：850×1168<sup>1</sup>/<sub>32</sub> 印张：9<sup>1</sup>/<sub>2</sub> 字数：246,000

1987年7月北京第一版·1987年7月北京第一次印刷

印数：1—2,000册 国内定价：2.70元

ISBN 7-116-00014-3/P.014

统一书号 13038·新446

# 目 录

译者前言

原序

第一章 大地电阻率法原理.....	(1)
引言.....	(1)
§ 1 两层大地模型的单电极的势.....	(3)
§ 2 任意四极排列.....	(7)
§ 3 三层模型的公式表述.....	(10)
§ 4 关于三层情况的讨论.....	(11)
§ 5 数值方法和解析方法.....	(13)
§ 6 各向异性的影响.....	(16)
§ 7 层状各向异性区域的电流源激励.....	(18)
§ 8 单层各向异性媒质中的电流源问题及其推广 .....	(22)
§ 9 出露的直立岩脉模型.....	(25)
§ 10 随深度变化的电阻率——指数模型.....	(25)
§ 11 随深度变化的电阻率——一般情形与核函数 .....	(30)
§ 12 楔体模型的电阻率.....	(33)
§ 13 180°楔体的极限情况.....	(36)
§ 14 锐角楔体的镜像解.....	(39)
§ 15 球问题.....	(43)
§ 16 均匀导电球的响应.....	(46)
§ 17 地下半球形塌陷.....	(49)
§ 18 点电流源和柱问题.....	(49)
§ 19 供电电极位于充满井液的钻孔轴线上.....	(51)

§ 20	供电电极位于层状隧道的壁中.....	(53)
§ 21	外部电流激励电缆的极限情况.....	(57)
§ 22	位于电阻性半空间内的电缆.....	(59)
§ 23	类球体问题.....	(61)
§ 24	接地电极的电阻.....	(67)
<b>第二章</b>	<b>电激发极化法理论 (似稳方法)</b> .....	<b>(73)</b>
	引言.....	(73)
§ 1	基本瞬态响应.....	(75)
§ 2	其他描述参量.....	(79)
§ 3	以带敷层的球状颗粒为基础的激发极化模型 .....	(82)
§ 4	层状可极化大地模型的响应.....	(89)
§ 5	不均匀媒质的一般公式.....	(91)
§ 6	导电薄板的电阻率和激发极化分析.....	(95)
§ 7	可极化球体的响应.....	(99)
§ 8	多区域可极化模型.....	(101)
<b>第三章</b>	<b>电磁感应与迴线-迴线耦合</b> .....	<b>(104)</b>
	引言.....	(104)
§ 1	圆电流迴线的磁场.....	(104)
§ 2	两层大地上方的圆迴线.....	(108)
§ 3	推广到M层媒质.....	(112)
§ 4	一般取向的源偶极子.....	(11)
§ 5	垂直和水平磁偶极子源的场的显式表达式 .....	(115)
§ 6	与直流电阻率的类比.....	(118)
§ 7	低频响应.....	(120)
§ 8	基本积分 $T_0, T_1, T_2$ 的渐近极限形式 .....	(124)
§ 9	互阻抗公式.....	(127)
§ 10	均匀半空间模型.....	(129)
§ 11	包括位移电流的情形.....	(132)

§ 12	水平磁偶极子的通解	(135)
§ 13	导电导磁球中的电磁感应	(137)
§ 14	导电球壳和内核边界的边界条件	(141)
<b>第四章</b>	<b>接地源的电磁耦合</b>	<b>(145)</b>
	引言	(145)
§ 1	一般原理	(146)
§ 2	关于各向异性介质的讨论	(152)
§ 3	水平电偶极子激励	(153)
§ 4	在 $N$ 层各向异性媒质上方的水平电偶极子	(161)
§ 5	互阻抗的公式表达	(166)
<b>第五章</b>	<b>垂直电流源激励的大地电导</b>	<b>(172)</b>
	引言	(172)
§ 1	垂直偶极子的精确积分解	(172)
§ 2	在半空间内的似稳态极限和场	(175)
§ 3	垂直接地线源	(178)
§ 4	钻孔中的电流源	(184)
§ 5	接地的有限电路间的瞬态耦合	(189)
<b>第六章</b>	<b>大地电磁理论</b>	<b>(191)</b>
	引言	(191)
§ 1	基本的平面波模型	(192)
§ 2	面电流源	(195)
§ 3	线源模型结果	(202)
§ 4	分段覆盖模型	(205)
§ 5	地下起伏界面	(210)
§ 6	结束语	(214)
<b>第七章</b>	<b>感应瞬变法</b>	<b>(215)</b>
	引言	(215)
§ 1	层状大地上方的脉冲激励迴线	(216)
§ 2	薄导电板极限	(223)

§ 3	均匀大地或半空间	(227)
§ 4	波导效应	(230)
§ 5	埋藏源问题	(236)
§ 6	埋藏目的体的散射	(239)
§ 7	半空间中的埋藏球体	(239)
§ 8	关于激发极化法和电磁法的最后说明	(240)
附录 A	横磁 (TM) 和横电 (TE) 球面电磁波	(241)
引言		(241)
§ 1	德拜势	(242)
§ 2	一般表面阻抗	(245)
§ 3	球的外部激励	(248)
§ 4	同心层状模型	(250)
§ 5	迭代解	(252)
§ 6	偶极子激励	(257)
§ 7	似稳态极限	(264)
§ 8	进一步推广	(269)
附录 B	对于贝塞尔函数积分的说明	(271)
索引		(273)
参考文献		(282)

# 第一章 大地电阻率法原理

## 引 言

即使对于相当简单的几何条件，电磁波与大地的相互作用也可能是很复杂的。幸而当应用直流电（dc）激励时，情况要容易处理得多。这种零频率的极限情况是我们进行分析的一个极好出发点。

由于将要在以后说明的原因，我们只讨论四电极系统，即电流  $I$  通过两个电极（如金属杆）注入大地，媒质中形成的场则用另外两个相邻的电极

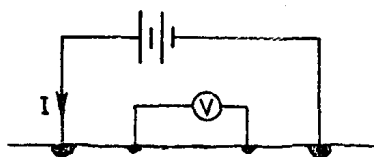


图 1 大地电阻率探测装置

（如细金属棒）探测（图1）。两电位电极之间的电压通常用一个内阻抗远大于电极触点与大地间阻抗的探测仪表来测量。

我们所关心的量是传输阻抗（transfer impedance），定义为  $Z = V/I$ 。在直流情况下， $Z$  变为传输电阻  $R$ ，量纲为欧姆。下面将要证明， $R$  正比于大地媒质的视电阻率（apparent resistivity） $\rho_a$ ，即  $R = F\rho_a$ ，式中  $F$  是一个具有长度量纲的因子。测量的最终目的是用地质构造来解释所测得的视电阻率  $\rho_a$ ，这种解释很少是直截了当的，但通过研究理想化的模型，同时记住这些模型的限制，却能获得很多的知识。

当讨论静电或直流电的流动时，电阻率  $\rho$  是电导率  $\sigma$  的倒数，下文中我们将讨论后者。我们规定  $\sigma(x, y, z)$  为坐标的函数，并且假定大地是各向同性的；于是欧姆定律取以下形式：

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} \quad (1)$$

式中  $\mathbf{J}$  是电流密度矢量，单位为安培/米<sup>2</sup>； $\mathbf{E}$  是电场强度矢量，单位为伏特/米。

电场可由一标量势  $\phi$  的梯度导出，即

$$\mathbf{E} = -\text{grad}\phi \quad (2)$$

另一个基本事实是

$$\text{div}\mathbf{J} = 0 \quad (3)$$

除了源本身以外，它在各点都成立。

读者可以作为一个练习很容易地证明

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} + \frac{1}{\sigma} \left[ \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \sigma}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial \sigma}{\partial y} + \right. \\ \left. + \frac{\partial \phi}{\partial z} \frac{\partial \sigma}{\partial z} \right] = 0 \end{aligned} \quad (4)$$

电导率  $\sigma(z)$  只随深度  $z$  改变的情况具有一定重要性。这时 (4) 式中包含  $\frac{\partial \sigma}{\partial x}$  和  $\frac{\partial \sigma}{\partial y}$  的项都消失，通过引入柱坐标  $(r, z)$ ，其中  $r = (x^2 + y^2)^{1/2}$ ，在具有方位对称性的条件下我们得到

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \frac{1}{\sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial z} = 0 \quad (5)$$

这个方程式可用分离变量法解出。为此，我们把  $\phi(r, z)$  写成一个  $r$  的函数和一个  $z$  的函数的乘积  $\phi(r, z) = \hat{R}(r)Z(z)$ 。于是 (5) 式分为两个必须同时满足的方程

$$\frac{d^2 \hat{R}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\hat{R}}{dr} + \lambda^2 \hat{R} = 0 \quad (6)$$

和

$$\frac{d^2 Z}{dz^2} + \frac{1}{\sigma} \frac{d\sigma}{dz} \frac{dZ}{dz} - \lambda^2 Z = 0 \quad (7)$$

式中  $\lambda$  是分离常数，到目前为止还是任意的。

(5) 式的通解可以写为

$$\psi = \int_0^{\infty} F(\lambda) \hat{R}(\lambda, r) Z(\lambda, z) d\lambda \quad (8)$$

的形式，可选择式中 $\lambda$ 的函数 $F(\lambda)$ 来满足所需边界条件。并且，我们随后将看到， $\lambda$ 的积分路径可以取为沿实轴进行。

## § 1. 两层大地模型的单电极的势

考虑一个两层大地模型（图2）作为前面的表述的例子。在 $0 < z < h$ 的区域，电阻率 $(\sigma_1)^{-1}$ 或 $\rho_1$ 是常数。电流 $I$ 在柱坐标系 $(r, \phi, z)$ 的原点流入这一层。为了直接解决这个问题，我们研究紧邻供电电极处场的状态。假定电极是半径为 $b$ 的小半球（图3）。显然，径向电流密度 $J_R$ 由下式给出

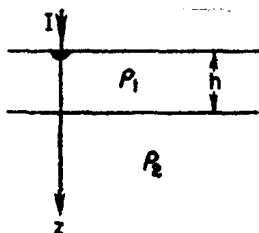


图2 点源电流流入两层大地

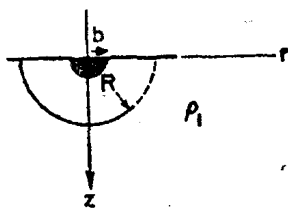


图3 半径为 $b$ 的供电电极附近区域的放大图

$$J_R = I / (2\pi R^2) \quad (9)$$

式中  $R = (r^2 + z^2)^{1/2}$ 。至少在紧靠供电电极的邻区，相应的径向电场 $E_R$ 可以看作

$$E_R = \rho_1 J_R \quad (10)$$

相应的势可以取为

$$\psi \simeq \psi^p = \frac{I \rho_1}{2\pi R} \quad (11)$$

式中的肩码 $p$ 在这里用来表示 $\psi^p$ 是一次势(primary potential)。

现在，我们从贝塞尔(Bessel)函数理论中[1]引用一个大家



熟知的关系

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{(r^2 + z^2)^{1/2}} = \int_0^{\infty} J_0(\lambda r) e^{-\lambda z} d\lambda, \quad (12)$$

$z > 0$ 。这里  $J_0(\lambda r)$  是零阶第一类贝塞尔函数的普通形式，而  $\lambda$  表示积分变量。 $\lambda$  可与前面引入的分离常数联系起来决非偶然。注意到 (12) 式的两端都满足拉普拉斯 (Laplace) 方程，并且在  $r \rightarrow 0$  的极限情况下结果为初等形式，(12) 式即可验证。

现在回到 (6) 式，注意  $\hat{R}(\lambda, r)$  实际即  $J_0(\lambda r)$  或  $Y_0(\lambda r)$ ，但因后者 (第二类贝塞尔函数) 当  $r = 0$  时为无穷大，所以它不可能在这个问题的解中出现。这样，我们就可把位于上层  $0 < z < h$  区域中的总势写作

$$\phi_1 = \phi^p + \int_0^{\infty} [\hat{A}(\lambda) e^{-\lambda z} + \hat{B}(\lambda) e^{\lambda z}] J_0(\lambda r) d\lambda, \quad (13)$$

这里我们可以把  $\phi_1 - \phi^p$  当作二次势 (secondary potential)  $\phi_1'$ ，因为若  $h \rightarrow \infty$ ，它趋于零。正如在  $0 < z < h$  和  $0 < r < \infty$  范围内与位置无关的电阻率  $\rho_1$  所应有的那样，(13) 式的右端显然满足拉普拉斯方程

$$\nabla^2 \phi_1 = 0 \quad (14)$$

$\hat{A}(\lambda)$  和  $\hat{B}(\lambda)$  这两个函数待定。于是，综上所述，所求的上层中的势的形式为

$$\phi_1 = \frac{I \rho_1}{2\pi} \int_0^{\infty} \{ [1 + A(\lambda)] e^{-\lambda z} + B(\lambda) e^{\lambda z} \} J_0(\lambda r) d\lambda, \quad (15)$$

式中用新的无量纲函数  $A(\lambda)$  和  $B(\lambda)$  代替了  $\hat{A}(\lambda)$  和  $\hat{B}(\lambda)$ 。只要把 (15) 式中的  $1 + A$  换为  $A$ ，就得到形式完全相同的  $\phi_1'$  的积分表示。

很容易看出适合下层 (即  $z > h$ ) 中势的形式为

① 可以参看本书附录 B。——译者注

$$\phi_2 = \frac{I\rho_1}{2\pi} \int_0^{\infty} C(\lambda) e^{-\lambda z} J_0(\lambda r) d\lambda, \quad (16)$$

式中所乘的因子是为了方便而选取的。函数  $C(\lambda)$  待定。注意，如果在  $z \rightarrow \infty$  时势有限，则  $e^{+\lambda z}$  因子不可能出现。

现在应用边界条件来确定未知函数  $A$ 、 $B$  和  $C$ 。首先，对于  $0 < r < \infty$ ，在  $z = 0$  处，垂直电流密度必须为零。其次，在  $z = h$  处势应连续。第三，在  $z = h$  处法线电流密度连续。这些条件依次要求

$$\text{在 } z = 0 \text{ 处, } \quad \frac{\partial \phi_1}{\partial z} = 0 \quad (17)$$

$$\text{在 } z = h \text{ 处, } \quad \phi_1 = \phi_2 \quad (18)$$

和

$$\text{在 } z = h \text{ 处, } \quad \frac{1}{\rho_1} \frac{\partial \phi_1}{\partial z} = \frac{1}{\rho_2} \frac{\partial \phi_2}{\partial z} \quad (19)$$

把这些关系施加于 (15) 式和 (16) 式 (即  $\phi_1$  和  $\phi_2$ )，我们得到

$$A - B = 0 \quad (20)$$

$$(1 + A)e^{-\lambda h} + Be^{\lambda h} = Ce^{-\lambda h} \quad (21)$$

$$(1/\rho_1)[(1 + A)e^{-\lambda h} - Be^{\lambda h}] = (1/\rho_2)Ce^{-\lambda h} \quad (22)$$

可以很快解出这些方程，得到

$$A = B = e^{-2\lambda h} K / (1 - Ke^{-2\lambda h}) \quad (23)$$

式中

$$K = (\rho_2 - \rho_1) / (\rho_2 + \rho_1) \quad (24)$$

应用  $A$  和  $B$  的值，上层中任意点的势  $\phi_1(r, z)$  就作为一个具有规定被积函数的积分给定。这个解大概是由 Stefanescu 及其合作者首先得出的〔2〕(可参看有关文献〔3〕—〔10〕)。

一个重要的特殊情况是观察点在地球表面上 (即  $z = 0$ )，这时

$$\phi_1(r, 0) = (I\rho_1/2\pi r)G(r, K) \quad (25)$$

式中

$$G(r, K) = 1 + 2Kr \int_0^{\infty} \frac{e^{-2\lambda h}}{1 - Ke^{-2\lambda h}} J_0(\lambda r) d\lambda \quad (26)$$

显然，若土层的厚度充分大（即  $h \gg r$ ），则  $G(r, K) \rightarrow 1$ 。另一个具有一定重要性的特例是土层的厚度非常小（即  $h \ll r$ ），因而

$$G(r, K) \rightarrow 1 + \frac{2Kr}{1 - K} \int_0^{\infty} J_0(\lambda r) d\lambda \quad (27)$$

这里的积分等于  $1/r$ ，于是

$$G(r, K) \rightarrow 1 + 2K/(1 - K) = \rho_2/\rho_1 \quad (28)$$

因而势  $\phi(r, 0)$  由  $I\rho_2/2\pi r$  给出，这正是电阻率为  $\rho_2$  的均匀半空间的值。虽然 (26) 式的积分可以用数值方法计算，求得一个级数形式的解还是有用的。为此，我们把被积函数中的系数展开为

$$\begin{aligned} (1 - Ke^{-2\lambda h})^{-1} &= 1 + K e^{-2\lambda h} + K^2 e^{-4\lambda h} + K^3 e^{-6\lambda h} + \dots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} K^n e^{-2n\lambda h} \end{aligned} \quad (29)$$

于是 (26) 式可以写为

$$G(r, K) = 1 + 2Kr \sum_{n=0}^{\infty} K^n I_n \quad (30)$$

式中

$$I_n = \int_0^{\infty} e^{-\lambda(n+1)2h} J_0(\lambda r) d\lambda = \frac{1}{\{r^2 + [(n+1)2h]^2\}^{1/2}} \quad (31)$$

在得到这个结果时，我们曾交换了积分及求和的顺序。因为 (29) 式是一个绝对收敛的级数，这样做是允许的。

势的级数形式的解具有清楚的物理解释。象图 4 中所表明的， $P(r, 0)$  处的势由位于  $z = (n+1)2h$  的一系列镜像源的总体产生，每个镜像源的强度为  $2K^n$ 。

另一种也许是更普遍的镜像配置方式，是在地球表面的上方和下方同时放置强度为  $K^n$  的镜像。在这种情况下，观察点  $P(r, z)$  可以在  $0 < z < h$  层内的任意位置。这个结论的证明留给读者去做。

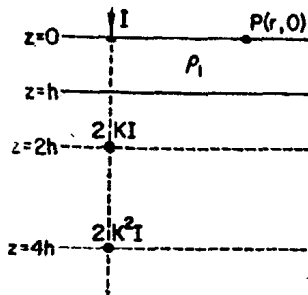


图 4 观察点在地表时，两层大地表面上的单一点电流源的镜象图示

## § 2. 任意四极排列

引言中我们已经指出，在实际情况中 + I 安培的电流源必然伴随着 - I 安培的电流尾。此外，还需要两个电位电极，如图 1 所示，伏特计才能测出电势之差  $V$  [4, 5, 11]。

为了能具有一定的普遍性，把供电电极和电位电极象图 5 所表示的那样任意地放置，图中表示出地表面  $z=0$  的平面图。  $P_1$  点的总电势  $\phi_1$  为

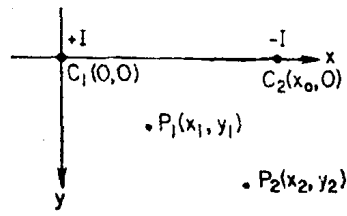


图 5 表示供电电极  $C_1$  和  $C_2$ ，电位电极  $P_1$  和  $P_2$  位置的平面图

$$\phi_1(x_1, y_1) = \frac{I\rho_1}{2\pi} \left[ \frac{G(r_{1,1}, K)}{r_{1,1}} - \frac{G(r_{2,1}, K)}{r_{2,1}} \right] \quad (32)$$

式中

$$r_{1,1} = (x_1^2 + y_1^2)^{1/2}, \quad r_{2,1} = [(x_0 - x_1)^2 + y_1^2]^{1/2}$$

$P_2$  点的总电势  $\phi_1$  为

$$\phi_1(x_2, y_2) = \frac{I\rho_1}{2\pi} \left[ \frac{G(r_{1,2}, K)}{r_{1,2}} - \frac{G(r_{2,2}, K)}{r_{2,2}} \right] \quad (33)$$

式中

$$r_{1,2} = (x_1^2 + y_1^2)^{1/2}, \quad r_{2,2} = [(x_0 - x_2)^2 + y_2^2]^{1/2}$$

两电极间的电压  $V$  由下式给出

$$V = \phi_1(x_1, y_1) - \phi_1(x_2, y_2) \quad (34)$$

若大地是完全均匀的 (即  $\rho_2 = \rho_1$  且 (或)  $h \rightarrow \infty$ ), (32) 式和 (33) 式中的各  $G$  函数显然都将为 1, 在这种情况下

$$V \rightarrow V_0 = \frac{I\rho_1}{2\pi} \left[ \frac{1}{r_{1,1}} - \frac{1}{r_{2,1}} - \frac{1}{r_{1,2}} + \frac{1}{r_{2,2}} \right] \quad (35)$$

但若大地是不均匀的, 我们可以把上式写为

$$V = \frac{I\rho_a}{2\pi} \left[ \frac{1}{r_{1,1}} - \frac{1}{r_{2,1}} - \frac{1}{r_{1,2}} + \frac{1}{r_{2,2}} \right] \quad (36)$$

来定义一个视电阻率  $\rho_a$ 。于是, 我们不避繁琐, 得出

$$\frac{\rho_a}{\rho_1} = \frac{\frac{G(r_{1,1}, K)}{r_{1,1}} - \frac{G(r_{2,1}, K)}{r_{2,1}} - \frac{G(r_{1,2}, K)}{r_{1,2}} + \frac{G(r_{2,2}, K)}{r_{2,2}}}{\frac{1}{r_{1,1}} - \frac{1}{r_{2,1}} - \frac{1}{r_{1,2}} + \frac{1}{r_{2,2}}} \quad (37)$$

该式是把视电阻率作为排列的几何特性的函数进行计算的显式。

上述结果的一个直接应用是温纳排列 (Wenner array), 这种排列的四个电极等间距地排在一条直线上。如图 6 中插入的小图所示, 两个供电电极跨列在电位电极  $P_1$  和  $P_2$  两侧。在这种情况下,  $r_{1,1} = r_{2,2} = a$ ,  $r_{1,2} = r_{2,1} = 2a$ , 因而

$$\rho_a / \rho_1 = 2G(a, K) - G(2a, K)$$

式中  $G$  由 (26) 式或 (30) 式确定。图 6 中表示的是  $K$  因子取不同值时两层模型的  $\rho_a / \rho_1$  函数, 它是相对极距  $a/h$  的函数。图中表明, 当  $K > 0$  ① 时, 视电阻率  $\rho_a$  大于上层电阻率  $\rho_1$ ; 这对应于下层电阻率  $\rho_2$  大于  $\rho_1$  的情况。当  $\rho_2$  小于  $\rho_1$  时, 情况相反。在两种情况下, 当上层厚度  $h$  变得远大于电极距  $a$  时,  $\rho_a$  都趋向于  $\rho_1$ 。当地质构造比较简单时, 这种曲线可用于测深资料的初步解释 [2, 3,

① 原文为  $K > 1$ , 有误。  $K$  由 (24) 式规定, 当  $\rho_2 > \rho_1$  时,  $K > 0$ 。——译者注

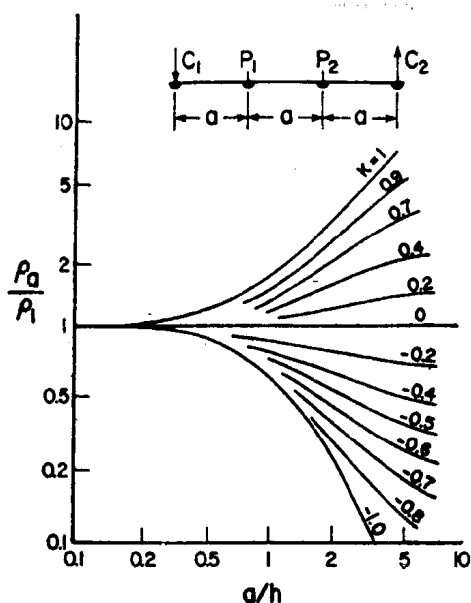


图 6 应用温纳法时两层模型的视电阻率曲线

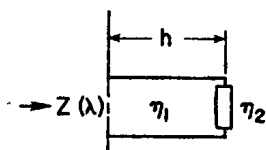


图 7 两层电阻率问题的等效传输线模型

4, 8]。

把两层问题的解 (25) 式改写为下式是有用的

$$\begin{aligned} \psi_1(r, 0) &= \frac{I\rho_1}{2\pi r} G(r, K) = \\ &= \frac{I\rho_1}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{1 - R e^{-2\lambda h}}{1 + R e^{-2\lambda h}} J_0(\lambda r) d\lambda \end{aligned} \quad (38)$$

式中  $R = -K = (\rho_1 - \rho_2) / (\rho_1 + \rho_2)$ 。但也可以写作  $R = (\eta_1 - \eta_2) / (\eta_1 + \eta_2)$ ，其中  $\eta_1 = \lambda\rho_1$ ， $\eta_2 = \lambda\rho_2$  具有以欧姆为单位的阻抗的量纲。如果我们进一步把 (38) 式改写为

$$\psi_1(r, 0) = \frac{I}{2\pi} \int_0^{\infty} Z_1(\lambda) \frac{J_0(\lambda r)}{\lambda} d\lambda \quad (39)$$

式中

$$\begin{aligned}
Z_1(\lambda) &= \rho_1 \lambda \frac{1 - R e^{-2\lambda h}}{1 + R e^{-2\lambda h}} \\
&= \gamma_1 \frac{(\gamma_1 + \gamma_2) - (\gamma_1 - \gamma_2) e^{-2\lambda h}}{(\gamma_1 + \gamma_2) + (\gamma_1 - \gamma_2) e^{-2\lambda h}} \\
&= \gamma_1 \frac{\gamma_1 \tanh(\lambda h) + \gamma_2}{\gamma_2 \tanh(\lambda h) + \gamma_1} \quad (40)
\end{aligned}$$

问题就表现出与传输线的相似性。这里  $Z_1(\lambda)$  可以解释为特征阻抗为  $\gamma_1$ ，长度为  $h$ ，端点接到  $\gamma_2$  欧姆的阻抗的传输线的输入阻抗 (图7)。传播常数  $\lambda$  当然具有米<sup>-1</sup>的量纲。注意，在本情况下，阻抗  $\gamma_1$  和  $\gamma_2$  实际是纯电阻，至少对于  $\rho_1$  和  $\rho_2$  为实量的静态极限是如此。传输线的传播常数也是实量。

### § 3. 三层模型的公式表述

现在，把我们的结果推广到图 8 中所表示的三层模型，经典解可以按如下的步骤得到：在  $0 < z < h_1$  区域，把  $\phi_1$  写成与 (15) 式中完全相同的形式。在  $h_1 < z < h_1 + h_2$  区域，因为在这一有界的中间层中，两种类型的波函数都可以存在，所以写作

$$\phi_2 = \frac{I \rho_1}{2\pi} \int_0^{\infty} [C(\lambda) e^{-\lambda z} + D(\lambda) e^{\lambda z}] J_0(\lambda r) d\lambda \quad (41)$$

来代替 (16) 式。在底层的半无限区域  $z > h_1 + h_2$ ，写作

$$\phi_3 = \frac{I \rho_1}{2\pi} \int_0^{\infty} E(\lambda) e^{-\lambda z} J_0(\lambda r) d\lambda \quad (42)$$

所需边界条件为：

$$\text{在 } z = 0 \text{ 处, } \quad \frac{\partial \phi_1}{\partial z} = 0 \quad (43)$$

$$\text{在 } z = h_1 \text{ 处, } \quad \phi_1 = \phi_2 \quad (44)$$

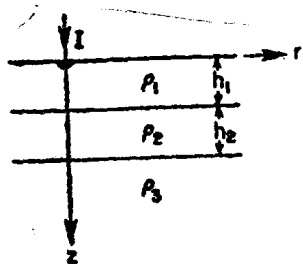


图 8 在三层模型表面的点电流源

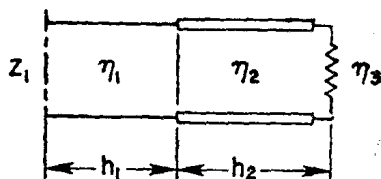


图 9 三层电阻率问题的等效传输线电路

$$\text{在 } z=h_1 \text{ 处, } \quad \frac{1}{\rho_1} \frac{\partial \phi_1}{\partial z} = \frac{1}{\rho_2} \frac{\partial \phi_2}{\partial z} \quad (45)$$

$$\text{在 } z=h_1+h_2 \text{ 处, } \quad \phi_2 = \phi_3 \quad (46)$$

$$\text{在 } z=h_1+h_2 \text{ 处, } \quad \frac{1}{\rho_2} \frac{\partial \phi_2}{\partial z} = \frac{1}{\rho_3} \frac{\partial \phi_3}{\partial z} \quad (47)$$

由此得出五个解未知系数  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  和  $E$  的线性代数方程。求解过程虽然冗长, 却是简单易懂的。势函数  $\phi_1(r, 0)$  的解与(39)式完全相同, 但现在

$$Z_1 = \eta_1 \frac{Z_2 + \eta_1 \tanh(\lambda h_1)}{\eta_1 + Z_2 \tanh(\lambda h_1)} \quad (48)$$

式中

$$Z_2 = \eta_2 \frac{\eta_3 + \eta_2 \tanh(\lambda h_2)}{\eta_2 + \eta_3 \tanh(\lambda h_2)} \quad (49)$$

等价的传输线电路如图 9 所示, 其中两段均匀的传输线是串联的, 两段的传播常数都是  $\lambda$ 。第一段的特征阻抗是  $\eta_1$ , 第二段是  $\eta_2$ , 终端的阻抗是  $\eta_3$ 。

#### § 4. 关于三层情况的讨论

我们可以把三层解表示为



$$\begin{aligned} \frac{\phi_1(r, 0)}{I} = Q(r) &= \frac{\rho_1}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{1 - R_1 e^{-2\lambda h_1}}{1 + R_1 e^{-2\lambda h_1}} J_0(\lambda r) d\lambda \\ &= \frac{\rho_1}{2\pi} \left[ \frac{1}{r} - 2 \int_0^{\infty} \frac{R_1 e^{-2\lambda h_1}}{1 + R_1 e^{-2\lambda h_1}} J_0(\lambda r) d\lambda \right] \quad (50) \end{aligned}$$

使之更清楚。式中

$$R_1 = \frac{\rho_1 - \rho_2 (1 - R_2 e^{-2\lambda h_2}) (1 + R_2 e^{-2\lambda h_2})^{-1}}{\rho_1 + \rho_2 (1 - R_2 e^{-2\lambda h_2}) (1 + R_2 e^{-2\lambda h_2})^{-1}} \quad (51)$$

上式中

$$R_2 = (\rho_2 - \rho_3) / (\rho_2 + \rho_3) \quad (52)$$

这里我们又一次应用了结果

$$\int_0^{\infty} J_0(\lambda r) d\lambda = \frac{1}{r} \quad (53)$$

$Q(r)$ 的积分表达式是可以计算的，因为当 $h_1 > 0$ 时，(50)式中后一形式的积分收敛。读者可在Mooney和Wetzel[3]以及Al'pin等人[5]所写的两本优秀著作中找到有关例子，书中还附有许多曲线。然而在许多情况下，正规积分表达式可以大大简化。例如，象Sunde所证明的[7, p.53]，如果中间层很薄，我们可应用近似式 $\exp(-2\lambda h_2) \approx 1 - 2\lambda h_2$ 。于是(51)式简化为

$$R_1 \approx \frac{\rho_1 - \rho_3 - (1 + \rho_1/\rho_2)(1 - \rho_3/\rho_2)\lambda\rho_2 h_2}{\rho_1 + \rho_3 + (1 - \rho_1/\rho_2)(1 - \rho_3/\rho_2)\lambda\rho_2 h_2} \quad (54)$$

对于这种二电极排列（即第二供电电极和第二电位电极在“无穷远”），势函数 $Q(r)$ 与视电阻率的关系为 $\rho_a = 2\pi r Q(r)$ 。作为一例，图10中绘出了 $\rho_a/\rho_1$ 随 $r/h_1$ 变化的函数关系曲线。参数按 $\rho_3 = 10\rho_1$ 和 $h_1 = 10h_2$ 选取。因此，我们讨论的是底层电阻率为中等，而中间薄层相对于顶层为高电阻或高电导的情况。图10明显表明，高电阻比高电导的中间层更难以推测。在后一种情况中，中间层的“集流”(channels)作用效果显著。

练习 证明在  $h_2 \ll h_1$  且  $\rho_2 \gg \rho_1$  和  $\rho_3$  时，上式还可以进一步简化为