数学建模

原理与方法

●蔡锁章 主编

海洋出版社

数 学 建 模

原理与方法

蔡锁章　　主编

张洪斌　李有文
曹旭东　杨　明　编

海洋出版社

2000年·北京

图书在版编目（CIP）数据

数学建模：原理与方法/蔡锁章主编；张洪斌等编．北京：海洋出版社，2000.7
ISBN 7-5027-4963-2

Ⅰ．数…　Ⅱ．①蔡…②张…　Ⅲ．数学模型-建立模型　Ⅳ．022

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2000）第 64551 号

责任编辑　王加林
责任印制　严国晋

海洋出版社　**出版发行**
（100081　北京市海淀区大慧寺路 8 号）
北京市燕山印刷厂印刷　　新华书店发行所经销
2000 年 6 月第 1 版　　2000 年 6 月北京第 1 次印刷
开本：787×1092　1/16　印张：23.25
字数：540 千字　　印数：1～1200 册
定价：34.00 元

前　言

众所周知，人类已经进入了以计算机、网络、数码、光纤、多媒体为主要标志的信息时代。定量化和数字化的技术得到了飞速发展，并应用于一切领域。不仅已有的数学成果和数字技术得到了大量的应用，而且对数学提出了许多有待进一步研究解决的问题。由于计算机和计算技术的巨大进展，数学建模的思想和方法得到了普遍有效的应用。由美国科学院院士 A. Friedman、J. Glimm 等主编的美国工业与应用数学学会（SIAM）的一个调研报告《正在出现的制造技术和管理实践中的数学与计算科学》中正确地总结了这样的发展，指出："数学建模和与之相伴的计算正在成为工程设计中的关键工具。"在实验、观察和分析的基础上，对实际问题的主要方面作出合理的假设和简化；明确变量和参数；应用数学的语言和方法形成一个明确的数学问题；然后用数学或计算的方法精确或近似求解该数学问题；检验结果是否能说明实际问题的主要现象，甚至能否进行预测、预报；这样的过程多次、反复进行，直到较好地解决问题。以上就是数学建模的全过程。

数学建模是对大学生掌握专业知识和数学理论与方法，分析和解决问题的能力，以及计算机和运算能力的全面考验，是对创新能力和实践能力进行素质培养的有效手段。1985年在美国出现了一个名为"数学建模竞赛（Mathematical Contest in Modeling，缩写为MCM)"的新型大学生数学竞赛。1992年以来我国一些城市也组织相应的数学建模竞赛，特别是1993年国家教委决定在全国大学生中开展数学建模竞赛作为大学生的课外科技活动以来，竞赛规模迅速发展。1999年全国已有26个省（市、自治区)、460所高校、2657个队参加竞赛。山西省教委非常重视这项活动，把它作为进一步提高教学质量、深化教学改革、提高大学生素质的一件大事来抓，1999年全省已有15所高校、93个队参加了全国大学生数学建模竞赛。

在全国大学生数学建模竞赛活动的推动下，全国许多高校或者开设了数学建模课程，或者组织对参赛学生的培训，各种数学建模教材和培训资料应运而生。在山西省教委的直接倡导和支持下，由山西省工业与应用数学学会组织编写了数学建模系列教材，我们编写的这本《数学建模——原理与方法》是系列教材中的一本。

《数学建模——原理与方法》由蔡锁章教授任主编，负责审阅全稿和最后定稿，张洪斌任副主编，审阅了部分稿件并编写了第一章和第二章，李有文编写了第三章、第五章的5.1、5.2以及第七章，曹旭东编写了第四章、第五章的5.3、5.4、5.5以及第六章，第八章和第九章由杨明编写。

在编写和出版过程中，山西省教委、山西省工业与应用数学学会和省城的高校：山西大学、太原理工大学、华北工学院、山西财经大学等领导都给予了大力协助，在此一并表示感谢。

限于水平，书中难免有不妥和错误之处，恳请读者批评指正。

编　　者

2000年2月

目　　次

第一章　建立数学模型

1.1　从现实对象到数学模型

在现实生活中，人们经常会遇到这样的问题，需要揭示某些数量的关系、模式或空间形式，以期使问题得到圆满解决。

例 1　包扎管道问题。水管或煤气管经常需要从外部包扎以便对管道起保护作用。包扎时用很长的带子绕在管道的外部，问如何进行包扎，才能使带子全部包住管道而且使用的带子最省，即包扎时不会发生重叠。

例 2　价格竞争问题。两个加油站位于同一条公路旁，为在公路上行驶的汽车提供同样的汽油，彼此竞争激烈。一天甲加油站推出“降价销售”吸引顾客，结果造成乙加油站的顾客被拉走，影响了乙站的赢利。利润是受售价和销售量的影响和控制的，乙加油站为了挽回损失采取对策，决定也降低售价以争取顾客，问他们如何决定汽油的价格，既可同甲站竞争，又可获取尽可能高的利润。

例 3　市场服务问题。某超级市场有两个出口，在出口处的服务有两项：一是收款，二是将顾客所购的商品装入袋内。商店只有两名职工从事出口处的服务工作。有两种安排方案：(1) 只开一个出口，一人收款，一人装袋；(2) 开两个出口，每人既收款又装袋。问经理应该选择哪一种出口处的服务方案。

例 4　供需问题。在市场经济中，社会对某些商品经常发生供过于求—供不应求—供过于求这样往复变化的情况。由于一个时期商品过剩而引起价格下跌，生产者为减少损失，必然减少或暂不生产这种商品，于是在另一时期就会发生因商品短缺而导致价格上涨，这又刺激生产者大量生产，从而又造成产品积压，如此循环不已。我们关心的是：这种商品数量和价格的波动，其变化趋势将是怎样的呢？

例 5　生产计划问题。某工厂与客户签订了生产两种型号产品 A，B 的合同，厂技术部门根据合同要求和产品的性能作出了生产预算，每台产品的装配和检验工时消耗和销售利润如表 1.1 所示。

表 1.1　每台产品的工时消耗和销售利润

产品型号	工时消耗定额(小时/台)		销售利润(元/台)	日产量
	装配	检验		
A	1.2	0.5	200	x_1
B	4.0	1.0	500	x_2
劳动工时总量(小时)	240	82		

工厂每日可用于装配和检验工序的劳动工时分别为 240 小时和 82 小时，同时每台型号 B 的产品需要装入某种机械产品 1 只，该种零件由外单位供应，每天最多供应 40 只，其他

零部件和材料不受限制。

讨论该工厂每天应安排生产 A、B 两种型号产品各多少台供应客户，才能在工厂劳动工时总量和某机械零件供应量允许的条件下，使工厂销售盈利最大。

上述例子都是发生在我们身边的实际问题，要解决它们，首要的工作是建立与实际问题相符的数学模型，即要把实际问题变成正确的数学表述，然后在模型的基础上进行理论求解，分析和研究。

比如例 2，我们将站在乙加油站的立场上为其制定价格对策，就需要建立一个数学模型来描述甲站汽油价格下调后乙加油站销售量的变化情况。为描述价格和汽油销售量之间的关系，引入如下一些指标：

P——汽油的正常销售价格（元/升）；

L——降价前乙加油站的销售量（升/日）；

w——汽油的成本价格（元/升）；

x——乙加油站的销售价格（元/升）；

y——甲加油站的销售价格（元/升）。

还需要分析影响乙加油站汽油销售量的因素。它受以下几个因素的影响：

(1) 甲加油站汽油降价的幅度；

(2) 乙加油站汽油降价的幅度；

(3) 两站之间汽油销售价格之差。

此外还假定汽油的正常销售价格保持不变，并且假定以上各因素对乙加油站汽油销售量的影响是线性的。于是，乙加油站的汽油销售量可由下式给出

$$L-a(P-y)+b(P-x)-c(x-y)$$

其中 a、b、c 是以上三个因素对乙加油站汽油销售量影响的比例常数，且均大于零。因此乙加油站的利润函数为

$$R(x,y)=(x-w)[L-a(P-y)+b(P-x)-c(x-y)]$$

如果 y 给定，可以求得 $R(x, y)$ 关于 x 的极大值点为

$$x^*=[L+y(a+c)-P(a-b)+w(b+c)]/2(b+c)$$

也就是说，当甲加油站把汽油价格降到 y 元时，乙站把它的汽油价格定为 x^* 时，可以使乙站获得最高的利润。

在数值模拟中，令 $L=2000$，$P=4$，$w=3$，$y=3.7$，3.8，3.9，由于经济学的现象是难以通过试验来实现的，我们无法要求任何一个加油站频繁调整它的销售价格来系统计算不同价格下的销售量，因此参数 a，b，c 难以给出估计值，只能是虚拟数值：$a=b=1000$，$c=4000$。表 1.2 列出了甲加油站降价 0.1 元，0.2 元，0.3 元时乙站的最优销售价格。

表 1.2　乙加油站的最优售价及其利润

y	x	$R(x,y)$
3.9	3.65	2112.5
3.8	3.60	1800.0
3.7	3.55	1512.5

请考虑：在这个模型的数值模拟中，为什么三个参数都取数量级 O (1000)? 用其他数

量级试一试。

从上例我们看到，数学模型实际上就是对于现实问题中的某一特定对象，为了某个特定目的，做出一些必要的简化和假设，运用适当的数学工具得到的一个数学结构。它或者能解释特定现象的现实性态，或者能预测对象未来状况，或者能提供处理对象的最优决策或控制。

1.2 数学模型的基本概念

数学模型的含义很广，提法也不一。一般来说，按照广义的解释，凡是一切数学概念、数学理论体系、各种数学公式、各种方程式（代数方程、函数方程、微分方程、差分方程、积分方程等）以及由公式系列构成的算法系统等都被称为数学模型。按照狭义的解释，凡是将具体现象、事物的特征和性质给以数学表达的数学结构，如各种等式、不等式、图、表或框图等，也叫数学模型。在本书中，数学模型一词作狭义的理解。即以解决某个现实问题为目的。从该问题中抽象、归结出来的数学问题就称为数学模型。更简洁地，也可以认为数学模型就是用数学术语对现实问题的具体描述。

既然数学模型是以解决现实问题而建立起来的。它必须反映现实，也就是反映现实问题的数量关系。但是由于能用数学表示的事物是有限的，因此在许多情况下，与现象完全吻合的数学表述是不可能的。数学模型作为一种模型，必须对现象做出一些必要的简化和假设，首先要忽略现实问题中许多与数量无关的因素，其次还要忽略一些次要的数量因素。正是由于这种原因，可以说数学模型是用数学关系式描述的一种假定情况。

建立数学模型的过程称为数学建模。用数学方法解决现实问题的第一步就是建立数学模型，然而数学建模决非易事，通常需要经过多次反复，即通过对现实问题的探求，经简化、抽象，建立初步的数学模型，再通过各种检验和评价，发现模型的不足之处，然后作出改进，得到新的模型。这样的过程通常要重复多次才能得到理想的数学模型。

在现实问题中，由于特定对象系统形形色色，千差万别，描述它们的模型，也就种类繁多。下面介绍几种常见的数学模型的分类方法。

(1) 按照模型所使用的数学方法可分为确定性模型、随机性模型和模糊性模型。

确定性模型：模型相应的实际对象具有确定性和固定性，对象间又具有必然的关系，这类模型的表示形式可以是各种各样的方程式、关系式、逻辑关系式、网络图等，所使用的方法是经典的数学方法。

随机性模型：这类模型的实际对象具有随机性，数学模型的表示工具是概率论、过程论及数理统计等。

模糊性模型：这类模型所相应的实际对象及其关系具有模糊性，数学模型的基本表示工具是 Fuzzy 集合理论及 Fuzzy 逻辑等。

(2) 按照对研究对象的了解程度，有所谓白箱模型、灰箱模型和黑箱模型。

这里白箱是指可以用像力学、电路理论等一些机理（指数量关系方面）清楚的学科来描述的现象，其中需要研究的主要是优化设计和控制方面的问题；灰箱主要是指化工、水文、地质、气象、交通、经济等领域中机理尚不清楚的理象，对这类问题，在建立和改善模型方面还有许多工作要做；至于黑箱，主要包括的可能是生态、生理、医学、社会等领

域中一些机理更不清楚的现象。黑箱问题过去作定性研究较多，但研究逐渐往定量化方向发展。定性因素数量化一般采用模糊数学方法、优度法及比较矩阵法。

（3）按照数学模型的结构可分为分析的，非分析的和图论的。分析的模型是以无穷小量概念为基础研究函数中变量之间的依赖关系，如常微分方程、偏微分方程、积分变换、无穷级数和积分方程等；非分析的模型是用符号系统来表示方程或表达式中变量和常数的运算关系（如代数），或者研究他们的坐标关系（如几何），集合论、群论、抽象几何均属此类型；图论的模型是以点和点的连线（有向的或无向的）组成的用来表示各种关系的图形，既能表达分析的问题，又能表达非分析的问题，具有独特的运算形式，如结构树图、决策树图、状态图等。

（4）按照模型研究变量特性，可以分为离散模型和连续模型；或者线性模型和非线性模型；或者单变量模型和多变量模型；或者静态模型和动态模型；或者参数定常模型和参数时变模型；或者集中参数模型和分布参数模型等。

（5）按照模型研究对象所属的实际领域有工程模型、人工模型、交通模型、生态模型、生理模型、经济模型、社会模型等。

最后还要指出，数学建模的方法与其他抽象方法是不同的。它除对现实问题中的事物、过程和现象进行抽象，还必须要用某种文字、符号、图形、数学公式描述客观事物的特征及其内在联系，然后对它们进行研究、分析、检验，并导出结论。数学建模方法与实验方法也不同，它不要求对事物过程或现象本身进行科学实验，只通过模拟这些事物过程和现象的模型进行验证。正因为如此，这种数学建模方法在解决实际问题中得到了广泛的应用。

1.3 怎样建立一个完整的数学模型

我们已经看到数学建模是利用数学工具解决实际问题的重要手段。那么，什么是一个好的数学模型呢？一般说来，好的数学模型应具备以下特点：

（1）对所给问题有较全面的考虑。在一个实际问题中，往往有很多因素同时对所研究的对象发生作用，进行数学描述时，应全面地对这些因素加以考虑。这项工作可分为三步进行：

1）列举各种因素；

2）选取主要因素计人模型；

3）考虑其他因素的影响，对模型进行修正。

（2）在已有模型上进行创造性的改造。数学模型是现实对象抽象化、理想化的产物，它不为对象所属领域所独有，可以转移到另外的领域。在生态、经济、社会等领域内建模就常常借用物理领域中的模型，能否对已有的模型作出创造性的改进，是考虑一个数学模型优劣的重要标志。

（3）善于抓住问题本质，简化变量之间关系。数学模型应当是针对实际问题的本质刻划，模型过于复杂，则无法求解或求解困难，就不能反映客观实际。因此建模的原则是：模型尽可能简单明了，思路清晰，能不采用则尽量不用高深的数学知识，不追求模型技术的完美，而侧重于实际应用。

（4）注重结果分析，考虑其在实际中的合理性。数学建模是一个从实际到数学，再从

数学到实际的过程。由于现有的模型仅依赖于题中数据，则如果从模型得出的结果与实际吻合，模型是成功的，如果差别较大，模型是失败的。

（5）具有较好的稳定性。数学模型是依据已有的数据和其他信息建立的，它的价值在于能够从已知的信息预测未知的东西。因此，一个好的数学模型的结果对原始数据应有较好依赖性，即原始数据或参数的微小变动不会引起结果的很大变化，这是模型适用性和有效性的保证。

在了解了数学模型的特点之后，下面我们给出建立数学模型的方法和步骤：

（1）明确问题

要建立现实问题的数学模型，第一步是对要解决的问题有一个明确清晰的提法，通常我们碰到的某个实际问题，在开始阶段是比较含糊不清的，又带有实际背景，因此在建模前必须对问题进行全面深入细致的了解和调查，查阅有关文献，同时要着手收集有关数据，收集数据时应事先考虑好数据的整理形式，例如利用表格或框图形式等。在这期间还应仔细分析已有的数据和条件，使问题进一步明确化。即从数据中可得到什么信息？数据来源是否可靠？所给条件有什么意义？哪些条件是本质的？哪些条件是可以变动的等。对数据和条件的分析结果会进一步增强我们对问题的了解，使我们更好地抓住问题本质及特征，为建立数学模型打下良好的基础。

（2）进行合理的假设

建立数学模型的主要目的在于解决现实问题，然而现实问题不经过理想化、简单化处理就很难转变成数学问题，即使可能，也会因过于复杂而很难求解。因此，作出合理的假设在数学建模中起着至关重要的作用，所谓合理的假设是指这些假设既能抓住问题的本质特征，又能使问题得到简化，便于进行数学描述，称这样的假设为简化问题的假设，这里要提醒注意的是：对于一个假设，最重要的是它是否符合实际情况，而不是为了解决问题的方便。

如何对问题提出合理的假设是一个比较困难的问题，这因为假设作得过于简单，则使模型远离现实，无法用来解决现实问题，假设作得过于详细，试图把复杂对象的各方面因素都考虑进去，模型就会十分复杂甚至难以建立。通常作出合理假设的依据一是出于对问题内在规律的认识，二是来自对数据或现象的分析，也可以是两者的综合。作假设时既要运用与问题相关的物理、化学、生物、经济等方面的知识，又要充分发挥想象力、洞察力和判断力，善于辨别问题的主次，抓住主要因素，舍弃次要因素，尽量使问题简化（比如线性化、均匀化等）。经验在这里也常起重要作用。

最后要指出，有些假设在建模过程中才会发现。因此在建模中要注意调整假设。以使模型尽可能地接近实际。

（3）建立模型

在已有假设的基础上，利用合适的数学工具，建立描述问题中变量之间的关系，确定其数学结构，就得到了实际问题的数学模型。

这里有两点要注意：其一，构造一个具体问题的模型时，首先应构成尽可能简单的数学模型，然后把构造简单的模型与实际问题进行比较，再考虑将次要因素归纳进去，逐渐逼近现实来修改模型，使之趋于完善。也就是说，数学建模是一个不断精确化的过程。切忌建模之初就把问题复杂化。其二，要善于借鉴已有问题的数学模型，许多实际问题，尽

管现象和背景不同，但却具有相同的模型，例如力学中描述力、质量和加速度之间关系的牛顿第二定律 $F=ma$，经济学中描述单价，销售金额和销售量之间关系的公式 $c=pq$ 等，数学模型都是 $y=kx$。一个数学模型应用于多个实际问题是屡见不鲜的。要学会观察和分析，透过现象，抓住问题的本质特征，利用已有模型，或在已有模型上进行修正，以此提高我们的建模水平。

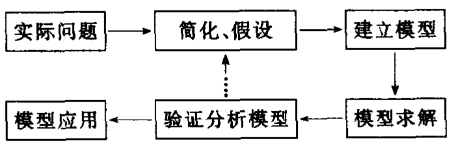
(4) 模型求解

不同的模型要用到不同的数学工具求解。可以采用解方程、画图形、证明定理、逻辑运算、数值计算等各种传统的和近代的数学方法，但多数场合模型必须依靠电子计算机数值求解。熟练利用数学软件包会为我们求解带来方便。

(5) 模型的检验与修正

建立数学模型的目的在于解决实际问题。因此必须把模型所得的结果返回到实际问题，如果模型结果与实际状况相符合，表明模型经检验是符合实际问题的。如果模型结果很难与实际相符合，表明这个模型与所研究的实际问题是不符合的，不能直接将它应用于实际问题。这时数学模型的建立过程如果没有问题，就需要考察建模时关于问题所作的假设是否合理，检查是否忽略了不应忽略的因素或还保留着不应该保留的因素。对假设给出必要的修正，重复前面的建模过程，直到使模型能反映所给的实际问题。

建立数学模型的步骤可以用下面的框图表示。



1.4 数学建模实例

下面我们给出一个例子来说明如何应用上面所指出的过程来建立数学模型，重点是如何作出合理的、简化的假设，用数学语言确切地表述实际问题，以及模型的结果怎样解释实际现象。

建立雨中行走的数学模型。在雨中未带雨伞行走，显然尽可能快的走，减少淋雨时间才能少淋雨。如果考虑降雨方向的变化，在全部距离上快跑不一定是最好策略。我们讨论如何在雨中行走才能减少淋雨的程度。

这个问题的实际背景很简单，先分析参与这一问题的因素，主要有：1. 降雨的大小；2. 风的方向，也即降雨方向；3. 路程的远近及你跑的速度。

为简化问题的研究，提出如下假设：

(1) 降雨的速度（即雨滴下落速度）和降水强度保持不变；

(2) 人在雨中沿一直线从某地跑至目的地；

(3) 以定常速度跑完全程；

(4) 风速、风向始终保持不变；

(5) 把人体看成是一个长方体物体。

首先讨论最简单情形，即不考虑降雨角度的影响，也就是说行走过程中身体的前后左