电 信 网 络 分 析

北方交通大学　王文煊主编

中 国 铁 道 出 版 社

1 9 8 4 年 · 北京

内 容 簡 介

本书主要介绍电信网络的基本理论及分析方法。全书共分九章：第一章网络拓朴和矩阵分析法、第二章网络函数、第三章一端口网络、第四章两端口网络的影像参数和影像参数滤波器、第五章图表法设计工作参数滤波器、第六章RC有源滤波器、第七章传输线、第八章均衡器、第九章计算机辅助分析，每章后均附有习题。

本书可作为高等院校电信专业教学用书，也适合电信专业工程技术人员学习参考。

电信网络分析

北方交通大学　王文煊主编

中国铁道出版社出版

新华书店北京发行所发行

各 地 新 华 书 店 经 售

中国铁道出版社印刷厂印

开本：787×1092 $\frac{1}{16}$ 印张：26.5 字数：667千

1 9 8 4年3月 第1版　1 9 8 4年3月 第1次印刷

印数：0001—6,000册　定价：2.75元

目 录

第一章　网络拓朴和矩阵分析法

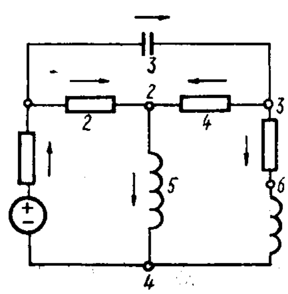
现代大型复杂网络的分析计算，都是根据网络的拓朴结构和元件参数，用普遍而又系统的方法列出网络方程和求解网络方程，这些工作都是靠编制程序利用计算机来进行。本章将对网络拓朴概念、网络矩阵分析方法以及它们在计算机辅助分析中的应用作初步介绍。

第一节　网络拓朴的一些定义

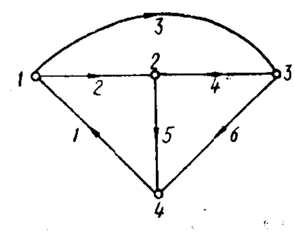
网络理论的基本定律是基尔霍夫的电压定律KVL和电流定律KCL。这两个定律只是根据网络结构对网络元件的电压和电流所加的约束，它与元件本身的性质没有关系。而网络拓朴也是从网络几何或网络结构出发来讨论网络的特性，也就是网络的拓朴特性与组成网络支路所用元件种类没有关系，因此各个元件都可用一个线段来代表拓朴支路。下面首先介绍一些定义。

线图　用一些线段把各个点联接起来，这些线段叫支路，这些点叫节点。节点与支路的集合叫线图。

图1·1(b)是图1·1(a)的线图。图1·1(a)、(b)的各支路和节点均标以相同的编号，下面就用这个例子说明一些特性。



(a)



(b)

图1·1　网络及其线图

图1·1(b)各支路的端点落到一个节点上叫做在节点上的关联。本例中支路2、4和5关联在节点2上。

图1·1(b)中线图的每个支路都有一个箭头代表它的方向，这样的线图叫有向线图。箭头方向就代表电流的参考方向，而电压的参考方向的“十”约定在箭头尾部。

子图　线图中的一部分节点和支路叫子图。如果这个子图比线图的支路和节点都少时就叫正则子图。

通路　具有下列性质的由一组支路序列组成的子图叫通路。

1．除去两个节点以外的全部节点都是内节点，在内节点上正好有这个子图的两个支路相关联。

2．内节点以外的两个节点叫端节点，在端节点上只有这个子图的一个支路关联。

3. 这个子图没有另外与它端节点相同的正则子图，并具有性质 1 和 2。

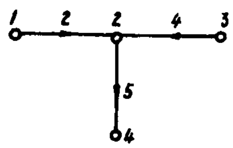
图1·1(b)中支路 2 、 5 和 6 同全部节点组成一个通路。节点 1 、 3 叫端节点。虽然在 2 节点上有三个支路相关联，但只有 2 和 5 属于子图。

如果在任何两节点之间至少有一个通路叫连通图。图1·1就是一个连通图。含有变压器的网络就是一个不连通图。

回路 一个通路的两个端节点如果重合时就形成一个回路。在图1·1(b)中支路 4 、5 、6 与节点 2 、 3 、 4 一起组成一个回路。这个回路可以用支路或节点来说明，即用支路{ 4 、5 、 6 } 或用节点 { 2 、 3 、 4 } 都指的是同一个回路。

树 树是包含所有节点的连通图的一个不形成回路的连通子图。用树支路表来说明一个树。在图1·1(b)中，支路 2 、 4 、 5 组成一个树。树的概念是拓朴理论中的重要概念。树支路叫树支，不是树支的支路叫连支。各连支一起组成树的补支路或称余树支路。

图1·2中示出图1·1(b)的两种树。第一个树是由树支路 2 、 4 、 5 组成的，支路 1 、 3 和 6 是连支路。第二个树中支路 2 仍是树支路，但原先是连支的 3 和 6 则变成现在的树支路。对一个图中的某一支路在未指定树之前，不能说它是树支路还是连支路。图1·2中的每个树都有一个特别构造。第一个是所有树支都关联在某一公共节点上，这种树叫星形树或简称星树。第二个是从第一个节点起到最后一个节点按序组成的一个通路，这种树叫线树。在一个线树中正好有两个端节点。而在星树中，除去一个节点外所有的节点都是端节点。



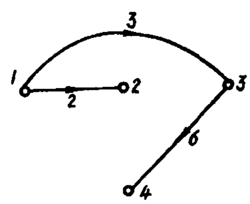


图1·2　图1·1(b)的两个树

一个图的树支路数比节点数少一。为了以后方便，规定图的节点数为 $n+1$，则树支路数为 n。

第二节　关联矩阵和节点分析法

一、关 联 矩 阵

对图1.1所示网络，可以由KCL列出以下的电流关系，即

节点 1： $-I_1+I_2+I_3=0$

节点 2： $-I_2-I_4+I_5=0$

节点 3： $-I_3+I_4+I_6=0$

节点 4： $I_1-I_5-I_6=0$

写成矩阵形式为

$$
\begin{array}{c|c}
 & \text{支路}\rightarrow \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \\
\begin{array}{c} \text{节点}\downarrow \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} &
\left(\begin{array}{cccccc} -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{array}\right)
\left(\begin{array}{c} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \\ I_6 \end{array}\right) = 0
\end{array}
$$

将各支路电流改用向量$\boldsymbol{I}_b$表示，上式又可以改写为

$$\boldsymbol{A}_a \boldsymbol{I}_b = 0$$

其中

$$\boldsymbol{A}_a = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \tag{1·1}$$

叫增广关联矩阵。

$$\boldsymbol{I}_b = [I_1 \quad I_2 \quad I_3 \quad I_4 \quad I_5 \quad I_6]^T$$

上例表明当给定一个线图时，例如图1·1所示网络，完全可能说出某个支路在某个节点上与其它支路关联情况，并说出它对于节点的参考方向。反之如果在全图中所有支路和所有节点的关联关系都给定并给出各支路的参考方向，则这个图也就完全固定下来。

对一个有$n+1$个节点，b个支路的图，其增广关联矩阵$\boldsymbol{A}_a=[a_{ij}]$是一个$(n+1)\times b$的长方矩阵，各元按下述条件给定：

$a_{ij}=1$，如果支路j与节点i关联且其方向是离开节点i；

$a_{ij}=-1$，如果支路j与节点i关联，其方向是指向节点i；

$a_{ij}=0$，如果支路j与节点i不关联。

$\boldsymbol{A}_a$的下标a表明包括全部节点。由(1·1)式可看出每列都包括一个$+1$和-1，这是线图的一般性质。因为每个支路要在两个节上与其它支路关联，其方向是指向一个节点而离开另一个节点。因此任何一行，比如最后一行的元素都是其它行相应列元素之和的负数，因而最后一行不是独立的。因此最少可消去最后一行或任何一行。所以$\boldsymbol{A}_a$的泆最多是$(n+1)-1=n$。

将$\boldsymbol{A}_a$去掉一行的矩阵叫关联矩阵并以$\boldsymbol{A}$表示。它是一个$n\times b$阶矩阵。我们将讨论$\boldsymbol{A}$的秩以及它的非奇异子矩阵如何求法。

选出给定图的树。在关联矩阵中首先写出对应n个树支路的前n列，其余的$b-n$列则对应连支路。

在本例中，设$\boldsymbol{A}$是去掉(1·1)式末行的矩阵。选图1·1中的第一个树，则$\boldsymbol{A}$矩阵将是

$$
\begin{array}{c}
\qquad \overbrace{\quad 2 \quad 4 \quad 5 \quad}^{\text{树支路}} \quad \overbrace{\quad 1 \quad 3 \quad 6 \quad}^{\text{连支路}} \\
\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}
\end{array} \tag{1·2}
$$

下面将证明$\boldsymbol{A}$的秩为n，因此$\boldsymbol{KCL}$的几个独立方程可写为

$$\boldsymbol{AI}_b=0 \tag{1·3}$$

写成一般形式，$\boldsymbol{A}$可分块为

$$\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{A}_t\ \ \boldsymbol{A}_L] \tag{1·4}$$

式中$\boldsymbol{A}_t$为n阶方矩阵，它是对应树支路的矩阵，而$\boldsymbol{A}_L$则是对应连支路的 $n\times(b-n)$ 阶矩形矩阵。在(1·2) 中

$$\boldsymbol{A}_t=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

它的行列式值等于-1，所以是非奇异矩阵，因而本例$\boldsymbol{A}$矩阵的秩为n。

下面将指出这是一个一般的结果，即具有$n+1$个节点的图，其关联矩阵的秩为n。如果证明了关联矩阵的一个子矩阵，其各列相当于由某一树的树支路所组成的n阶方阵而且这个子矩阵是非奇异的，就证明了其关联矩阵的秩为n。

证 设图是连通的，其节点为数$n+1$，则去掉增广关联矩阵末行便得$b\times n$阶的关联矩阵$\boldsymbol{A}$，相应树的分块矩阵$\boldsymbol{A}_t$是n阶的正方矩阵。因为树是和各节点连接的，因此去掉末行所对应的节点（例如本例的节点4）一定有一个树支（5）与它关联，在$\boldsymbol{A}_t$矩阵中对应这个树支(5)的列只剩一个元素不是零（±1），求这个元素的余子式，则$\boldsymbol{A}_t$矩阵的行列式等于±1乘此余子式的行列式。此余子式的阶数为$n-1$，因为图是连通的，在求子式时，和所去行相应的节点（2）上，至少有一个与树支路相当的列中的非零元素被去掉了（例如树支路2列中的-1及树支路4列中的-1都被去掉了）。因此余子式一定有某些列（例如树支2和树支4）只剩下一个±1，从而余子式的行列式就等于它的余子式的行列式乘以±1，而余子式的余子式的矩阵的阶为$n-2$。继续下去，直到剩下一个为±1的余子式。从而证明了$\boldsymbol{A}_t$的行列式值为±1，是非奇异的，因此关联矩阵的秩为n。这是一个很有用的结果。利用它可导出求一个图的树的个数公式。(证明见习题2·43)即

$$\det(\boldsymbol{AA}^T)=\text{树的个数} \tag{1·5}$$

对图1·1所示例中，树的个数可利用（1·1）式来求，即

$$\det(\boldsymbol{AA}^T)=\det\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T$$

$$=\det\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}=3\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$=24-4-4=16$$

给定线图时可以很容易地求得关联矩阵。如果给定关联矩阵，如何求线图呢？方法是根据给定关联矩阵的行数，按次序在纸上画出相应的节点并标以相同的数目字。另外再增加一个节点。然后逐次按每列在相应±1元素的节点间画支路线，并标以列数，如果该列只有一个非零元素，则在该元素所对应的节点与额外增加的节点间画对应该列的支路，并根据元素的符号以箭头画出支路方向。

关联矩阵不但能说明KCL，即$AI_b=0$，而且也说明了各点电位与支路电压之间的关系。例如在图1·1中利用简单的KVL可写出

$$\begin{aligned}V_1&=-E_1\\V_2&=E_1-E_2\\V_3&=E_1-E_3\\V_4&=-E_2+E_3\\V_5&=E_2\\V_6&=E_3\end{aligned}\quad\text{或}\quad\begin{pmatrix}V_1\\V_2\\V_3\\V_4\\V_5\\V_6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0&0\\1&-1&0\\1&0&-1\\0&-1&+1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E_1\\E_2\\E_3\end{pmatrix}\tag{1·6}$$

（1·6）式中的六行三列矩阵正好是（1·1）式去掉最末一行所得关联矩阵A的转置矩阵，因此上式可写作

$$\boldsymbol{V}_b=\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{E}\tag{1·7}$$

式中$\boldsymbol{V}_b=\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{V}_n$为支路电压向量，$\boldsymbol{V}_n=\boldsymbol{E}-0$为节点电压向量。

利用（1·3）和（1·7）两式可以证明一个很有用的特勒根定理。该定理是不管各支路的网络元件是什么，恒有

$$\sum_{k=1}^{b}V_bI_b=0\tag{1·8}$$

证明很简单，即

$$\sum_{k=1}^{b}V_bI_b=\boldsymbol{V}_b^T\boldsymbol{I}_b=(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{V}_n)^T\boldsymbol{I}_b=\boldsymbol{V}_n^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{I}_b=\boldsymbol{V}_n^T0=0\tag{1·9}$$

二、节点分析法

节点电压法是解电路时喜欢用的方法。它之所以得到广泛应用，是因为在许多的实际网络中，节点数少而支路数却很多。因此解节点电压时求解的未知数少。一旦求出节点电压就很容易求出全部支路电流和支路电压。

分析的方法是先研究网络局部描述，然后将这些局部约束和前一节中用KVL、KCL方程得到的整体约束结合在一起，以得到整个网络的描述。即当一个支路包含一个线性导纳，一个独立电压源和一个独立电流源时，明确支路电流和电压有什么约束。将所有的支路约束总起来再用一个简洁的向量方程来表示。现分述如下：

（一）组合支路

为了便于利用计算机分析电路，支路都用组合支路代表。设网络有b个支路和$n+1$个节点，节点号从0到n，节点0为参考点，其第k个组合支路如图1·3所示。

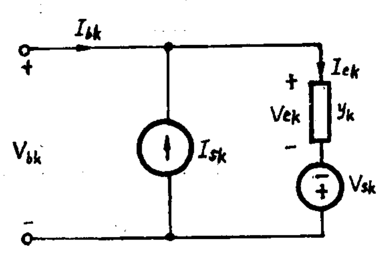


图1·3　组合支路

图中$V_{bk}I_{bk}$代表第k个支路的电压电流，I_{sk}和V_{sk}是第k个支路中的独立流源和压源。当没有这些电源时，则I_{sk}处为开路，V_{sk}处为短路。V_{ek}和I_{ek}代表元件的电压电流，y_k代表R、L、C的阻抗R_k、SL_k、$S^{-1}C^{-1}_k$或导纳G_k、Γ_k/S和SC_k。很明显在节点分析中y_kV_{ek}

支路不能为压源，这时其电导为无限。

由图可写出组合支路的电压电流间的关系为

$$V_{bk}=V_{ek}-V_{sk} \qquad V_{ek}=V_{bk}+V_{sk} \tag{1·10}$$

或

$$I_{bk}=I_{ek}-I_{sk} \qquad I_{ek}=I_{bk}+I_{sk} \tag{1·11}$$

将所有各支路的上述关系写成向量矩阵，即

$$\boldsymbol{V}_b=\boldsymbol{V}_e-\boldsymbol{V}_s \quad 或 \quad \boldsymbol{V}_e=\boldsymbol{V}_b+\boldsymbol{V}_s \tag{1·12}$$

$$\boldsymbol{I}_b=\boldsymbol{I}_e-\boldsymbol{I}_s \quad 或 \quad \boldsymbol{I}_e=\boldsymbol{I}_b+\boldsymbol{I}_s \tag{1·13}$$

式中

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{V}_b&=[V_{b1}\ V_{b2}\cdots\cdots V_{bb}]^t\\
\boldsymbol{V}_e&=[V_{e1}\ V_{e2}\cdots\cdots V_{eb}]^t\\
\boldsymbol{V}_s&=[V_{s1}\ V_{s2}\cdots\cdots V_{sb}]^t\\
\boldsymbol{I}_b&=[I_{b1}\ I_{b2}\cdots\cdots I_{bb}]^t\\
\boldsymbol{I}_e&=[I_{e1}\ I_{e2}\cdots\cdots I_{eb}]^t\\
\boldsymbol{I}_s&=[I_{s1}\ I_{s2}\cdots\cdots I_{sb}]^t
\end{aligned} \tag{1·14}$$

注意I_{bk} I_{ek}的参考方向是离开节点k，I_{sk}参考方向是指向节点k，V_{sk}的极性与V_{ek}极性相反。写成矩阵形式是

$$\boldsymbol{I}_e=\boldsymbol{Y}_b\boldsymbol{V}_e \tag{1·15}$$

$\boldsymbol{Y}_b$的各元素对电导、电容或无互感电感来说都是对角线矩阵，只有当各L间有互感时，才有非对角线元素。

现以图1·4为例说明如下，由图1·4可直接写出（1·16）和（1·17）所示阻抗矩阵或导纳矩阵，即

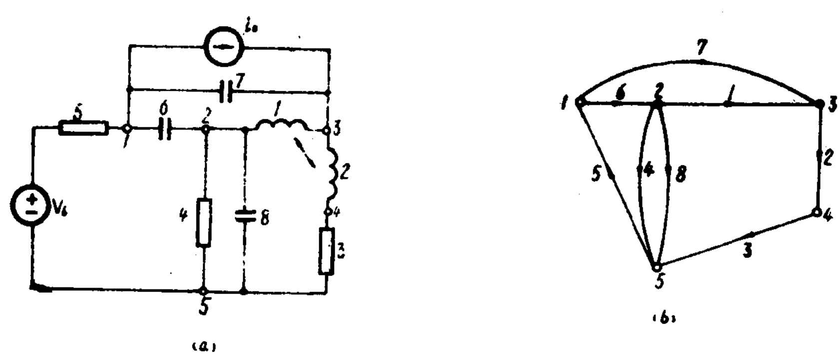


图1·4　有互感的LRC电路

$$\boldsymbol{V}_e=\left(\begin{array}{cc:ccc:ccc}
SL_{11} & SL_{12} & & & & & & \\
SL_{21} & SL_{22} & & 0 & & & 0 & \\
\hdashline
 & & R_3 & & 0 & & & \\
 & 0 & & R_4 & & & 0 & \\
 & & 0 & & R_5 & & & \\
\hdashline
 & & & & & 1/SC_6 & & 0\\
 & 0 & & 0 & & & 1/SC_7 & \\
 & & & & & 0 & & 1/SC_8
\end{array}\right)\boldsymbol{I}_e$$

或

$$V_e=\begin{pmatrix} SL_p & & 0 \\ & R_p & \\ 0 & & \frac{1}{S}D_p \end{pmatrix} I_e \tag{1·16a}$$

或

$$Z=\begin{pmatrix} SL_p & & 0 \\ & R_p & \\ 0 & & \frac{1}{S}D_p \end{pmatrix} \tag{1·16b}$$

$$I_e=\left(\begin{array}{cc:ccc:ccc} \frac{L_{22}}{S\Delta} & -\frac{L_{12}}{S\Delta} & & 0 & & & 0 & \\ -\frac{L_{21}}{S\Delta} & \frac{L_{11}}{S\Delta} & & & & & & \\ \hdashline & & G_3 & & 0 & & & \\ & 0 & & G_4 & & & 0 & \\ & & 0 & & G_5 & & & \\ \hdashline & & & & & SC_6 & & 0 \\ & 0 & & 0 & & & SC_7 & \\ & & & & & 0 & & SC_8 \end{array}\right) V_e$$

式中

$$\Delta=L_{11}L_{22}-L_{12}L_{21}$$

或

$$I_e=\begin{pmatrix} \frac{1}{S}L_p^{-1} & & 0 \\ & G_p & \\ 0 & & SC_p \end{pmatrix} V_e \tag{1·17a}$$

$$Y_b=\begin{pmatrix} \frac{1}{S}L_p^{-1} & & 0 \\ & G_p & \\ 0 & & SC_p \end{pmatrix} \tag{1·17b}$$

（二）节点方程

上面曾求出网络各支路间电压电流关系，即（1·12）（1·13）和（1·15）式，把它们重抄下来，即

$$V_e=V_b+V_s$$

$$I_b=I_e-I_s$$

和

$$I_e=Y_bV_e$$

如果把它们结合起来，即

$$I_b=I_e-I_s=Y_bV_e-I_s=Y_b(V_b+V_s)-I_s=Y_bV_b+Y_bV_s-I_s \tag{1·18}$$

这个方程包括了网络各局部支路的全部约束，对一个实际问题，Y_b、I_s和V_s中的元素值是已知的，而支路电压电流向量V_b和I_b则是未知的，显然单靠（1·18）式不能解出V_b和

$\boldsymbol{I}_b$，必须将（1·18）式的局部约束与由KCL或KVL所得的总体约束结合起来，才能得到完全网络的描述。

前面由KCL、KVL曾得

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{I}_b=0$$

和

$$\boldsymbol{V}_b=\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{V}_n$$

把这个总体关系用于（1·18）式得

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{I}_b=\boldsymbol{A}\boldsymbol{Y}_b\boldsymbol{V}_b+\boldsymbol{A}\boldsymbol{Y}_b\boldsymbol{V}_s-\boldsymbol{A}\boldsymbol{I}_s=0$$

或

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{Y}_b\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{V}_n=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{I}_s-\boldsymbol{Y}_b\boldsymbol{V}_s)$$

$$\boldsymbol{Y}_n\boldsymbol{V}_n=\boldsymbol{I}_n \tag{1·19}$$

式中

$$\boldsymbol{Y}_n=\boldsymbol{A}\boldsymbol{Y}_b\boldsymbol{A}^T,$$

$$\boldsymbol{I}_n=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{I}_s-\boldsymbol{Y}_b\boldsymbol{V}_s) \tag{1·20}$$

为节点导纳矩阵和等效流源向量。必须明确

1. $\boldsymbol{Y}_n$是一个$n\times n$矩阵(节点数为$n+1$)，这是因为$\boldsymbol{A}$是$n\times b$矩阵，$\boldsymbol{Y}_b$是$b\times b$矩阵，$\boldsymbol{A}^T$是$b\times n$矩阵。

2. $\boldsymbol{Y}_n$是对称矩阵，因为

$$\boldsymbol{Y}_n^T=(\boldsymbol{A}\boldsymbol{Y}_b\boldsymbol{A}^T)^T=(\boldsymbol{A}^T)^T\boldsymbol{Y}_b^T\boldsymbol{A}^T=\boldsymbol{A}\boldsymbol{Y}_b\boldsymbol{A}^T=\boldsymbol{Y}_n$$

由（1·19）可解得

$$\boldsymbol{V}_n=\boldsymbol{Y}_n^{-1}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{I}_s-\boldsymbol{A}\boldsymbol{Y}_b\boldsymbol{V}_s)=\boldsymbol{Y}_n^{-1}\boldsymbol{I}_n \tag{1·21}$$

一旦求得$\boldsymbol{V}_n$，利用（1·7）式可求得

$$\boldsymbol{V}_b=\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{V}_n \tag{1·22}$$

从而解得各支路电压$\boldsymbol{V}_b$。

由（1·18）式可求得

$$\boldsymbol{I}_b=\boldsymbol{Y}_b\boldsymbol{V}_b+\boldsymbol{Y}_b\boldsymbol{V}_s-\boldsymbol{I}_s \tag{1·23}$$

再由（1·12）及（1·13）式可求得元件电压$\boldsymbol{V}_e$及元件电流$\boldsymbol{I}_e$分别为

$$\boldsymbol{V}_e=\boldsymbol{V}_b+\boldsymbol{V}_s \tag{1·24}$$

$$\boldsymbol{I}_e=\boldsymbol{I}_b+\boldsymbol{I}_s \tag{1·25}$$

（三）例题

【例1·1】分析图1·15所示网络，电阻单位是Ω。

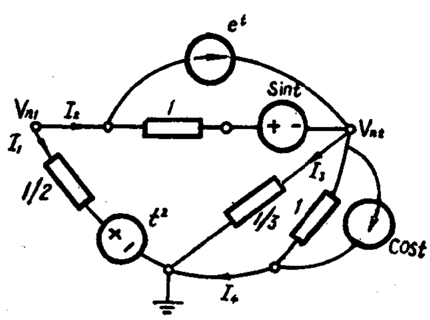


图1·5 电阻网络

【解】这个网络有四条支路（$b=4$）、三个节点（$n+1=3$从而$n=2$）。支路关联矩阵是2×4矩阵：

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

支路导纳矩阵$\boldsymbol{G}$为4×4常数矩阵

$$G_b=\begin{pmatrix}2&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&3&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}.$$

或
$$G_b=\mathrm{diag}\,(2、1、3、1)$$

电压源向量V_s是一个随时间变化的向量

$$V_s=\begin{pmatrix}-t^2\\-\sin t\\0\\0\end{pmatrix}$$

电流源向量I_s也是一个随时间变化的向量

$$I_s=\begin{pmatrix}0\\-e^t\\0\\-\cos t\end{pmatrix}$$

2 × 2 的节点电导矩阵$Y_n=AGA^T$经计算后为

$$Y_n=\begin{pmatrix}3&-1\\-1&5\end{pmatrix}$$

$$\det Y=14$$

$$Y_n^{-1}=\frac{1}{14}\begin{pmatrix}5&1\\1&3\end{pmatrix}$$

节点对地电压向量由（1·21）式

$$\begin{pmatrix}V_{n1}\\V_{n2}\end{pmatrix}=Y_n^{-1}(AI_s-AY_bV_s)$$

向量AI_s经计算为

$$AI_s=\begin{pmatrix}-e^t\\e^t\ -\cos t\end{pmatrix}$$

向量AY_bV_s经计算后为

$$AG_bV_s=\begin{pmatrix}-2t^2\ -\sin t\\\sin t\end{pmatrix}$$

于是得

$$\begin{pmatrix}V_{n1}\\V_{n2}\end{pmatrix}=\frac{1}{14}\begin{pmatrix}5&1\\1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2t^2+\sin t-e^t\\e^t-\cos t-\sin t\end{pmatrix}$$

从而得

$$V_{n1}=\frac{1}{14}(10t^2+5\sin t-5e^t+e^t-\cos t-\sin t)=\frac{1}{14}(10t^2+4\sin t-4e^t-\cos t)$$

$$V_{n2}=\frac{1}{14}(2t^2+\sin t-e^t+3e^t-3\cos t-3\sin t)=\frac{1}{14}(2t^2-2\sin t+2e^t-3\cos t)。$$

【例1·2】 试求图1·4所示电路的节点导纳矩阵。

【解】 将图1·4（b）重新画成图1·6。选节点5为公共点，即写矩阵A时去掉的节点。

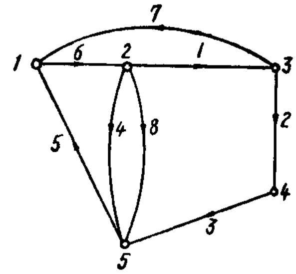


图1·6　图1·4所示网络的线图

则关联矩阵为

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

其支路导纳矩阵为

$$Y=\begin{pmatrix} \frac{L_{22}}{S\Delta} & -\frac{L_{12}}{S\Delta} & & & & & & \\ \frac{-L_{21}}{S\Delta} & \frac{L_{11}}{S\Delta} & & & & \mathbf{0} & & \\ & & G_3 & & & & & \\ & & & G_4 & & & & \\ & \mathbf{0} & & & G_5 & & & \\ & & & & & SC_6 & & \\ & & & & & & SC_7 & \\ & & & & & & & SC_8 \end{pmatrix}$$

式中　　$\Delta=L_{11}L_{22}-L_{12}L_{21}$

$$Y_n=AYA^T$$

$$=\begin{pmatrix} G_5+S(C_6+C_7) & -SC_6 & -SC_7 & 0 \\ -SC_6 & \frac{L_{22}}{S\Delta}+G_4+S(C_6+C_8) & \frac{-(L_{22}+L_{12})}{S\Delta} & \frac{L_{12}}{S\Delta} \\ -SC_7 & \frac{-L_{22}-L_{21}}{S\Delta} & \frac{L_{11}+L_{12}+L_{21}+L_{22}}{S\Delta}+SC_7 & \frac{-(L_{11}+L_{12})}{S\Delta} \\ 0 & \frac{L_{21}}{S\Delta} & \frac{-(L_{11}+L_{21})}{S\Delta} & \frac{L_{11}}{S\Delta}+G_3 \end{pmatrix}$$

电源矩阵　　$V_s=[0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ V_0\ \ 0\ \ 0\ \ 0]^T$，

$I_s=[0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ I_0\ \ 0]^T$。所以得

$$I_n=A[I_s-YV_s]=\begin{pmatrix} G_5V_0-I_0 \\ 0 \\ I_0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

式中G_5V_0是由与G_5串联的电压源变换后的等效流源。

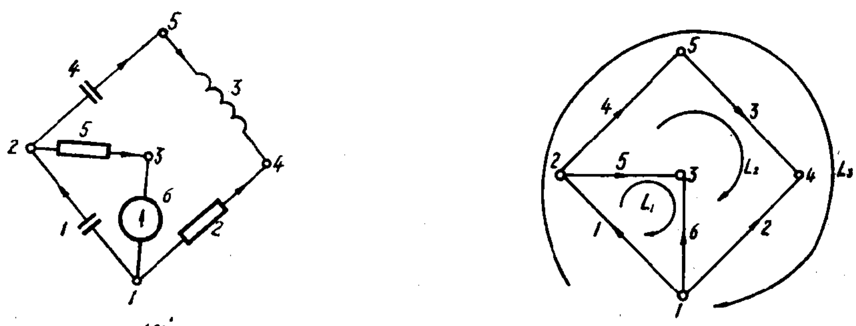
观察上式，可得出直接由电路写节点导纳矩阵的方法。对角线上的元素是与该节点相关联的各支路导纳之和。非对角线元素是两节点间公共导纳，都是负值。

第三节　基本回路矩阵和回路分析法

一、基本回路矩阵

关联矩阵虽能说明支路和节点的关联情况，但不能说明支路如何组成回路，为了说明回路的情况，应该用回路矩阵。

为了说明什么是回路矩阵，先用***KVL***写出图1·7所示各回路的电压关系式



(a)　　　(b)

图1·7　网络和线图

$$
\left.\begin{aligned}
&\text{回路}l_1: && V_1+V_5-V_6=0\\
&\text{回路}l_2: && -V_2+V_3+V_4-V_5+V_6=0\\
&\text{回路}l_3: && V_1-V_2+V_3+V_4=0
\end{aligned}\right\} \tag{1·26}
$$

写成矩阵形式得

$$
\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1\\
0 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1\\
1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
V_1\\ V_2\\ V_3\\ V_4\\ V_5\\ V_6
\end{pmatrix}=0 \tag{1·27}
$$

或简写成
$$
\boldsymbol{B}_a\boldsymbol{V}_b=0 \tag{1·28}
$$

这是网络N中各回路按***KVL***所写的方程。式中$\boldsymbol{B}_a$称增广回路矩阵，当支路数为b，回路数为l时，它是一个$l\times b$矩阵。

$$\boldsymbol{B}_a=[b_{ij}]$$

$b_{ij}=1$，当支路b_j在回路L_i中，且两者的方向相同时，

$b_{ij}=-1$，当支路b_j在回路L_i中，且两者的方向相反时，

$b_{ij}=0$，当支路b_j不在回路L_i中。

应用以上的定义可求出图1·7（b）的增广回路矩阵为

$$B_a = \begin{array}{c} \\ L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 & b_6 \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \end{array} \tag{1·29}$$

就象节点方程一样，这些方程不都是独立的，例如（1·29）式中第三行就等于一二两行之和。这说明只有两个方程是独立的，也就是说（1·29）式矩阵的秩为2。一个稍微复杂一点的网络，就可写出很多回路，例如对图1·8就可写出七个回路，以节点表示这些回路如下

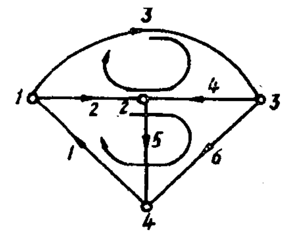


图1·8 回路方向

L_1：(1,3,4)　　L_2：(1,2,4)

L_3：(2,3,4)　　L_4：(1,3,2)

L_5：(1,2,3,4)　　L_6：(1,2,4,3)

L_7：(3,2,4,1)

因此增广回路矩阵是一个很大的组合，对图1·8来说就是 7×6 的矩阵。可以证明（从略）具有 b 个支路 $n+1$ 个节点的线图中，其增广矩阵的秩为 $b-n$。对图1·7来说 $b-n=6-4=2$，对图1·8来说 $b-n=6-3=3$。为了节省时间，可以不经过增广回路矩阵直接写出独立的基本回路方程，下面介绍基本回路的概念。

首先选一个树并移掉所有的连支，然后每次重新放一个连支，它将形成一个回路，这样只有一个连支，其它都是树支所组成的回路叫基本回路。基本回路的方向与连支重合，因而在节点为 $n+1$、支路为 b 的连通图中，因连支数为 $b-n$，所以基本回路数也是 $b-n$，因而从基本回路可直接列出 $b-n$ 个独立的 KVL 方程。现举例如下：对图1·8来说，设选取树 T（支路2、3、6），则连支为1、4、5，其基本回路如图1·9所示。

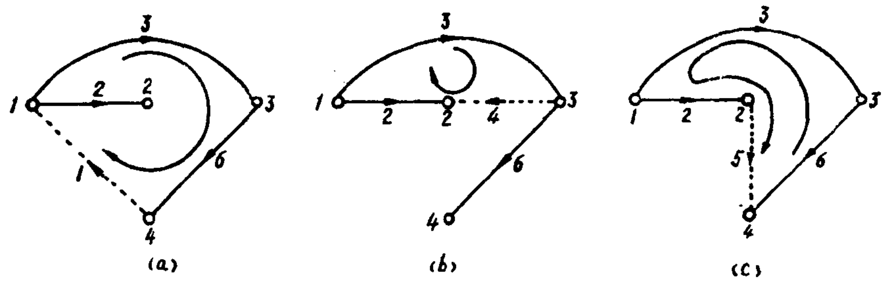


图1·9 基本回路

从而可写出按连支参考方向为回路参考方向的各回路的 KVL 方程，即

$$V_1+V_3+V_6=0$$
$$-V_2+V_3+V_4=0$$
$$V_2-V_3+V_5-V_6=0$$

上式写成矩阵形式为

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ V_5 \\ V_6 \end{bmatrix}=0 \qquad (1\cdot30a)$$

或
$$B_f V_b=0$$

式中B_f称为基本回路矩阵，其中各元素按下列规则确定：

$b_{ik}=0$ 表示支路b_k与基本回路i无关；

$b_{ik}=1$ 表示支路b_k在i内，且它们的参考方向相同；

$b_{ik}=-1$ 表示支路b_k在i内，且它们的参考方向相反。

为看起来方便，将上式重新排列，即把树支都放在前面，连支都放在后面而且按顺序排列，

$$\begin{array}{c} \overbrace{\begin{array}{ccc} 2 & 3 & 6 \end{array}}^{\text{树支}} \vdots \overbrace{\begin{array}{ccc} 1 & 4 & 5 \end{array}}^{\text{连支}} \\ \left[\begin{array}{ccc:ccc} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \end{array}\begin{bmatrix} V_2 \\ V_3 \\ V_6 \\ V_1 \\ V_4 \\ V_5 \end{bmatrix}=0 \qquad (1\cdot30b)$$

如果在图1·8中选树后，先将树支路编成1、2、3（n），连支编成$3+1(n+1)$、……b，如果1·10所示，同时在（1·30b）式中也应作相应的变换，得

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ V_5 \\ V_6 \end{bmatrix}=0 \qquad (1\cdot30c)$$

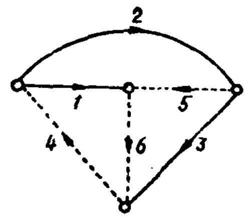


图1·10　先排树支号的图1·8

或
$$B_f V_b=0 \qquad (1\cdot31)$$

从（1·30c）式可看出

$$\begin{array}{cc} \text{回路} & \overbrace{\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array}}^{\text{树支路}} \vdots \overbrace{\begin{array}{ccc} 4 & 5 & 6 \end{array}}^{\text{连支}} \\ B_f=\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \left[\begin{array}{ccc:ccc} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \end{array}=[B_{ft} \vdots B_{fL}]=[B_{ft} \vdots U] \qquad (1\cdot32)$$

由连支组成的矩阵B_{fL}是$b-n$阶正方矩阵，是一个单位矩阵U，因而它是非奇异的，所以B_f的秩为$b-n$。

如将V_b也分块为树支电压向量V_{bt}和连支电压向量V_{bL}，则（1·31）式可写成