目　　錄

第一章　綫性賦范空間中的逼近問題

第二章 П. Л. 切比謝夫的理論

第三章 調和分析初步

第四章 指数型超越整函数的某些極界性質

第五章 函数的最佳調和逼近問題

第六章　維納尔逼近定理

各种补充与問題

第 一 章

綫性賦范空間中的逼近問題

1. 逼近論基本問題的提出 逼近論中的基本問題，可述之如下：在任意維空間中某点集 $\mathfrak{P}$ 上，已知点 $P\in\mathfrak{P}$ 的两个函数 $f(P)$ 与 $F(P;A_1,A_2,\cdots,A_n)$，其中第二个函数还依賴于某些参数 A_1，$A_2,\cdots,A_n$；要求决定这些参数，使函数 $F(P;A_1,A_2,\cdots,A_n)$ 在 $\mathfrak{P}$ 上与 $f(P)$ 的偏差最小．当然，这时应当說明 F 离 f 之偏差应作如何理解，或更明确地說，什么是 F 与 f 之間的距离．

例如，假如討論的是有界函数，則作为两个函数之距离，可以取它們之差的絕对值在 $\mathfrak{P}$ 上的上确界．在这个距离的定义下，有許多对于三維空間中的点成立的关系式，对于 $\mathfrak{P}$ 上一切有界函数的全体仍然成立．

这个情况，在数学中当討論其他函数类或很多其他的集体（集合）时，也常常要碰到，这就引導到形成关于度量空間的重要概念．

2. 度量空間 由某些元素 $x,y,z,\cdots$ 組成的集合 E 叫做**度量空間**[1]1)，而这些元素本身就叫做**空間的点**，假如对于每两个元素 x,y，有某个非負数 $D[x,y]$ 与它們对应，这数叫做点 x,y 之間的距离，并滿足下列条件：

A. $D[x,x]=0$,

B. $D[x,y]=D[y,x]>0$ （如 $x\neq y$），

C. $D[x,z]\leqslant D[x,y]+D[y,z]$ （三角形不等式）．

例如，一切数（一般指复数）列

$$x=\{x_1,x_2,\cdots\}=\{x_k\},\quad y=\{y_1,y_2,\cdots\}=\{y_k\},\cdots$$

1) 在方括号中的数係指在書后所引文献的号碼．

的集合就組成度量空間，如果把 $x=y$ 了解成 $x_k=y_k(k=1,2,\cdots)$，幷借助公式

$$D[x,y]=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\frac{|x_k-y_k|}{1+|x_k-y_k|}$$

來定义距离；这时，条件 C 的成立，可由下列容易証明的不等式

$$\frac{a+b}{1+a+b}\leqslant\frac{a}{1+a}+\frac{b}{1+b}\qquad(a\geqslant 0,\ b\geqslant 0)$$

推出．

3．綫性賦范空間[1] 在度量空間之中，特别重要的是所謂綫性賦范空間．

元素 $x,y,z,\cdots$ 的集合 E 叫做綫性賦范空間，而这些元素本身就叫做点或向量，如果：

1）在 E 中定义了一个运算，叫做加法，記成 $+$，对于这个运算，E 是交換羣；羣 E 的零元素記成 0；

2）定义了集合 E 中的元素与数（实数或复数）$\alpha,\beta,\gamma,\cdots$ 相乘，幷且

$$\alpha(x+y)=\alpha x+\alpha y,$$
$$(\alpha+\beta)x=\alpha x+\beta x,$$
$$\alpha(\beta x)=(\alpha\beta)x,$$
$$1\cdot x=x,$$
$$0\cdot x=0;$$

3）对于每个元素 $x\in E$，有某非負数 $\|x\|$ 与之对应，这数叫做元素 x 的范数，幷满足下列条件：

$$\|x\|=0 \quad \text{必須且只須} \quad x=0,$$
$$\|\alpha x\|=|\alpha|\cdot\|x\|,$$
$$\|x+y\|\leqslant\|x\|+\|y\|.$$

向量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 叫做綫性無关，如果由关系式

$$\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\cdots+\alpha_nx_n=0$$

可得等式

$$\alpha_1=\alpha_2=\cdots=\alpha_n=0.$$

如果令 $D[x, y]=\|x-y\|$, 其中 $x-y=x+(-1)y$, 則綫性賦范空間成为度量空間.

4. 綫性賦范空間的例[1]

空間 C　在任意維数的通常空間中某有界閉集 $\mathfrak{P}$ 上,点 $P\subset\mathfrak{P}$ 的一切連續函数 $x=x(P)$ 的总体,是一个綫性賦范空間(空間 C),如果規定

$$x=y$$

的意义是 $x(P)\equiv y(P)$, 加法与乘法以通常意义來了解,而范数由下列等式

$$\|x\|=\|x\|_C=\max_{P\in\mathfrak{P}}|x(P)|$$

定义,在 $\mathfrak{P}$ 为数軸上有限区間的情形, 空間 C 具有特别重要的意义. 因为借变換

$$t=At'+B$$

之助,可以將区間[2] $[a, b]$ 变成任何有限区間,所以平常只取区間 $[0, 1]$ 或 $[-1, 1]$.

当只討論週期函数时,通常取区間 $[-\pi, \pi]$ 或其它長度为 2π 的某一区間,并且把两个端点認为是同一个点.

利用变換

$$u=\operatorname{tg}\frac{t}{2}\qquad(-\pi\leqslant t\leqslant\pi)$$

可以把連續的週期函数的空間轉化成在整个实軸上連續的函数 $x=x(u)$, 并且

$$\lim_{u\to-\infty}x(u),\quad \lim_{u\to\infty}x(u)$$

[1] 如果不特别声明,一切数,函数,序列,一般都是指複的.

[2] 方括号总是表示閉区間,即包含其二端点的区間.

存在且为相等的空間.

这个空間記成 C_∞.

在討論空間 C_∞ 时，点 $\pm\infty$ 看成同一个点.

同样，由区間 $[0,1]$ 上一切連續（不一定是周期的）函数的空間 $C(0,1)$ 出發，可以借助变数变換变成閉区間 $[0,\infty]$ 与 $[-\infty,\infty]$ 上的連續函数空間 $C(0,\infty)$ 与 $C(-\infty,\infty)$.

空間 $C(-\infty,\infty)$ 为满足下列条件的一切連續函数 $x(t)$ $(-\infty<t<\infty)$ 的总体：

$$\lim_{t\to-\infty} x(t), \quad \lim_{t\to\infty} x(t)$$

存在，当然这兩个極限可能不同，这个情况，就是 $C(-\infty,\infty)$ 与 C_∞ 的区別.

空間 L^p $(p\geqslant 1)$ 用 L^p 指（有限或無窮）区間[1] (a,b) 上一切可測且其絕对值的 p 次冪依勒貝格意义为可積的函数的总体，这时加法与数乘法依通常意义來了解，而两个元素 $x=x(t)$, $y=y(t)\in L^p$ 認为是恆等的，如果在 (a,b) 上等式 $x(t)=y(t)$ 几乎处处成立，至于范数則由下列公式确定：

$$\|x\|=\|x\|_p=\left\{\int_a^b |x(t)|^p dt\right\}^{\frac{1}{p}}.$$

假如遇到必須註明所討論的区間时，則用 $L^p(a,b)$ 代替 L^p. L^1 常簡單地記成 L.

現在來証明 L^p 是綫性賦范空間.

既然两个可測函数的和还是可測函数，又有下列顯然的不等式：

$$|\alpha+\beta|^p\leqslant 2^p(|\alpha|^p+|\beta|^p)^{2)},$$

所以由 $x, y\in L^p$, 可得 $x+y\in L^p$.

---

[1] 可以用数軸上或任意維数通常空間中的任何可測集合（其測度是有限的或無限的均可）代替区間，作为函数的定义域.

[2] 注意：不等式

$$|\alpha+\beta|^p\leqslant 2^{p-1}(|\alpha|^p+|\beta|^p) \qquad (p\geqslant 1)$$

的証明，只要求出在条件 $A+B=1$, $A\geqslant 0$, $B\geqslant 0$ 下，A^p+B^p 的極小就夠了.

零元素即几乎处处为零的函数.

假如 $x\in L^p$, α 是任意的数，则 $\alpha x\in L^p$.

如此，剩下的就只要証明不等式

$$\left\{\int_a^b |x(t)+y(t)|^p dt\right\}^{\frac{1}{p}} \leqslant \left\{\int_a^b |x(t)|^p dt\right\}^{\frac{1}{p}} + \\ + \left\{\int_a^b |y(t)|^p dt\right\}^{\frac{1}{p}},$$

这个不等式就是閔可夫斯基(Minkowski)不等式.

5. **霍尔瀆(Hölder)与閔可夫斯基不等式**[2] 設 $\alpha, \beta\geqslant 0$, $p>1$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ (則 $q>1$). 討論方程为

$$y=x^{p-1}$$

的曲綫 OAB, 这个方程也可寫成

$$x=y^{q-1}.$$

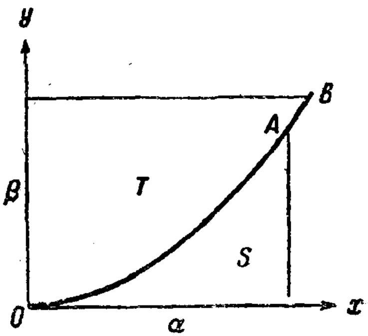

圖 1

由圖 1[1)]中顯然可知：面積 S 与 T 之和不小于 $\alpha\beta$, 而等于 $\alpha\beta$ 恰在 A, B 两点重合时成立，即当 $\alpha^p=\beta^q$ 时；所以

$$\alpha\beta\leqslant\frac{\alpha^p}{p}+\frac{\beta^q}{q}. \tag{1}$$

注意 $p=2$ (亦即 $q=2$)时，得到的这个不等式就是初等的不等式

$$2\alpha\beta\leqslant\alpha^2+\beta^2.$$

現設 $u(t)\in L^p$, $v(t)\in L^q$. 再設

$$\alpha=\frac{|u(t)|}{\|u\|_p}, \qquad \beta=\frac{|v(t)|}{\|v\|_q}.$$

并引用不等式(1)；我們得到

1) 这个圖相当于 $p>2$, $\beta>\alpha^{p-1}$ 的情形.

$$\frac{|u(t)v(t)|}{\|u\|_p\|v\|_q}\leqslant\frac{1}{p}\ \frac{|u(t)|^p}{\{\|u\|_p\}^p}+\frac{1}{q}\ \frac{|v(t)|^q}{\{\|v\|_q\}^q}.$$

因为不等式的右端是可積的，故其左端也是可積的，并且其積分不超过右端的積分，即不超过

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1.$$

我們得到霍尔潭不等式：

$$\int_a^b|u(t)v(t)|dt\leqslant\left\{\int_a^b|u(t)|^p dt\right\}^{\frac{1}{p}}\cdot\left\{\int_a^b|v(t)|^q dt\right\}^{\frac{1}{q}}.\qquad(2)$$

在这个不等式中，不难看出等号成立必須且只須在(a, b)上下面等式几乎处处成立时：

$$|v(t)|^q=C|u(t)|^p.$$

在 $p=q=2$ 的情形，不等式(2)通常叫做希瓦兹(Schwarz)不等式，但是更正确地应叫做布亞科夫斯基(Буняковский)不等式.

为了証明閔可夫斯基不等式，首先注意由

$$|x(t)|+|y(t)|\in L^p\qquad(p>1)$$

可推出

$$\{|x(t)|+|y(t)|\}^{p-1}\in L^q,$$

其中 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1.$

引用霍尔潭不等式于下面等式

$$(|x|+|y|)^p=|x|\cdot(|x|+|y|)^{p-1}+|y|\cdot(|x|+|y|)^{p-1}$$

右端的每一項，我們得到

$$\int_a^b(|x|+|y|)^p dt\leqslant\left\{\int_a^b(|x|+|y|)^p dt\right\}^{\frac{1}{q}}\left\{\left[\int_a^b|x|^p dt\right]^{\frac{1}{p}}+\right.$$
$$\left.+\left[\int_a^b|y|^p dt\right]^{\frac{1}{p}}\right\},$$

由此得到当 $p>1$ 时的閔可夫斯基不等式．至于 $p=1$ 时，这个不等式的成立是顯然的．

不难看出，在閔可夫斯基不等式(当 $p>1$ 时)中，等号成立当且僅当几乎处处有 $x(t)=Cy(t)$时，其中常数 $C\geqslant 0$.

注意，同样可得对于級数的霍尔濱与閔可夫斯基不等式，卽

$$\sum_{k=1}^{\infty}|\alpha_k\beta_k|\leqslant\left\{\sum_{k=1}^{\infty}|\alpha_k|^p\right\}^{\frac{1}{p}}\left\{\sum_{k=1}^{\infty}|\beta_k|^q\right\}^{\frac{1}{q}}\qquad\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1,\ p>1\right),$$

$$\left\{\sum_{k=1}^{\infty}|\alpha_k+\beta_k|^p\right\}^{\frac{1}{p}}\leqslant\left\{\sum_{k=1}^{\infty}|\alpha_k|^p\right\}^{\frac{1}{p}}+\left\{\sum_{k=1}^{\infty}|\beta_k|^p\right\}^{\frac{1}{p}}\quad(p\geqslant 1).$$

而且不难看出，这些不等式都是上述已証明了的对于積分的霍尔濱与閔可夫斯基不等式的特殊情形．

今后我們常將应用所謂对于積分的推廣了的閔可夫斯基不等式

$$\left\{\int_a^b\left|\int_c^d\varphi(x,y)dy\right|^p dx\right\}^{\frac{1}{p}}\leqslant\int_c^d\left\{\int_a^b|\varphi(x,y)|^p dx\right\}^{\frac{1}{p}}dy\quad(p\geqslant 1).$$

这个式子可以借助平常積分論中常用的，由只取有很多个值的函数(起先是只取两个值的)，轉移到矩形区域 $R\,(a<x<b,c<y<d)$ 上的任意可測的且对上述不等式右端有意义的函数 $\varphi(x,y)$ 來証明[3]．

当 $p=1$ 时，这个不等式的特殊情形卽引導到福比尼(Fubini)定理[3]，卽断言：如果

$$\int_c^d\left\{\int_a^b|\varphi(x,y)|dx\right\}dy<\infty,$$

則

$$\int_R\varphi(P)dP=\int_a^b\left\{\int_c^d\varphi(x,y)dy\right\}dx=\int_c^d\left\{\int_a^b\varphi(x,y)dx\right\}dy.$$

6. 綫性賦范空間進一步的例子

空間 m 与 c　一切有界的数列

$$x=\{x_k\},\quad y=\{y_k\},\cdots$$

的集合 m，及一切收斂的数列

$$x=\{x_k\},\quad y=\{y_k\},\cdots$$

的集合 c 都是綫性賦范空間，如果令

$$x+y=\{x_k+y_k\},$$

$$\alpha x=\{\alpha x_k\},$$

$$\|x\|=\sup_k|x_k|.$$

空間 l^p $(p\geqslant 1)$　所有使級数

$$\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^p,\quad \sum_{k=1}^{\infty}|y_k|^p,\cdots$$

收斂的数列

$$x=\{x_k\},\quad y=\{y_k\},\cdots$$

組成的集合 l^p 也是綫性賦范空間，如果令

$$\|x\|=\left\{\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^p\right\}^{\frac{1}{p}},$$

这可以用对于級数的閔可夫斯基不等式來証明.

7. 希尔伯脫空間[4]　希尔伯脫(Hilbert)空間(空間 H)是指綫性空間(卽满足 §3 中前两条件)，在其中对于每两个向量 x, y，有一(复)数 (x, y) 与之对应，这个数叫做向量的內積，并满足下列条件[1)]:

a)　$(y, x)=\overline{(x, y)}$,

b)　$(\alpha_1x_1+\alpha_2x_2, y)=\alpha_1(x_1, y)+\alpha_2(x_2, y)$,

c)　$(x, x)\geqslant 0$,

d)　$(x, x)=0$ 必須且只須 $x=0$.

如果 $(x, y)=0$，向量 x, y 就叫做是正交的.

容易举出具体的例子，满足我們用以公理化地定义希尔伯脫

1) 在数上加一横綫卽指此数的共軛数.

空間 H 的条件(自然地我們就把 H 叫做抽象的希尔伯脫空間).

例如,空間 l^2 就給出这种具体的例子,如果令

$$(x, y)=\sum_{k=1}^{\infty} x_k \bar{y}_k,$$

其中

$$x=\{x_k\}, \quad y=\{y_k\}.$$

由对于級数的希瓦兹不等式(哥西(Cauchy)早就發現了),即当 $p=q=2$ 时的霍尔潭不等式,可推出級数

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k \bar{y}_k$$

的收斂性(而且絕对收斂).

空間 L^2 是另一个例,如果令

$$(x, y)=\int_a^b x(t)\overline{y(t)}\,dt.$$

現在証明內積 (a, b) 具有下列性質:

1°.　$$(\alpha x, \alpha x)=|\alpha|^2(x, x),$$

2°.　$$|(x, y)| \leqslant \sqrt{(x, x)} \cdot \sqrt{(y, y)}$$

(推廣了的希瓦兹不等式),

3°.　$$\sqrt{(x+y, x+y)} \leqslant \sqrt{(x, x)}+\sqrt{(y, y)},$$

并且,如果 $y \neq 0$, 則关系式 2° 的等号只当 $x=\alpha y$ 时才成立,而在 3° 中則只当 $x=\alpha y$, 且 $\alpha \geqslant 0$ 时才成立(当 $y=0$ 时,变成不足道的等式).

性質 1° 是顯然的:

$$(\alpha x, \alpha x)=\alpha(x, \alpha x)=\alpha(\overline{\alpha x, x})=\alpha\bar{\alpha}(\overline{x, x})=\alpha\bar{\alpha}(x, x).$$

为了証明性質 2°, 可設 $(x, y) \neq 0$. 令

$$\vartheta=\frac{(x, y)}{|(x, y)|},$$

則对于任何实数 λ

$$0 \leqslant (\bar{\vartheta}x+\lambda y, \bar{\vartheta}x+\lambda y)=\lambda^2(y, y)+2\lambda|(x, y)|+(x, x);$$

此 λ 的三項式的根应当是复的或者是相等的，从而这就証明了性質 2°. 等号顯然当且只当如果有某个 λ，使

$$\bar{\vartheta}x+\lambda y=0$$

时才达到.

今証性質 3°，因

$$(x+y, x+y)=(x, x)+(x, y)+(y, x)+$$
$$+(y, y) \leqslant (x, x)+2|(x, y)|+(y, y),$$

而根据 2°,

$$(x+y, x+y) \leqslant \{\sqrt{(x, x)}+\sqrt{(y, y)}\}^2.$$

等号当且只当

$$(x, y)=\sqrt{(x, x)} \cdot \sqrt{(y, y)}$$

时才达到. 但已知当 $y \neq 0$ 时，要等式成立首先必須 $x=\alpha y$，而当这条件成立时

$$(x, y)=(\alpha y, y)=\alpha(y, y),$$

即
$$\alpha=\sqrt{\frac{(x, x)}{(y, y)}} \geqslant 0.$$

根据定义内積的条件，及其性質 1°, 3°，如果令

$$\|x\|=\sqrt{(x, x)},$$

則希尔伯脫空間成为綫性賦范空間.

8. 綫性賦范空間中逼近的基本定理 假設 E 是任一綫性賦范空間，令

$$g_1, g_2, \cdots, g_n$$

为 E 中 n 个綫性無关的元素，逼近論的基本問題在我們所討論的"綫性情形"可以述之如下：給定元素 $x \in E$；要求定出数 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 使数量

$$\varphi(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)=\|x-\lambda_1 g_1-\lambda_2 g_2-\cdots-\lambda_n g_n\|$$

得最小值.

在本節中將証明要求的数 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 的值确实存在.

首先注意：$\varphi(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$ 为 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 的連續函数. 事实上，根据三角形不等式，可得

$$|\varphi(\lambda_1', \lambda_2', \cdots, \lambda_n') - \varphi(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)| =$$

$$= \left| \left\| x - \sum_1^n \lambda_k' g_k \right\| - \left\| x - \sum_1^n \lambda_k g_k \right\| \right| \leqslant \left\| \sum_1^n (\lambda_k' - \lambda_k) g_k \right\| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_1^n |\lambda_k' - \lambda_k| \, \|g_k\| \leqslant \max_k |\lambda_k' - \lambda_k| \cdot \sum_1^n \|g_k\|.$$

今再引進另一連續函数

$$\psi(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n) = \|\lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2 + \cdots + \lambda_n g_n\|.$$

在"球"

$$|\lambda_1|^2 + |\lambda_2|^2 + \cdots + |\lambda_n|^2 = 1$$

上，函数 ψ 依熟知的維尔斯脫拉斯(Weierstrass)定理应达到極小值 μ, 因为上述的球是通常有限維空間中的有界閉点集.

非負数 μ 不可能是零，因为 $g_1, g_2, \cdots, g_n$ 綫性無关；所以 $\mu > 0$.

令 $\rho(\geqslant 0)$ 为函数 φ 的下确界.

假如

$$\sqrt{\sum_1^n |\lambda_k|^2} > \frac{1}{\mu}(\rho + 1 + \|x\|) = R,$$

則

$$\varphi(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n) \geqslant \|\lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2 + \cdots + \lambda_n g_n\| - \|x\| \geqslant$$

$$\geqslant \sqrt{\sum_1^n |\lambda_k|^2} \cdot \mu - \|x\| > \rho + 1.$$

因此，要求函数 $\varphi(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$ 的極小，可以只限于考慮满足

$$\sum_1^n |\lambda_k|^2 \leqslant R^2$$

的諸 λ_k 的值，即只須在有界閉区域上來考慮，而在这些区域中連續函数确实达到極小值．

因此，給出元素 x 的最好逼近的綫性組合 $\lambda_1 g_1+\lambda_2 g_2+\cdots+$ $+\lambda_n g_n$ 的存在性就証明了．

9．**嚴格賦范空間** 我們又可提出这样一个問題：是否对于每一元素 $x\in E$，对于它給出最佳逼近的綫性組合 $\lambda_1 g_1+\lambda_2 g_2+\cdots+$ $+\lambda_n g_n$ 都是唯一的？

当空間 E 是嚴格賦范[1]时，即不等式

$$\|x+y\|\leqslant\|x\|+\|y\| \qquad (x\neq 0,\ y\neq 0)$$

中的等号只当 $y=\alpha x$, $\alpha>0$ 时才成立，則上述的最佳逼近是唯一的．

事实上，当空間 E 是嚴格賦范时，假定对于某个 x 有两个綫性組合

$$\lambda_1 g_1+\lambda_2 g_2+\cdots+\lambda_n g_n, \quad \mu_1 g_1+\mu_2 g_2+\cdots+\mu_n g_n$$

都給出最佳逼近(其中 $g_1, g_2, \cdots, g_n$ 綫性無关)．則依所給条件(参看 §8)可知

$$\left\|x-\sum_1^n \lambda_k g_k\right\|=\left\|x-\sum_1^n \mu_k g_k\right\|=\rho,$$

而且容易看出，不妨假定 $\rho\neq 0$，又因

$$\left\|x-\sum_1^n \frac{\lambda_k+\mu_k}{2} g_k\right\|\leqslant\frac{1}{2}\left\|x-\sum_1^n \lambda_k g_k\right\|+\frac{1}{2}\left\|x-\sum_1^n \mu_k g_k\right\|=\rho,$$

所以

$$\left\|x-\sum_1^n \frac{\lambda_k+\mu_k}{2} g_k\right\|=\rho.$$

这就是說

$$\left\|x-\sum_1^n \frac{\lambda_k+\mu_k}{2} g_k\right\|=\frac{1}{2}\left\|x-\sum_1^n \lambda_k g_k\right\|+\frac{1}{2}\left\|x-\sum_1^n \mu_k g_k\right\|.$$

[1] 这名詞屬于克萊因(M. Γ. Крейн)的．