

目 錄

第一章 綫性賦范空間中的逼近問題

1. 逼近論基本問題的提出	(1)
2. 度量空間	(1)
3. 綫性賦范空間	(2)
4. 綫性賦范空間的例	(3)
5. 霍尔譚与閔可夫斯基不等式	(5)
6. 綫性賦范空間進一步的例子	(7)
7. 希尔伯脫空間	(8)
8. 綫性賦范空間中逼近的基本定理	(10)
9. 嚴格賦范空間	(12)
10. 空間 L^p 中的例	(13)
11. 几何解釋	(14)
12. 关于可分空間及完备空間的概念	(15)
13. 在空間 H 中的逼近定理	(16)
14. 例	(20)
15. 再論空間 H 中的逼近問題	(23)
16. H 中的正交就范向量組	(25)
17. 向量組的正交化	(26)
18. 無窮正交就范組	(28)
19. 不可分空間的例	(32)
20. 維爾斯脫拉斯第一定理	(32)
21. 維爾斯脫拉斯第二定理	(35)
22. 空間 C 的可分性	(37)
23. 空間 L^p 的可分性	(37)
24. 維爾斯脫拉斯定理在空間 L^p 上的推廣	(40)
25. 空間 L^p 的完备性	(41)

26. 在 L^2 中完全正交就范組的例	(43)
27. 謬茲定理	(47)
28. 綫性汎函數	(50)
29. F. 黎斯定理	(51)
30. 在任意綫性賦范空間中向量集合封閉性的判別法	(53)

第二章 II. J. 切比謝夫的理論

31. 問題的提出	(55)
32. 推廣的瓦賴-波松定理	(56)
33. 存在定理	(57)
34. II. J. 切比謝夫定理	(59)
35. 特殊情形	(62)
36. 与零最小偏差的 II. J. 切比謝夫多項式	(62)
37. II. J. 切比謝夫定理的進一步的例子	(64)
38. 应用瓦賴-波松定理的例	(65)
39. 应用一般 II. J. 切比謝夫定理的例	(67)
40. 轉到週期函數	(70)
41. 例	(72)
42. 維爾斯脫拉斯函數	(72)
43. A. 哈尔問題	(73)
44. A. 哈尔条件必要性的証明	(74)
45. A. 哈尔条件充分性的証明	(75)
46. 例	(79)
47. II. J. 切比謝夫函數組	(80)
48. II. J. 切比謝夫定理的推廣	(81)
49. 关于一个在度量空間 L 中逼近連續函數的問題	(84)
50. A. A. 馬尔科夫定理	(89)
51. 特殊情形	(93)

第三章 調和分析初步

52. 关于福里叶級數的一些簡單事實	(97)
53. 有界變差函數的福里叶級數	(101)

54. 福里叶級数的巴塞佛等式	(105)
55. 福里叶級数的例	(106)
56. 三角積分	(109)
57. 黎曼-勒貝格定理	(111)
58. 普蘭散利理論	(112)
59. 華脫生定理	(114)
60. 普蘭散利定理	(116)
61. 費叶尔定理	(118)
62. 帶有費叶尔型核的積分运算符	(121)
63. 楊-哈台定理	(125)
64. 費叶尔型核的例	(126)
65. 可積函数的福里叶变换	(128)
66. 二个函数的摺合	(131)
67. B. A. 史捷克洛夫函数	(132)
68. 重單調函数	(134)
69. 共軛函数	(135)

第四章 指数型超越整函数的某些極界性質

70. 指数型整函数	(140)
71. 波雷尔变换	(142)
72. 維納尔-配萊定理	(144)
73. 在实軸上有界的指数型整函数	(147)
74. C. H. 別恩斯坦不等式	(150)
75. 萊維登多項式	(156)
76. 費叶尔-黎斯定理及它的擴充	(162)
77. 將連續函数表成福里叶-斯底尔吉斯積分形式的判別法	(164)

第五章 函数的最佳調和逼近問題

78. 本章的對象	(169)
79. 連續模	(170)
80. 在 $L^p(p \geq 1)$ 空間中的推廣	(172)
81. 例	(175)

82. 对于福里叶系数的若干估計	(179)
83. 关于 B. A. 史捷克洛夫函数	(183)
84. 两个引理	(185)
85. 調和逼近的根本問題	(186)
86. B. 納吉判別法	(193)
87. 可微函数的最佳調和逼近	(197)
88. 对週期函数的直接研究	(205)
89. D. 傑克遜第二定理	(210)
90. 推廣了的費叶尔方法	(212)
91. C. H. 別恩斯坦定理	(217)
92. И. И. 普里瓦洛夫定理	(221)
93. C. H. 別恩斯坦定理在 L^p ($p \geq 1$) 空間中的推廣	(222)
94. 解析函数的最佳調和逼近	(226)
95. 前節中所得結果的另一种形式	(230)
96. C. H. 別恩斯坦逆定理	(233)

第六章 維納尔逼近定理

97. 維納尔問題	(236)
98. 維納尔条件的必要性	(236)
99. 一些定义及表示式	(237)
100. 輔助命題	(239)
101. 維納尔-萊維定理	(243)
102. 維納尔条件充分性的証明	(244)
103. 維納尔的一般陶倍尔定理	(246)
104. 弱減函数	(247)
105. 关于術語的附註	(250)
103. 依开哈拉定理	(250)
107. 卡尔萊馬的陶倍尔定理	(254)

各种补充与問題

A. 極值的簡單問題与封閉性的某些判別法	(256)
B. G. 賽干的一个定理和它的应用	(270)

C. 封閉函數序列的又一些例子	(279)
D. 卡拉皆屋独利-費叶尔問題及其联系的問題	(282)
E. E. И. 左洛塔留夫的問題及其有关問題	(298)
F. 最簡單的解析函數的最佳調和逼近	(308)
註 釋	(310)
索 引	(322)

第一章

綫性賦范空間中的逼近問題

1. 逼近論基本問題的提出 逼近論中的基本問題,可述之如下:在任意維空間中某點集 $\mathfrak{P}$ 上,已知點 $P \in \mathfrak{P}$ 的兩個函數 $f(P)$ 與 $F(P; A_1, A_2, \dots, A_n)$, 其中第二個函數還依賴於某些參數 $A_1, A_2, \dots, A_n$; 要求決定這些參數,使函數 $F(P; A_1, A_2, \dots, A_n)$ 在 $\mathfrak{P}$ 上與 $f(P)$ 的偏差最小. 當然,這時應當說明 F 與 f 之偏差應作如何理解,或更明確地說,什麼是 F 與 f 之間的距離.

例如,假如討論的是有界函數,則作為兩個函數之距離,可以取它們之差的絕對值在 $\mathfrak{P}$ 上的上確界. 在這個距離的定義下,有許多對於三維空間中的點成立的关系式,對於 $\mathfrak{P}$ 上一切有界函數的全体仍然成立.

這個情況,在數學中當討論其他函數類或很多其他的集合(集合)時,也常常要碰到,這就引導到形成關於度量空間的重要概念.

2. 度量空間 由某些元素 $x, y, z, \dots$ 組成的集合 E 叫做度量空間^[1], 而這些元素本身就叫做空間的點,假如對於每兩個元素 x, y , 有某個非負數 $D[x, y]$ 與它們對應,這數叫做點 x, y 之間的距離,並滿足下列條件:

A. $D[x, x] = 0$,

B. $D[x, y] = D[y, x] > 0$ (如 $x \neq y$),

C. $D[x, z] \leq D[x, y] + D[y, z]$ (三角形不等式).

例如,一切數(一般指複數)列

$$x = \{x_1, x_2, \dots\} = \{x_k\}, y = \{y_1, y_2, \dots\} = \{y_k\}, \dots$$

¹⁾ 在方括號中的數係指在書後所引文獻的號碼.

的集合就組成度量空間，如果把 $x=y$ 了解成 $x_k=y_k (k=1, 2, \dots)$ ，并借助公式

$$D[x, y] = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{|x_k - y_k|}{1 + |x_k - y_k|}$$

來定義距離；這時，條件 C 的成立，可由下列容易證明的不等式

$$\frac{a+b}{1+a+b} \leq \frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b} \quad (a \geq 0, b \geq 0)$$

推出。

3. 綫性賦范空間^[1] 在度量空間之中，特別重要的是所謂綫性賦范空間。

元素 $x, y, z, \dots$ 的集合 E 叫做綫性賦范空間，而這些元素本身就叫做點或向量，如果：

1) 在 E 中定義了一個運算，叫做加法，記成 $+$ ，對於這個運算， E 是交換羣；羣 E 的零元素記成 0 ；

2) 定義了集合 E 中的元素與數（實數或複數） $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ 相乘，並且

$$\alpha(x+y) = \alpha x + \alpha y,$$

$$(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x,$$

$$\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x,$$

$$1 \cdot x = x,$$

$$0 \cdot x = 0;$$

3) 對於每個元素 $x \in E$ ，有某非負數 $\|x\|$ 與之對應，這數叫做元素 x 的范數，並滿足下列條件：

$$\|x\| = 0 \text{ 必須且只須 } x = 0,$$

$$\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|,$$

$$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

向量 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 叫做綫性無關，如果由關係式

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n = 0$$

可得等式

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0.$$

如果令 $D[x, y] = \|x - y\|$, 其中 $x - y = x + (-1)y$, 則綫性賦范空間成為度量空間.

4. 綫性賦范空間的例¹⁾

空間 C 在任意維度的通常空間中某有界閉集 $\mathfrak{P}$ 上, 點 $P \in \mathfrak{P}$ 的一切連續函數 $x = x(P)$ 的總體, 是一個綫性賦范空間 (空間 C), 如果規定

$$x = y$$

的意義是 $x(P) \equiv y(P)$, 加法與乘法以通常意義來了解, 而范數由下列等式

$$\|x\| = \|x\|_C = \max_{P \in \mathfrak{P}} |x(P)|$$

定義, 在 $\mathfrak{P}$ 為數軸上有限區間的情形, 空間 C 具有特別重要的意義. 因為借變換

$$t = At' + B$$

之助, 可以將區間²⁾ $[a, b]$ 變成任何有限區間, 所以平常只取區間 $[0, 1]$ 或 $[-1, 1]$.

當只討論週期函數時, 通常取區間 $[-\pi, \pi]$ 或其它長度為 2π 的某一區間, 並且把兩個端點認為是同一個點.

利用變換

$$u = \operatorname{tg} \frac{t}{2} \quad (-\pi \leq t \leq \pi)$$

可以把連續的週期函數的空間轉化成在整個實軸上連續的函數 $x = x(u)$, 並且

$$\lim_{u \rightarrow -\infty} x(u), \quad \lim_{u \rightarrow \infty} x(u)$$

¹⁾ 如果不特別聲明, 一切數, 函數, 序列, 一般都是指複的.

²⁾ 方括號總是表示閉區間, 即包含其二端點的區間.

存在且为相等的空間。

这个空間記成 C_∞ 。

在討論空間 C_∞ 时, 点 $\pm\infty$ 看成同一个点。

同样, 由区間 $[0, 1]$ 上一切連續 (不一定是周期的) 函数的空間 $C(0, 1)$ 出發, 可以借助变数变换变成閉区間 $[0, \infty]$ 与 $[-\infty, \infty]$ 上的連續函数空間 $C(0, \infty)$ 与 $C(-\infty, \infty)$ 。

空間 $C(-\infty, \infty)$ 为滿足下列条件的一切連續函数 $x(t)$ ($-\infty < t < \infty$) 的总体:

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} x(t), \quad \lim_{t \rightarrow \infty} x(t)$$

存在, 当然这两个極限可能不同, 这个情况, 就是 $C(-\infty, \infty)$ 与 C_∞ 的区别。

空間 L^p ($p \geq 1$) 用 L^p 指 (有限或無窮) 区間¹⁾ (a, b) 上一切可測且其絕對值的 p 次幂依勒貝格意义为可積的函数的总体, 这时加法与数乘法依通常意义來了解, 而两个元素 $x = x(t)$, $y = y(t) \in L^p$ 認為是恆等的, 如果在 (a, b) 上等式 $x(t) = y(t)$ 几乎处处成立, 至于范数則由下列公式确定:

$$\|x\| = \|x\|_p = \left\{ \int_a^b |x(t)|^p dt \right\}^{\frac{1}{p}}.$$

假如遇到必須註明所討論的区間时, 則用 $L^p(a, b)$ 代替 L^p . L^1 常簡單地記成 L .

現在來証明 L^p 是綫性賦范空間。

既然两个可測函数的和还是可測函数, 又有下列顯然的 inequality:

$$|\alpha + \beta|^p \leq 2^p (|\alpha|^p + |\beta|^p),$$

所以由 $x, y \in L^p$, 可得 $x + y \in L^p$.

¹⁾ 可以用数軸上或任意維数通常空間中的任何可測集合 (其測度是有限的或無限的均可) 代替区間, 作为函数的定义域。

²⁾ 注意: 不等式

$$|\alpha + \beta|^p \leq 2^{p-1} (|\alpha|^p + |\beta|^p) \quad (p \geq 1)$$

的証明, 只要求出在条件 $A + B = 1$, $A \geq 0$, $B \geq 0$ 下, $A^p + B^p$ 的極小就夠了。

零元素即几乎处处为零的函数.

假如 $x \in L^p$, α 是任意的数, 則 $\alpha x \in L^p$.

如此, 剩下的就只要証明不等式

$$\left\{ \int_a^b |x(t) + y(t)|^p dt \right\}^{\frac{1}{p}} \leq \left\{ \int_a^b |x(t)|^p dt \right\}^{\frac{1}{p}} + \left\{ \int_a^b |y(t)|^p dt \right\}^{\frac{1}{p}},$$

这个不等式就是閔可夫斯基(Minkowski)不等式.

5. 霍爾澤(Hölder)与閔可夫斯基不等式^[2] 設 $\alpha, \beta \geq 0$,

$p > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ (則 $q > 1$). 討論

方程为

$$y = x^{p-1}$$

的曲綫 OAB , 这个方程也可寫成

$$x = y^{q-1}.$$

由圖 1¹⁾中顯然可知: 面積 S 与 T 之和不小于 $\alpha\beta$, 而等于 $\alpha\beta$ 恰在 A, B 两点重合时成立, 即当 $\alpha^p = \beta^q$ 时; 所以

$$\alpha\beta \leq \frac{\alpha^p}{p} + \frac{\beta^q}{q}. \quad (1)$$

注意 $p=2$ (亦即 $q=2$) 时, 得到的这个不等式就是初等的不等式

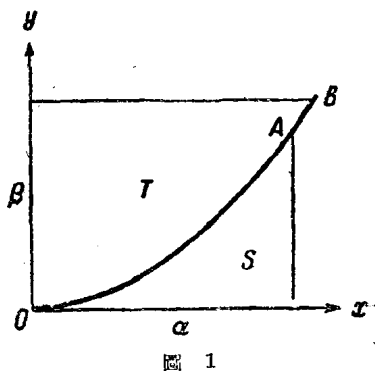
$$2\alpha\beta \leq \alpha^2 + \beta^2.$$

現設 $u(t) \in L^p, v(t) \in L^q$. 再設

$$\alpha = \frac{|u(t)|}{\|u\|_p}, \quad \beta = \frac{|v(t)|}{\|v\|_q}.$$

并引用不等式(1); 我們得到

¹⁾ 这个圖相当于 $p > 2, \beta > \alpha^{p-1}$ 的情形.



$$\frac{|u(t)v(t)|}{\|u\|_p\|v\|_q} \leq \frac{1}{p} \frac{|u(t)|^p}{\{\|u\|_p\}^p} + \frac{1}{q} \frac{|v(t)|^q}{\{\|v\|_q\}^q}.$$

因为不等式的右端是可積的,故其左端也是可積的,并且其積分不超过右端的積分,即不超过

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

我們得到霍爾譚不等式:

$$\int_a^b |u(t)v(t)| dt \leq \left\{ \int_a^b |u(t)|^p dt \right\}^{\frac{1}{p}} \cdot \left\{ \int_a^b |v(t)|^q dt \right\}^{\frac{1}{q}}. \quad (2)$$

在这个不等式中,不难看出等号成立必須且只須在 (a, b) 上下面等式几乎处处成立时:

$$|v(t)|^q = C|u(t)|^p.$$

在 $p=q=2$ 的情形,不等式(2)通常叫做希瓦茲 (Schwarz) 不等式,但是更正确地应叫做布亞科夫斯基 (Буняковский) 不等式.

为了証明閔可夫斯基不等式,首先注意由

$$|x(t)| + |y(t)| \in L^p \quad (p > 1)$$

可推出

$$\{|x(t)| + |y(t)|\}^{p-1} \in L^q,$$

其中 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

引用霍爾譚不等式于下面等式

$$(|x| + |y|)^p = |x| \cdot (|x| + |y|)^{p-1} + |y| \cdot (|x| + |y|)^{p-1}$$

右端的每一項,我們得到

$$\begin{aligned} \int_a^b (|x| + |y|)^p dt &\leq \left\{ \int_a^b (|x| + |y|)^p dt \right\}^{\frac{1}{q}} \left\{ \left[\int_a^b |x|^p dt \right]^{\frac{1}{p}} + \right. \\ &\quad \left. + \left[\int_a^b |y|^p dt \right]^{\frac{1}{p}} \right\}, \end{aligned}$$

由此得到当 $p > 1$ 时的閔可夫斯基不等式. 至于 $p = 1$ 时, 这个不等式的成立是顯然的.

不难看出, 在閔可夫斯基不等式(当 $p > 1$ 时)中, 等号成立当且僅当几乎处处有 $x(t) = Cy(t)$ 时, 其中常数 $C \geq 0$.

注意, 同样可得对于級数的霍尔譚与閔可夫斯基不等式, 即

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k \beta_k| \leq \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|^p \right\}^{\frac{1}{p}} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} |\beta_k|^q \right\}^{\frac{1}{q}} \quad \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, p > 1 \right),$$

$$\left\{ \sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k + \beta_k|^p \right\}^{\frac{1}{p}} \leq \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|^p \right\}^{\frac{1}{p}} + \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} |\beta_k|^p \right\}^{\frac{1}{p}} \quad (p \geq 1).$$

而且不难看出, 这些不等式都是上述已証明了的对于积分的霍尔譚与閔可夫斯基不等式的特殊情形.

今后我們常將应用所謂对于积分的推廣了的閔可夫斯基不等式

$$\left\{ \int_a^b \left| \int_c^d \varphi(x, y) dy \right|^p dx \right\}^{\frac{1}{p}} \leq \int_c^d \left\{ \int_a^b |\varphi(x, y)|^p dx \right\}^{\frac{1}{p}} dy \quad (p \geq 1).$$

这个式子可以借助平常積分論中常用的, 由只取有很多个值的函数(起先是只取两个值的), 轉移到矩形区域 $R(a < x < b, c < y < d)$ 上的任意可測的且对上述不等式右端有意义的函数 $\varphi(x, y)$ 來証明^[3].

当 $p = 1$ 时, 这个不等式的特殊情形即引導到福比尼(Fubini)定理^[3], 即断言: 如果

$$\int_c^d \left\{ \int_a^b |\varphi(x, y)| dx \right\} dy < \infty,$$

則

$$\int_R \varphi(P) dP = \int_a^b \left\{ \int_c^d \varphi(x, y) dy \right\} dx = \int_c^d \left\{ \int_a^b \varphi(x, y) dx \right\} dy.$$

6. 綫性賦范空間進一步的例子

空間 m 与 c 一切有界的数列

$$x = \{x_k\}, \quad y = \{y_k\}, \dots$$

的集合 m , 及一切收敛的数列

$$x = \{x_k\}, \quad y = \{y_k\}, \dots$$

的集合 c 都是綫性賦范空間, 如果令

$$x + y = \{x_k + y_k\},$$

$$\alpha x = \{\alpha x_k\},$$

$$\|x\| = \sup_k |x_k|.$$

空間 l^p ($p \geq 1$) 所有使級数

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p, \quad \sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^p, \dots$$

收敛的数列

$$x = \{x_k\}, \quad y = \{y_k\}, \dots$$

組成的集合 l^p 也是綫性賦范空間, 如果令

$$\|x\| = \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p \right\}^{\frac{1}{p}},$$

这可以用对于級数的闵可夫斯基不等式來証明.

7. 希尔伯脫空間^[4] 希尔伯脫(Hilbert)空間(空間 H)是指綫性空間(即滿足 § 3 中前两条件), 在其中对于每两个向量 x, y , 有一(复)数 (x, y) 与之对应, 这个数叫做向量的內積, 并滿足下列条件¹⁾:

a) $(y, x) = \overline{(x, y)},$

b) $(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, y) = \alpha_1 (x_1, y) + \alpha_2 (x_2, y),$

c) $(x, x) \geq 0,$

d) $(x, x) = 0$ 必須且只須 $x = 0$.

如果 $(x, y) = 0$, 向量 x, y 就叫做是正交的.

容易举出具体的例子, 滿足我們用以公理化地定义希尔伯脫

¹⁾ 在数上加一橫綫即指此数的共轭数.

空間 H 的条件(自然地我們就把 H 叫做抽象的希爾伯特空間)。

例如,空間 l^2 就給出这种具体的例子,如果令

$$(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \bar{y}_k,$$

其中

$$x = \{x_k\}, \quad y = \{y_k\}.$$

由對於級數的希瓦茲不等式(哥西(Cauchy)早就發現了),即當 $p=q=2$ 時的霍爾譚不等式,可推出級數

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k \bar{y}_k$$

的收斂性(而且絕對收斂)。

空間 L^2 是另一個例,如果令

$$(x, y) = \int_a^b x(t) \overline{y(t)} dt.$$

現在證明內積 (a, b) 具有下列性質:

$$1^\circ. \quad (\alpha x, \alpha x) = |\alpha|^2 (x, x),$$

$$2^\circ. \quad |(x, y)| \leq \sqrt{(x, x)} \cdot \sqrt{(y, y)}$$

(推廣了的希瓦茲不等式),

$$3^\circ. \quad \sqrt{(x+y, x+y)} \leq \sqrt{(x, x)} + \sqrt{(y, y)},$$

並且,如果 $y \neq 0$, 則關係式 2° 的等號只當 $x = \alpha y$ 時才成立,而在 3° 中則只當 $x = \alpha y$, 且 $\alpha \geq 0$ 時才成立(當 $y = 0$ 時,變成不足道的等式)。

性質 1° 是顯然的:

$$(\alpha x, \alpha x) = \alpha \overline{(\alpha x, x)} = \alpha \overline{\alpha \overline{(x, x)}} = \alpha \bar{\alpha} (x, x) = |\alpha|^2 (x, x).$$

為了證明性質 2° , 可設 $(x, y) \neq 0$. 令

$$\vartheta = \frac{(x, y)}{|(x, y)|},$$

則對於任何實數 λ

$$0 \leq (\bar{\partial}x + \lambda y, \bar{\partial}x + \lambda y) = \lambda^2(y, y) + 2\lambda|(x, y)| + (x, x);$$

此 λ 的三項式的根应当是复的或者是相等的, 从而这就証明了性質 2°. 等号顯然当且只当如果有某个 λ , 使

$$\bar{\partial}x + \lambda y = 0$$

时才达到.

今証性質 3°, 因

$$\begin{aligned} (x+y, x+y) &= (x, x) + (x, y) + (y, x) + \\ &\quad + (y, y) \leq (x, x) + 2|(x, y)| + (y, y), \end{aligned}$$

而根据 2°,

$$(x+y, x+y) \leq \{\sqrt{(x, x)} + \sqrt{(y, y)}\}^2.$$

等号当且只当

$$(x, y) = \sqrt{(x, x)} \cdot \sqrt{(y, y)}$$

时才达到. 但已知当 $y \neq 0$ 时, 要等式成立首先必須 $x = \alpha y$, 而当这条件成立时

$$(x, y) = (\alpha y, y) = \alpha(y, y),$$

即

$$\alpha = \sqrt{\frac{(x, x)}{(y, y)}} \geq 0.$$

根据定义內積的条件, 及其性質 1°, 3°, 如果令

$$\|x\| = \sqrt{(x, x)},$$

則希尔伯脫空間成为綫性賦范空間.

8. 綫性賦范空間中逼近的基本定理 假設 E 是任一綫性賦范空間, 令

$$g_1, g_2, \dots, g_n$$

为 E 中 n 个綫性無关的元素, 逼近論的基本問題在我們所討論的“綫性情形”可以述之如下: 給定元素 $x \in E$; 要求定出数 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 使数量

$$\varphi(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) = \|x - \lambda_1 g_1 - \lambda_2 g_2 - \dots - \lambda_n g_n\|$$

得最小值.

在本節中將證明要求的數 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 的值确实存在。

首先注意： $\varphi(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ 為 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 的連續函數。事實上，根據三角形不等式，可得

$$\begin{aligned} & |\varphi(\lambda'_1, \lambda'_2, \dots, \lambda'_n) - \varphi(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)| = \\ & = \left\| x - \sum_1^n \lambda'_k g_k \right\| - \left\| x - \sum_1^n \lambda_k g_k \right\| \leq \left\| \sum_1^n (\lambda'_k - \lambda_k) g_k \right\| \leq \\ & \leq \sum_1^n |\lambda'_k - \lambda_k| \|g_k\| \leq \max_k |\lambda'_k - \lambda_k| \cdot \sum_1^n \|g_k\|. \end{aligned}$$

今再引進另一連續函數

$$\psi(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) = \|\lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2 + \dots + \lambda_n g_n\|.$$

在“球”

$$|\lambda_1|^2 + |\lambda_2|^2 + \dots + |\lambda_n|^2 = 1$$

上，函數 ψ 依熟知的維爾斯脫拉斯 (Weierstrass) 定理應達到極小值 μ ，因為上述的球是通常有限維空間中的有界閉點集。

非負數 μ 不可能是零，因為 $g_1, g_2, \dots, g_n$ 綫性無關；所以 $\mu > 0$ 。

令 $\rho (\geq 0)$ 為函數 φ 的下確界。

假如

$$\sqrt{\sum_1^n |\lambda_k|^2} > \frac{1}{\mu} (\rho + 1 + \|x\|) = R,$$

則

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) & \geq \|\lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2 + \dots + \lambda_n g_n\| - \|x\| \geq \\ & \geq \sqrt{\sum_1^n |\lambda_k|^2} \cdot \mu - \|x\| > \rho + 1. \end{aligned}$$

因此，要求函數 $\varphi(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ 的極小，可以只限于考慮滿

足

$$\sum_1^n |\lambda_k|^2 \leq R^2$$

的諸 λ_k 的值, 即只須在有界閉區域上來考慮, 而在這些區域中連續函數確實達到極小值。

因此, 給出元素 x 的最好逼近的綫性組合 $\lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2 + \cdots + \lambda_n g_n$ 的存在性就証明了。

9. 嚴格賦范空間 我們又可提出這樣一個問題: 是否對於每一元素 $x \in E$, 對於它給出最佳逼近的綫性組合 $\lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2 + \cdots + \lambda_n g_n$ 都是唯一的?

當空間 E 是嚴格賦范¹⁾時, 即不等式

$$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad (x \neq 0, y \neq 0)$$

中的等號只當 $y = \alpha x$, $\alpha > 0$ 時才成立, 則上述的最佳逼近是唯一的。

事實上, 當空間 E 是嚴格賦范時, 假定對於某個 x 有兩個綫性組合

$$\lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2 + \cdots + \lambda_n g_n, \quad \mu_1 g_1 + \mu_2 g_2 + \cdots + \mu_n g_n$$

都給出最佳逼近 (其中 $g_1, g_2, \cdots, g_n$ 綫性無關)。則依所給條件 (參看 § 8) 可知

$$\left\| x - \sum_1^n \lambda_k g_k \right\| = \left\| x - \sum_1^n \mu_k g_k \right\| = \rho,$$

而且容易看出, 不妨假定 $\rho \neq 0$, 又因

$$\left\| x - \sum_1^n \frac{\lambda_k + \mu_k}{2} g_k \right\| \leq \frac{1}{2} \left\| x - \sum_1^n \lambda_k g_k \right\| + \frac{1}{2} \left\| x - \sum_1^n \mu_k g_k \right\| = \rho,$$

所以

$$\left\| x - \sum_1^n \frac{\lambda_k + \mu_k}{2} g_k \right\| = \rho.$$

這就是說

$$\left\| x - \sum_1^n \frac{\lambda_k + \mu_k}{2} g_k \right\| = \frac{1}{2} \left\| x - \sum_1^n \lambda_k g_k \right\| + \frac{1}{2} \left\| x - \sum_1^n \mu_k g_k \right\|.$$

¹⁾ 這名詞屬於克萊因 (М. Г. Крейн) 的。