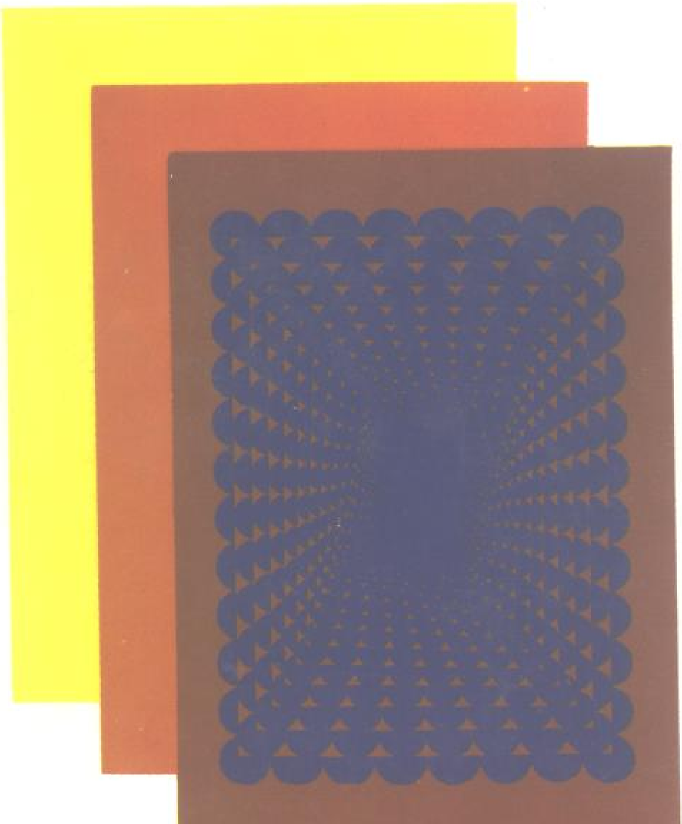
无穷维Banach空间内级数的重排

刘中兴 著



電子工業出版社

无穷维 Banach 空间内级数的重排

刘 中 兴 著

电子工业出版社

内 容 简 介

本书论述了无论在理论上还是在应用上都十分活跃的Banach空间内级数的重排的近代研究成果。其内容包括：Banach空间级数重排的和集，绝对收敛与条件收敛，R.-P.Agnew定理及其推广的一些结果。本书乃国内外这方面的唯一著作，内容丰富有趣。可供数学系高年级学生、硕士和博士研究生及广大数学工作者参考。

无穷维Banach空间内
级数的重排
刘中兴 著
*
电子工业出版社出版
北京市海淀区万寿路173信箱(100036)
电子工业出版社发行 各地新华书店经销
北京科技大学印刷厂印刷
*
开本：787×1092毫米 1/32 印张：6 字数：134千字
1995年10月第一版 1995年10月北京第一次印刷
印数：600册 定价：15.00元

序

1837 年 Dirichlet 发现了条件收敛级数可以重新排列而使级数的和不同。而在 1854 年，Riemann 证明了：适当重排条件收敛级数的项，可使级数的和等于任何给定的数值，这就是著名的 Riemann 重排定理．五十年后，P. Lévy 与 E. Steinitz 把 Riemann 重排定理推广到 n 维 Euclid 空间。Lévy 与 Steinitz 的研究方法，奠定了 Banach 空间级数重排的和集的研究基础。在几乎沉默了五十年后，п. л. ульянов 在本世纪五十年代就提出：在 Banach 空间内，条件收敛级数和集的构造究竟是怎样的？1954 年，M. И. Кадец 的《关于 L_p 空间内的条件收敛级数》的论文，重新激起了人们对 Riemann 重排定理推广研究的兴趣，特别是前苏联学者对这个问题的研究逐渐开始活跃起来，到目前为止，他们已经取得了许多重要成果。

对 R. P. Agnew 定理以及关于 L_p 空间内无条件收敛级数的 W. Orlicz 定理推广的研究，特别是，A. Dvoretzky 与 C. A. Rogers 关于无穷维空间内无条件收敛不能推出绝对收敛的著名定理及其推广，使 Banach 空间级数重排的内容更为绚丽多彩。

本书是 Banach 空间级数重排近代研究的总结，共分五章。

第一章简述数项级数的重排，其中包括著名的 Reimann 重排定理，Миловидова 定理及有趣的 Hill 定理。

第二章是 R. P. Agnew 定理及其推广。读者不难看出，这一章的一些主要定理的证明的思想是相同的，它们应用了 Rademacher 函数的性质。

在第三章里，我们介绍了莫斯科大学 E. M. Никишин 应用发展了的 M. И. Кадец 方法，解决了 Banach 所提出的一个问题。他所用的方法，被其他学者广泛采用。本章还介绍了 B. M. Кадец 所解决的另一个 Banach 问题。

在第四章，我们首先介绍了多伦多大学的 P. Rosenthal 博士对 Lévy-steinitz 定理的重新论证，然后叙述了条件收敛级数在各种无穷维空间（L_p 空间，S 空间，一致光滑的 Banach 空间，赋范空间）重排和集的构造。读者可以发现，研究级数重排和集构造的关键是：建立所谓各种重排不等式。

在最后一章里，我们陈述并证明了著名的 Dvoretzky 与 Rogers 定理，本章最后一节介绍了该定理的推广。

在本书的附注中，我们补充了无穷维空间级数重排研究的其它近期工作。

由于国内外尚无级数重排研究方面的著作，而国外有些重要资料，又无法查找，这些给本书写作带来了很大困难。北京大学数学系林源渠教授给本书初稿提出许多宝贵意见，他的热情鼓励与有价值的建议，使本书得到了许多改进。北京大学数学研究所副所长程乾生教授也曾给以诚挚的帮助。笔者对他们二位表示衷心的感谢。但是，无论从本书某些内容的表达方式，还是章节的安排上，肯定有不当之处，特别是，笔者学识浅陋，从定义的叙述到定理的证明，错误一定不少，殷切期望得到广大读者的批评与指教。

目　　录

第一章　Riemann 重排定理与子级数

§1.1　Riemann 重排定理

1837 年 Dirichlet 曾给出一个例子说明任一个条件收敛级数的项可以重新排列而使级数的和不相同. Riemann 作为 Dirichlet 的学生，1854 年证明了：适当重排级数的项可以使级数的和不相同. 这就是著名的 Riemann 关于数值条件收敛级数的重排定理.

下面我们叙述并证明 Riemann 定理. 为此，我们先证明一个辅助性的定理，这个定理本身就具有极特殊的意义.

[定理 1]　如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 条件收敛，则它的正项构成的级数与负项构成的级数皆发散.

[证]　为了证明定理的结论，我们用反证法

令级数 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 的部分和为 S_n. 我们用 $S_n^{(+)}$ 表示部分和 S_n 中那些正项的和，用 $S_n^{(-)}$ 表示部分和 S_n 中那些负项的和. 显然 $S_n=S_n^{(+)}+S_n^{(-)}$. 因为级数 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 收敛，所以 $\lim_{n\to\infty}S_n$ 存在. 如果 $\lim_{n\to\infty}S_n^{(+)}$ 与 $\lim_{n\to\infty}S_n^{(-)}$ 中的一个存在，则显然另一个也存在. 于是 $\lim_{n\to\infty}(S_n^{(+)}-S_n^{(-)})$ 存在. 但

$$S_n^{(+)}-S^{(-)}=|u_1|+|u_2|+\cdots+|u_n|.$$

于是，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 的部分和的极限存在. 所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 收敛. 而这与级数 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 是条件收敛矛盾. 定理被证明.

［定理 2］(Riemann)　如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 是条件收敛的，则对这个级数的项进行某种重新排列后，可以得到发散级数，也可以得到收敛级数，并且在后一种情形，我们可以使重排后的收敛级数收敛于任意予先给定的和 s.

［证］　因为条件收敛级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的正项构成的级数是发散的，所以为了得到发散级数，我们先取级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的若干正项，使其和大于 1，然后在这些正项的后面放上级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的第一个负项，然后再从剩下的正项中，按次序取若干正项也使其和大于 1，然后在这些正项后面再放上第二个负项，如此下去乃至无穷．于是我们得到了级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的一个重排级数，我们记它为 $(\sigma)\sum_{n=1}^{\infty} u_n$. 显然，级数 Σu_n 的任一项必然在级数 $(\sigma)\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 中出现．从上面的构造可知，级数 $(\sigma)\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 是发散的．

下面我们证明定理的另一部分．

由于级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 是条件收敛的，所以其正项组成的级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n'$ 及负项绝对值组成的级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n''$ 均为发散的．显然，从 $\lim_{n\to\infty} u_n=0$ 可知 $\lim_{n\to\infty} u_n'=0$ 且 $\lim_{n\to\infty} u_n''=0$.

现在假设 s 是任给的一个实数，为简单起见设 $s>o$.

由于级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n'$ 发散，所以我们可以从第一项起一直取到 u_{p_1}' 项，使其和恰好大于 s. 又级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n''$ 是发散的，从前面的和数中减去级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n''$ 的从第一项直到 u_{q_1}'' 项，可使整个的和

数恰好小于 s. 然后在整个和的后面放上级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n'$的从 u'_{p_1+1}项直到 u'_{p_2}项，使与前面的和数加在一起恰好大于 s，然后再从这个和数中减去级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n''$的从 u''_{p_1+1}项起直到 u''_{p_2}项，使与前面的和数加在一起恰好小于 s. 如此继续下去直到无穷，我们得到级数

$$u_1'+u_2'+\cdots+u_{p_1}'-u_1''-u_2''-\cdots-u_{q_1}''+u'_{p_1+1}+$$
$$+u'_{p_1+2}+\cdots+u'_{p_2}-u''_{q_1+1}-u''_{q_1+2}-\cdots-u''_{q_2}+$$
$$+u'_{p_2+1}+u'_{p_2+2}+\cdots+u'_{p_3}-\cdots.$$

这个级数的部分和 σ_m 的子数列，有如下性质：

$$\sigma_{p_\gamma-1}\leqslant s\leqslant\sigma_{p_\gamma-1},\quad \sigma_{q_\gamma}\leqslant s\leqslant\sigma_{q_\gamma-1}\qquad(\gamma=1,\ 2\cdots)$$

因为

$$\lim_{\gamma\to\infty}(\sigma_{p_\gamma}-\sigma_{p_\gamma-1})=\lim_{\gamma\to\infty}u'_{p_\gamma}=0,\quad \lim_{\gamma\to\infty}(\sigma_{q_\gamma}-\sigma_{q_\gamma-1})$$
$$=\lim_{\gamma\to\infty}u''_{q_\gamma}=0$$

所以

$$\lim_{\gamma\to\infty}\sigma_{p_\gamma-1}=\lim_{\gamma\to\infty}\sigma_{p_\gamma}=\lim_{\gamma\to\infty}\sigma_{q_\gamma}=\lim_{\gamma\to\infty}\sigma_{q_\gamma-1}=s.$$

于是也有 $\lim\limits_{m\to\infty}\sigma_m=s$. 即我们构造的级数的和等于 s. Riemann 定理被证明.

§1.2 Riemann 重排定理的推广

[定理 1](**W. Sierpinski [1]**)　设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 是条件收敛的，并收敛于 s，又 $s'<s$. 则经过某种只涉及到正项的重排(级数负项的位置不变)，重排后的级数收敛于 s'. 而如果 $s''>s$，则经过某种只涉及到负项的重排（级数的正项位置不变），重排后的级数收敛于 s''.

这个定理是 Riemann 重排定理的推广，它的证明是相当困难的，有兴趣的读者可参考文献［1］.

A. C. Кронрод［2］曾讨论了常数项级数重排对收敛的影响，他给出了 Reimann 定理一些重要增补．他发现有那种排列存在，用到收敛级数上仍旧得到收敛级数，用到发散级数上可能得到收敛级数．他称这种排列为右排列．同样，他也得到了左排列，这种排列把发散级数仍旧变为发散级数，但可能把收敛级数变成发散级数．他证明了

［定理 2］ 任意一个条件收敛级数可以经过重排而使其收敛于任何指定的数，并且这个重排可以分为两步实现，其中一步是左排列，另一步是右排列．

我们省略其证明．

§ 1.3 Миловидова 定理

П. М. Миловидова［3］曾研究了数项级数算术平均值的极限点集．下面我们介绍她的结果．

设级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{1}$$

是条件收敛级数，而级数

$$(\sigma)\quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a'_n \tag{2}$$

是由级数（1）的某一个排列得到的级数．我们用 s_k 表示级数（2）的部分和，而 $\sigma_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} s_k$ 表示级数（2）的部分和的算术平均．于是数列 σ_1，σ_2，…，σ_n，…为级数（2）的算术平均值的数列．

Миловидова 证明了

[定理] 级数（2）的算术平均值数列的极限点集 F 或是一个点或是实轴上有穷或无穷的线段．

为了证明这个定理，我们先证明一个引理．

[引理] 设 F 为级数（2）的算术平均值的极限点集，而 a、b 为这个集合的两个点，则

$$[a,\ b] \subset F. \tag{3}$$

[证] 用反证法．如果（3）不成立，则存在点 c，$c \in (a, b)$，但 $c \overline{\in} F$．因为集合 F 为闭的，所以存在区间 (a', b')，$a < a' < b' < b$，$(a',\ b') \cap F = \phi$.

我们取 ε_o 满足条件

$$o < \varepsilon_o < b' - a'. \tag{4}$$

我们证明 $\lim\limits_{n\to\infty}(\sigma_{n+1} - \sigma_n) = 0$. 实际上，因为级数（1）条件收敛，所以 $S_{n+1} - S_n = a'_n \to 0$（当 $n \to \infty$ 时）．显然

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(s_{k+1} - s_k)\right] = 0. \tag{5}$$

又

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(s_{k+1} - s_k) = \frac{1}{n}\sum_{k'=2}^{n+1}s_{k'} - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}s_k =$$
$$= \frac{n+1}{n}\cdot\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1}s_k - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}s_k - \frac{s_1}{n}$$
$$= \left(1 + \frac{1}{n}\right)\sigma_{n+1} - \sigma_n - \frac{s_1}{n} = (\sigma_{n+1} - \sigma_n) - \frac{\sigma_{n+1}}{n} - \frac{s_1}{n}.$$

于是从（5）式得

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sigma_{n+1} - \sigma_n - \frac{1}{n}\sigma_{n+1} - \frac{s_1}{n}\right) = 0 \tag{6}$$

因为 $\lim\limits_{n\to\infty}a'_n = 0$，则

$$\lim_{k\to\infty}\frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k}a'_j = \lim_{k\to\infty}\frac{s_k}{k} = 0$$

因此，对任何的 $\varepsilon>0$，存在自然数 k_0，当 $k>k_0$ 时，成立着 $\left|\frac{s_k}{k}\right|<\varepsilon/2$. 所以对任何 $n>k_0$，我们有

$$|\sigma_n|<\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{k_0}s_k\right|+\frac{\varepsilon}{2n}\sum_{k=k_0+1}^{n}k<\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{k_0}s_k\right|+\frac{n\varepsilon}{2}. \qquad (7)$$

其次对 ε，我们还可求得自然数 n_0，对所有的 $n>n_0$，满足不等式

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{k_0}s_k\right|<\frac{\varepsilon}{2}<\frac{\varepsilon}{2}n.$$

由此并从关系式（7）推得，对 $n>n_0$，成立着 $\left|\frac{1}{n}\sigma_n\right|<\varepsilon$，即 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sigma_n=0$. 由此并注意到（6）式，我们便得 $\lim\limits_{n\to\infty}(\sigma_{n+1}-\sigma_n)=0$. 而这就意味着，对满足不等式（4）的 ε_0，有自然数 N，对所有的 $n>N$，成立着不等式

$$|\sigma_{n+1}-\sigma_n|<\varepsilon_0. \qquad (8)$$

我们在区间 (a', b') 上取长度为 ε_0 的任一个子区间 $[a'', b'']$（因为关系式（4），所以这是可以作到的）. 因为 a 与 b 为级数（2）的算术平均值数列的极限点，那么由此并从不等式（8）推得，对无穷多的不同序号 n，量 σ_n 位于区间 $[a'', b'']$ 上；在这种情况下，数列 σ_n（$n=1, 2, \cdots$）的极限点位于 $[a'', b'']\subset(a', b')$ 上. 所以，区间 (a', b') 不包含集合 F 的任何一个极限点. 这是不正确的. 于是引理被证明.

定理的证明：因为任一个数列的极限点集是闭的，所以集合 F 是闭的.

现在我们证明集合 F 是连通的. 实际上，如果集合 F 是由一个点组成的，则定理即被证明. 如果存在两个点 a 与 b，$a<b$，$a\in F$，$b\in F$. 则从引理知 F 是连通的.

因为直线上任一个闭连通集或是一个点，或是直线上的

有限或无限的线段．所以 Миловидова 定理被证明．

§1.4 关于子级数的 Banerjee—Lahiri 定理与 Hill 定理

1\. S. Kakeya [4] 曾证明

[定理 1] 如果正项级数 $u(1)+u(2)+u(3)+\cdots$ 收敛于 s，且 $u(1)\geqslant u(2)\geqslant u(3)\geqslant\cdots$，并成立着

$$u(n)\leqslant u(n+1)+u(n+2)+u(n+3)+\cdots \quad (n=1,\ 2,\ \cdots),$$

而 $o<p<s$，则存在子级数收敛于 p．

而 C. R. Banerjee 与 B. K. Lahiri [5] 则进一步证明了

[定理 2] 设级数

$$u(1)+u(2)+u(3)+\cdots$$

是一个正项发散级数，而

$$\lim_{n\to\infty}u(n)=0,$$

而 p 是一个正数．则存在级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u(n)$ 的子级数收敛于 p．

[证] 设 K_1 是当 $k\geqslant K_1$ 时，使 $u(k)<{}^{p}/_{2}$ 的最小整数，设 L_1 是使

$$s_1=u_1(K_1)+u_2(K_1+1)+\cdots+u(L_1)<p$$

的最大整数．则 $\frac{p}{2}<s_1<p$．设 K_2 是使 $K_2>L_1$ 和 $u(k)<\frac{(p-s_1)}{2}$（当 $k\geqslant K_2$）的最小整数．设 L_2 是使

$$s_2=s_1+u(K_2)+u(K_2+1)+\cdots+u(L_2)<p$$

的最大整数．则 $p-\frac{p}{2^2}<s_2<p$．设 $K_3>L_2$ 和 $u(k)<\frac{p-s_2}{2}$（当 $k\geqslant K_3$ 时）的最小整数．设 L_3 是使

$$s_3=s_2+u(K_3)+u(K_3+1)+\cdots+u(L_3)<p$$

的最大整数．则 $p-\frac{p}{2^3}<s_3<p$．继续这个过程，我们得到两个整数列：K_1，K_2，…和 L_1，L_2，…致使

$$K_1<L_1<K_2<L_2<K_3<L_3<\cdots$$

$$s_q=s_{q-1}+u(K_q)+u(K_q+1)+\cdots+u(L_q)$$

$$(q=2,\ 3,\ \cdots),$$

并且 $p-\frac{p}{2^q}<S_q<p$．易见，由递增的正整数列

$$K_1,K_1+1,\cdots,L_1,K_2,K_2+1,\cdots,L_2,K_3,K_3+1,\cdots$$

确定的子级数收敛于 p．

2．经过简单的计算可以验知有限和 $s_n=u_1+u_2+\cdots+u_n$ 的所有子和（包括空和）的算术平均值等于 $s_n/2$．J. D. Hill 把这一简单事实推广到数项级数中．他证明了一个有趣的定理

．

设数项级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}u_n$ 是绝对收敛的，且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_k=s$．记 $I\equiv(0<\xi\leqslant 1)$．如果 ξ 是区间 I 上任一点，则 ξ 可以唯一地表示为二进位小数

$$\xi=0.\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_k\cdots \qquad (1)$$

的形式．此处

$$\alpha_{k_i}=1\ (1\leqslant k_i<k_{i+1};\ i=1,\ 2,\ \cdots);\ 否则\ \alpha_k=0. \qquad (2)$$

显然点 ξ 对应一个无穷子级数 $\sum\limits_{i=1}^{\infty}u_{k_i}$．反之，如果级数 $\sum\limits_{i=1}^{\infty}u_{k_i}$ 是级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}u_k$ 的一个无穷子级数，则它与区间 I 上的点对应（按（1）与（2）所定义的 ξ）．现在我们定义函数 $\varphi(\xi)$ 如下

$$\varphi(\xi)=\begin{cases}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\alpha_k u_k, & 当\ 0<\xi\leqslant 1,\\ 0\quad, & 当\ \xi=0,\end{cases} \qquad (3)$$

其中 $0.\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_k\cdots$ 是 ξ 的二进位小数．显然，对 $\xi\in I$ 的所有函数值 $\varphi(\xi)$ 与级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}u_k$ 的所有子级数的和集是相等的．

J. D. Hill [6] 证明

［**定理 3**］ 绝对收敛级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}u_k$ 的所有无穷子级数的和的平均值，等于级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}u_k$ 和 s 的一半，即

$$\int_0^1\varphi(\xi)d\xi=\frac{s}{2},\tag{4}$$

此处的积分是 Riemann 意义下的积分．

［**证**］ 考虑级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\alpha_k u_k$ 的部分和．令

$$\varphi_n(\xi)=\sum_{k=1}^{n}\alpha_k u_k,\quad 0<\xi\leqslant 1,\quad n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,$$

而 $\varphi_n(0)=0$ $(n=1,\ 2,\ \cdots)$．

对固定的 n，数字 α_k $(k=1,2,\cdots)$ 只能取 0 或 1．所以，数 α_1、α_2，…，α_n 的 n 级排列共有 2^n 个．我们用 α_{1i}，α_{2i}，…，α_{in} $(i=1,\ 2,\ \cdots,\ 2^n)$ 表示这些排列．对每一个固定的 i，形如 $0.\alpha_{1i}\alpha_{2i}\cdots\alpha_{ni}\alpha_{n+1}\alpha_{n+2}\cdots\alpha_k\cdots$ 的所有数 ξ 的集合组成区间 $I_{ni}=(0.\alpha_{1i}\alpha_{2i}\cdots\alpha_{ni}<\xi\leqslant 0.\alpha_{1i}\alpha_{2i}\cdots111\cdots)$，而区间的长度等于 2^{-n}．区间 I_{ni} $(i=1,\ 2,\ \cdots,\ 2^n)$ 是彼此互不相交的，而其并集构成区间 I．在区间 I_{ni} 上，函数 $\varphi_n(\xi)$ 取常数值 $\sum\limits_{k=1}^{n}\alpha_{ki}u_k$．因此 $\varphi_n(\xi)$ 是区间 I 上的阶梯函数．

因为对所有的 $n=1,2,\cdots$ 和所有的 ξ $(0\leqslant\xi\leqslant 1)$ 成立着 $|\varphi_n(\xi)|\leqslant\Sigma|u_k|$ 及 $|\varphi(\xi)-\varphi_n(\xi)|\leqslant\Sigma_{k>n}|u_k|$，因此 $\varphi(\xi)$ 是一致有界的阶梯函数列的极限．于是 (4) 式左边的积分 $\int_0^1\varphi(\xi)d\xi$ 是存在的．为了求出它的值，注意到，除了形如 k

$\cdot 2^{-n}$ （$k=0, 1, 2, \cdots, 2^n$; $n=1, 2, \cdots$）的所有点组成的可数集合 T 外，对 ξ 的所有值，$\varphi(\xi)+\varphi(1-\xi)=\varphi(1)=s$ 成立．令 $Q=I-T$，则在 Lebesgue 意义下，有

$$\int_Q \varphi(\xi)d\xi + \int_Q \varphi(1-\xi)d\xi = s \tag{5}$$

但

$$\int_Q \varphi(\xi)d\xi = \int_0^1 \varphi(\xi)d\xi, \int_Q \varphi(1-\xi)d\xi = \int_0^1 \varphi(1-\xi)d\xi$$
$$= \int_0^1 \varphi(\xi)d\xi.$$

于是从（5）式便得到（4）式．定理 3 被证明．

参考文献

[1]W. Sierpinski, Bull. Internat. Ac. Sciences Cracovie(1911), 149.

[2]А. С. Кронрод. О перестановках членов числовых рядов, Матем. СБ, 1946. Т. 18 (60), №2, 237～276.

[3] И. М. Милонидона. О множестве предельных точек последовательности средних арифметических числового ряда, Изв. вузов. Матем; 1976. №3, 109～112.

[4]S. Kakeya. On the partial sum of an infinite series, Science Reports of the Tohoku Imperial University (1); 3 (1914), 159～163.

[5] C. R. Banerjee, B. K. Lahiri. On subseries of divergent Series, Amer. Math. Monthly; 1964, 71, №7.

[6] J. D. Hill. Some theorem on subseries, Bull. Amer. Math. Soc; 48 (1942), 103～108.