FUBIAN HANSHU LILUN YU LITI

浙江科学技术出版社

复变函数理论与例题

复变函数理论与例题

姚璧芸　骆　程　潘雪文

浙 江 科 学 技 术 出 版 社

内 容 提 要

本书是由杭州大学数学系姚璧芸副教授等编写的. 全书简要介绍复变函数的微分、积分、级数、留数、保形映射与解析开拓等方面的基本概念、定理及基本方法. 围绕这些内容，结合学生在学习上经常遇到的困难，参考国内外较新的复变函数教材和习题集，选编了127 道有代表性的例题.

本书内容由浅入深，繁简适宜，适合高等院校理工科、业余工大、电视大学等有关专业教学参考.

复变函数理论与例题

姚璧芸　骆　程　潘雪文

*

浙江科学技术出版社出版

浙江新华印刷厂印刷

浙江省新华书店发行

开本787×1092　1/32　印张8.25　字数190,000

1983年10月第 一 版

1983年10月第一次印刷

印数：1—10,000

统一书号：7221·41

定　价：0.88 元

责任编辑：周伟元　　封面设计：高春生

前　言

复变函数的理论和方法在数学及自然科学的其他部门和工程技术中有着广泛的应用．因此，复变函数论是高等院校理工科普遍开设的一门数学基础课．作为一门数学课，学生在学习中一定要做练习，用所学到的概念、原理和方法独立解决一些问题．只有这样才可能真正掌握所学过的知识．然而，学生把自己学到的理论知识运用到实际解题中去，并不是轻而易举的，特别对一些内容丰富、形式迥异的习题，甚至会不知如何入手．这说明复变函数从理论到方法，要有一个进一步阐发、联系与归纳的过程．为了给学生以适当的启发与必要的示范，我们根据几年来的教学经验编写了这本书．

全书分八章．每一章前面是内容提要，后面是例题．内容提要是根据理科复变函数论教学大纲编写的．例题尽量选择有代表性的，并按由浅入深层次编排．例题大部分选自国内外较新的复变函数论书籍与习题集，解法紧扣复变函数论自身的理论和方法，也尽量注意复分析与实分析的联系．有的题目还提供多种解法，以打开读者的思路．编写题解时，前面的写得详细一点，后面的写得简单一些．这样既能节省篇幅，又可以适应和推动读者学习能力的逐步提高．

本书适合大专院校理科学生用；对于工科院校、业余工大及电视大学有关专业的学生也是适用的，若欲进一步自学钻研则更有帮助．

由于我们水平有限，错误在所难免，恳请读者批评指正．

编　者

1983年3月

目　　录

第一章　复数与复变函数

一　内容提要

1.复数的概念

设x和y是任意的两个实数，$x+iy$称为复数．通常$x+iy$还可以用另外的一个字母表示，如设$z=x+iy$．x称为复数z的实部，记作$\mathrm{Re}z$或$\mathrm{Re}(x+iy)$；y称为复数z的虚部，记作$\mathrm{Im}z$或$\mathrm{Im}(x+iy)$．当$y=0$时，z就是实数x；当$y\neq 0$时，z称为虚数；当$y\neq 0, x=0$时，z称为纯虚数，可写作iy．两个复数x_1+iy_1与x_2+iy_2，当$x_1=x_2$及$y_1=y_2$时，称为相等．$x-iy$称为$x+iy$的共轭复数，记作$\overline{x+iy}$．

2.复数的运算

设$z_1=x_1+iy_1, z_2=x_2+iy_2$．定义：

1）加法：$z_1+z_2=(x_1+x_2)+i(y_1+y_2)$；

2）乘法：$z_1z_2=(x_1x_2-y_1y_2)+i(x_1y_2+x_2y_1)$，由此$i^2=i\cdot i=-1$；

3）减法为加法的逆运算，故$z_1-z_2=(x_1-x_2)+i(y_1-y_2)$；

4）除法为乘法的逆运算．设$z_2\neq 0$，又设z_3满足$z_1=z_2z_3$，解得

$$z_3=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+i\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}=\frac{z_1}{z_2}.$$

利用共轭复数的性质，除法得到简便算法：

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{z_1\bar{z}_2}{z_2\bar{z}_2}=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+i\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}\ (z_2\neq 0).$$

复数全体构成域①.

3.复数平面　复数的模与幅角

任一复数 $z=x+iy$ 可与坐标平面上的点 $P(x,y)$ 作成对应,这样在复数的全体与平面上点的全体之间形成一一对应.点 $P(x,y)$ 称为复数 $x+iy$ 的象,并可用同一记号 z 或 $x+iy$ 表示. 横坐标轴称为实轴,纵坐标轴称为虚轴,坐标平面称为复数平面或复平面. 任一复数 $z=x+iy(z\neq 0)$,又可以看作以 x 为水平分量,以 y 为垂直分量的平面向量,并可用同一记号 z 或 $x+iy$ 表示. 向量的长度 $\sqrt{x^2+y^2}$ 称为复数的模,记作 $|z|$. 容易知道,$|z|^2=z\bar{z}$. 向量的方向角称为复数的幅角,记作 $\mathrm{Arg}z$. $\mathrm{Arg}z$ 可取无穷多个值,彼此相差 $2k\pi(k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$.通常取绝对值最小的幅角作为幅角的主值,称为主幅角,记作 $\arg z$. 故 $-\pi<\arg z\leqslant\pi$,并且有 $\mathrm{Arg}\,z=\arg z+2k\pi(k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$.复数 0 可以看作零向量,$|0|=0$,其幅角无意义.以后凡涉及复数的幅角都是就非零复数而言的.

一个复数 z 的实部 x、虚部 y 与模 r、幅角 θ 之间成立着关系式

$$x=r\cos\theta,\quad y=r\sin\theta.$$

反之,

$$r=\sqrt{x^2+y^2},$$

① 域的定义见高等代数.

$$\arg z=\begin{cases}\operatorname{arc\,tg}\dfrac{y}{x} & (x>0),\\ \dfrac{\pi}{2} & (x=0,\ y>0),\\ \operatorname{arc\,tg}\dfrac{y}{x}+\pi & (x<0,\ y\geqslant 0),\\ \operatorname{arc\,tg}\dfrac{y}{x}-\pi & (x<0,\ y<0),\\ -\dfrac{\pi}{2} & (x=0,\ y<0).\end{cases}$$

复数的加（减）法与向量的加（减）法一致. 由此可知，平面上任意两点 z_1 和 z_2，它们之间的距离就是 $|z_1-z_2|$. 同时成立着下面的三角不等式

$$\Big||z_1|-|z_2|\Big|\leqslant\Big|z_1\pm z_2\Big|\leqslant\Big|z_1\Big|+\Big|z_2\Big|$$

（图 1—1）.

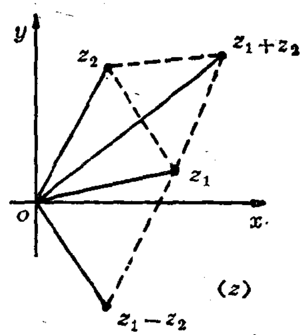

图 1—1

4. 复数的三角表示式及运算法则

设 $z\neq 0$ 是一复数，记 $|z|=r$，$\operatorname{Arg} z$ 的任意一值为 θ，则 $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$. 等式右端称为复数 z 的三角表示式. 特别，$i=\cos\dfrac{\pi}{2}+i\sin\dfrac{\pi}{2}$，$-1=\cos\pi+i\sin\pi$. 显然，在一个复数的三角表示式中，幅角有无穷多种写法，这是需要注意的. 若 $z_1=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)$，$z_2=r_2(\cos\theta_2+\sin\theta_2)$，则

1）$z_1z_2=r_1r_2[\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)]$. 故有

$$|z_1z_2|=|z_1||z_2|,\qquad \operatorname{Arg}(z_1z_2)=\operatorname{Arg}z_1+\operatorname{Arg}z_2.$$

上面最后的等式应解释为：对于左边任意的一个值，右边有值和它相等；反之对于右边任意的一个值，左边有值和它相等. 以后凡此类多值相等的式子都应当作这种解释.

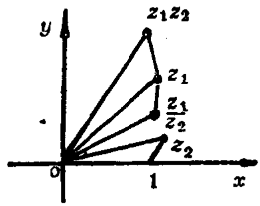

图 1—2

2) $\dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1-\theta_2)+i\sin(\theta_1-\theta_2)]$.

故有

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{|z_1|}{|z_2|},\quad \operatorname{Arg}\frac{z_1}{z_2}=\operatorname{Arg}z_1-\operatorname{Arg}z_2.$$

设 $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$，$n$ 为一自然数，则

3) $z^n=r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)$.

特别，当 $r=1$ 时，得棣莫佛 (De Moivre) 公式

$$(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta.$$

由此可得到$\cos n\theta$ 及 $\sin n\theta$ 用 $\cos\theta$ 及$\sin\theta$ 来表示的公式.

4) $z^{-n}=r^{-n}[\cos(-n\theta)+i\sin(-n\theta)]$.

5) $z^{\frac{1}{n}}=r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\dfrac{\theta+2k\pi}{n}+i\sin\dfrac{\theta+2k\pi}{n}\right)$ $(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$，此式右端实际上总共只有 n 个不相同的值，可以从 k 取接连的 n 个整数得到. 一般，取 $k=0,1,2,\cdots,n-1$.

6) 设 p、q 为互质的自然数，则

$$z^{\frac{p}{q}}=r^{\frac{p}{q}}\left(\cos\frac{p\theta+2k\pi}{q}+i\sin\frac{p\theta+2k\pi}{q}\right)$$

$$(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$$

共有 q 个不同的值，可由 k 取接连的 q 个整数获得. 一般，取 $k=0,1,2,\cdots,q-1$.

5. 关于平面曲线和区域的一些概念

1）曲线是闭区间的连续映象．若 $\varphi(t)$ 和 $\psi(t)$ 是 $[\alpha,\beta]$ 上的两个连续实变函数，则

$$\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases} \quad (\alpha\leqslant t\leqslant\beta)$$

是曲线的方程．用复数形式表示成

$$z=\lambda(t)=\varphi(t)+i\psi(t) \quad (\alpha\leqslant t\leqslant\beta)①.$$

若 $\varphi'(t)$ 与 $\psi'(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上连续且不同时为零，则称曲线是光滑的．用复数形式记 $\lambda'(t)=\varphi'(t)+i\psi'(t)$，则 $\lambda'(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上连续且 $\lambda'(t)\neq 0$．本书所讨论的曲线一般是指光滑曲线或逐段光滑曲线．

若 $\lambda(\alpha)=\lambda(\beta)$，则称曲线是闭的．若对于 $t_1<t_2$，除去 $t_1=\alpha$ 且 $t_2=\beta$ 外，有 $\lambda(t_1)\neq\lambda(t_2)$，则称曲线为简单曲线或约当(Jordan)曲线．

2）设平面点集 E 具有性质：(i) E 是开集，即 E 的每一点都是 E 的内点；(ii) E 具有连通性②，即对 E 的任意两点 z_1 和 z_2，存在 E 中的折线将 z_1 和 z_2 连接起来，则称 E 为区域．区域连同它的边界称为闭区域．

3）约当定理　平面上任一简单闭曲线 C 将整个平面分成不相交的两个区域，它们都以 C 为边界．其中一个是有界的，称为 C 的内部（区域）；另一个是无界的，称为 C 的外部（区域）．

---

① 有时需要用到 $\alpha=-\infty$ 或 $\beta=+\infty$．这时 $t=\alpha$ 或 $t=\beta$ 所对应的点，可根据本章第 8 段关于无穷大及无穷大的运算法则确定．以下还可以将闭曲线与简单曲线的概念，推广到扩充平面上去．

② 这里指的是开集的连通性．因此，下文中的“折线”可以改为“曲线”．

4) 设G是一区域，如果对于G内的任一简单闭曲线C，C的内部也含于G，则称G是单连通的. 不是单连通的区域，称为多连通区域或复连通区域.

6. 复变函数的概念

设E是一复数集. 如果对于任意的$z\in E$，有一个或一个以上确定的复数w与之对应，则说在E上定义了一个复变函数，记作$w=f(z)(z\in E)$. E称为函数的定义域，对应于$z\in E$，w的全体称为函数的值域. 若对每个$z\in E$，所对应的w的值只有一个，则称此函数是单值函数，否则是多值函数. 以后若无特殊声明，讨论的函数都是指单值的. 记$z=x+iy$，$w=u+iv$，记$f(x+iy)=\varphi(x,y)+i\psi(x,y)$，则每一个复变函数$w=f(z)$ $(z\in E)$，相当于一对有序的二元实变函数：$u=\varphi(x,y)$，$v=\psi(x,y)$ $((x,y)\in E)$.

7. 复变函数的极限和连续性

1) 设函数$w=f(z)$定义于点集E，z_0是E的一个聚点. 如果存在复数A，使对于任意给定的$\varepsilon>0$，有$\delta>0$，只要$0<|z-z_0|<\delta$，$z\in E$，就有$|f(z)-A|<\varepsilon$，则称$f(z)$在点z_0（关于点集E）有极限A. 或者说，当z（在E中）趋向于z_0时，$f(z)$趋向于A. 记作$\lim\limits_{\substack{z\to z_0\\ z\in E}} f(z)=A$或$f(z)\to A$（$z\to z_0$，$z\in E$）

记$z=x+iy$，$z_0=x_0+iy_0$，$f(z)=\varphi(x,y)+i\psi(x,y)$，$A=\alpha+i\beta$，则$\lim\limits_{\substack{z\to z_0\\ z\in E}} f(z)=A$等价于$\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0)\\ (x,y)\in E}}\varphi(x,y)=\alpha$与$\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0)\\ (x,y)\in E}}\psi(x,y)=\beta$同时成立. 特别，当$z_0$的一个去心邻域$0<|z-z_0|<\rho(\rho>0)$含于$E$时，关于点集$E$的极限就是通常的二重极限.

5860

2) 设函数$w=f(z)$定义于点集E，z_0为E的一个聚点，且$z_0\in E$，如果有$\lim\limits_{\substack{z\to z_0\\ z\in E}} f(z)=f(z_0)$，则称$w=f(z)$在$z_0$点（关于

点集E）连续.若$w=f(z)$在E上每一点连续，则称$w=f(z)$在E上连续.

3）设$w=f(z)$定义于点集E，E的每一点都是E的聚点.如果对任意给定的$\varepsilon>0$,存在$\delta>0$,只要E中的任意两点z'及z''满足$|z'-z''|<\delta$,就有$|f(z')-f(z'')|<\varepsilon$,则称$w=f(z)$在$E$上一致连续.

4）若函数$w=f(z)$在有界闭区域$\overline{G}$上连续,则(i)$|f(z)|$在$\overline{G}$上有界（此时也称$f(z)$为有界）；(ii)$|f(z)|$在$\overline{G}$上有最大值；(iii)$f(z)$在$\overline{G}$上一致连续.

8.无穷远点与扩充复平面

1）引进非正常的复数无穷大，记作∞.对它来说，实部、虚部与幅角都没有意义.∞的模$|\infty|$定义为$+\infty$（$+\infty$表示一个比一切实数都大的非正常实数）.无穷大与有限复数a的运算法则如下：$a+\infty=\infty+a=\infty$，$a\cdot\infty=\infty\cdot a=\infty$ $(a\neq 0)$.又$\infty\cdot\infty=\infty$.有时为了方便起见，我们还定义$\frac{a}{0}=\infty(a\neq 0)$及$\frac{b}{\infty}=0$ $(b\neq\infty)$.在复数平面上相应地加入一非正常点，称为无穷远点，它是∞的像.加入无穷远点的复平面，称为扩充(复)平面.将一单位球面B的赤道平面与复平面(z)重合，球中心

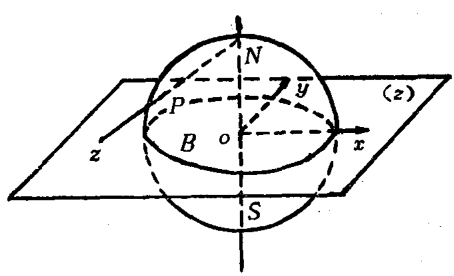

图 1—3

$|z|>R \leftrightarrow$ 球－北半球

$|z|<R \leftrightarrow$ 球－南半球

放在 $z=0$. 这样复平面上的点 z，可以通过球极投影，与球面上的点 P 作成对应. 复平面上的原点对应球面上的南极 S. 若将无穷远点对应于球面上的北极 N，则此种对应是一对一的. 因此，球面可以看成是扩充复平面的一一对应的像. 故此球面也称复（数）球面或黎曼（Riemann）面（以后若不加声明，所谓复数、复平面都仍指通常意义下的复数和复平面）.

2）以原点为中心的任一圆周的外部，称为无穷远点的邻域.

3）设函数 $w=f(z)$ 定义于点集 E，∞ 是 E 的一个聚点（即 ∞ 的任一邻域有 E 的无穷多个点）. 若存在复数 A，对于任意的 $\varepsilon>0$，存在 $R>0$，只要 $|z|>R, z\in E$，就有 $|f(z)-A|<\varepsilon$，则称 $w=f(z)$ 在 ∞ 关于点集 E 有极限 A，记作 $\lim\limits_{\substack{z\to\infty\\ z\in E}} f(z)=A$.

4）若函数 $w=f(z)$ 定义于点集 E，z_0 是 E 的一个聚点，对于任意的 $P>0$，存在 $\delta>0$，只要 $0<|z-z_0|<\delta$，$z\in E$，就有 $|f(z)|>P$，则称 $w=f(z)$ 在 z_0 有（广义）极限 ∞，记作 $\lim\limits_{\substack{z\to z_0\\ z\in E}} f(z)=\infty$.

5）若函数 $w=f(z)$ 定义于点集 E，∞ 是 E 的一个聚点，对于任意的 $P>0$，存在 $R>0$，只要 $|z|>R$，$z\in E$，就有 $|f(z)|>P$，则称 $w=f(z)$ 在 ∞ 有（广义）极限 ∞，记作 $\lim\limits_{\substack{z\to\infty\\ z\in E}}=f(z)=\infty$.

二　例　题

例 1　试确定下列各式中的实数 x、y：

1）$(3+6i)x+(5-9i)y=6-7i$；

2）$(x+iy)^2=a+ib$（a、b 是实数）.

解 1）因为

$$(3+6i)x+(5-9i)y=(3x+5y)+i(6x-9y),$$

所以原式即是

$$(3x+5y)+i(6x-9y)=6-7i.$$

根据两复数相等的定义知

$$\begin{cases}3x+5y=6,\\6x-9y=-7.\end{cases}$$

解此方程组得 $x=\dfrac{1}{3}$，$y=1$.

2）由 $x^2-y^2+2xyi=a+ib$ 知

$$\begin{cases}x^2-y^2=a,\\2xy=b,\end{cases}$$

解得

$$x=\pm\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}},$$

$$y=\pm\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}.$$

当 $b>0$ 时，x、y 取符号相同的两组值；当 $b<0$ 时，x、y 取符号相反的两组值.

例 2　求下列复数的模和幅角：

1）$z=\dfrac{-3-2i}{5+4i}$；2）$z=\dfrac{1-2i}{3-4i}-\dfrac{2-i}{5i}$.

解 1）

$$|z|=\frac{|-3-2i|}{|5+4i|}$$

$$=\frac{\sqrt{(-3)^2+(-2)^2}}{\sqrt{5^2+4^2}}=\sqrt{\frac{13}{41}}.$$

为了求幅角，我们算出

$$z=\frac{-3-2i}{5+4i}=\frac{(-3-2i)(5-4i)}{(5+4i)(5-4i)}$$

$$=\frac{(-15-8)-(10-12)i}{5^2+4^2}$$

$$=\frac{-23}{41}+\frac{2}{41}i,$$

这个复数位于第二象限，所以

$$\operatorname{Arg} z=\pi+\operatorname{arctg}\frac{\frac{2}{41}}{\frac{-23}{41}}+2k\pi$$

$$=-\operatorname{arctg}\frac{2}{23}+(2k+1)\pi$$

$$(k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \cdots).$$

2) $|z|=\dfrac{8\sqrt{5}}{25}$.

先算出

$$z=\frac{(1-2i)(3+4i)}{3^2+4^2}-\frac{(2-i)(-5i)}{5^2}$$

$$=\frac{11-2i}{25}+\frac{5+10i}{25}$$

$$=\frac{16}{25}+\frac{8}{25}i,$$

此复数在第一象限，可见

$$\operatorname{Arg} z=\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+2k\pi \quad (k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \cdots).$$

例 3 将下列复数化为三角表示式：

1) $-3-2i$;　　2) $\sin\frac{\pi}{3}-i\cos\frac{\pi}{3}$;

3) $1+\sin 1+i\cos 1$.

解　1) $\because$　$|-3-2i|=\sqrt{13}$,

$$\arg(-3-2i)=\operatorname{arctg}\frac{2}{3}-\pi,$$

$$\therefore\quad -3-2i=\sqrt{13}\left[\cos\left(\operatorname{arctg}\frac{2}{3}-\pi\right)+i\sin\left(\operatorname{arctg}\frac{2}{3}-\pi\right)\right].$$

2) **解法一**　$\because$　$\arg\left(\sin\frac{\pi}{3}-i\cos\frac{\pi}{3}\right)$

$$=\operatorname{arctg}\left(\frac{-\cos\frac{\pi}{3}}{\sin\frac{\pi}{3}}\right)=-\frac{\pi}{6},$$

$$\therefore\quad \sin\frac{\pi}{3}-i\cos\frac{\pi}{3}=\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right).$$

解法二　鉴于 $\sin\frac{\pi}{3}-i\cos\frac{\pi}{3}$

$$=\cos\frac{\pi}{6}-i\sin\frac{\pi}{6}$$

$$=\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right),$$

最后的形式即是此复数的三角表示式.

3) $\because$　$(1+\sin 1)^2+\cos^2 1$

$$=2(1+\sin 1)$$

$$=2\left[1+\cos\left(\frac{\pi}{2}-1\right)\right]$$

$$=4\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\right),$$

又 $$\frac{\cos 1}{1+\sin 1}=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-1\right)}{1+\cos\left(\frac{\pi}{2}-1\right)}$$

$$=\frac{\sin\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-1\right)}{\cos\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-1\right)}=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\right),$$

$1+\sin 1>0$,

$\therefore\quad 1+\sin 1+i\cos 1$

$$=2\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\right)\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\right)\right].$$

例 4 计算：

1) $(1+\sqrt{3}i)^{-3}$； 2) $(-2)^{\frac{2}{5}}$.

解 1) 解法一 $\because\quad (1+\sqrt{3}i)^3=1+3\sqrt{3}i$

$$+3(\sqrt{3}i)^2+(\sqrt{3}i)^3=-8,$$

$\therefore\quad (1+\sqrt{3}i)^{-3}=-\dfrac{1}{8}$.

解法二 $(1+\sqrt{3}i)^{-3}=\left[2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)\right]^{-3}$

$$=\frac{1}{8}[\cos(-\pi)+i\sin(-\pi)]$$

$$=-\frac{1}{8}.$$