

# 湍流计算模型

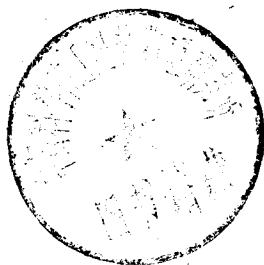
陈义良 编著

中国科学技术大学出版社

52.74  
287

# 湍流计算模型

陈义良 编著



中国科学技术大学出版社

1991·合肥

**102933**

# 湍流计算模型

陈义良编著

\*

中国科学技术大学出版社出版

(安徽省合肥市金寨路96号 邮政编码: 230026)

中国科学技术大学出版社计算机排版

中国科学技术大学印刷厂印刷

安徽省新华书店发行

\*

开本:  $850 \times 1168 / 32$  印张: 6.75 字数: 179 千

1991年5月第1版 1991年5月第1次印刷

印数: 1-3000 册

ISBN7-312-00267-6/O·92 定价: 3.50 元

## 内 容 简 介

本书比较系统地讨论了建立湍流模型的理性方法：首先提出建立通用湍流模型必须遵循的原则，然后用这些原则作为约束条件，运用数学工具，并对照实验观察和测量数据，给出工程上实用的计算模型。由于二阶矩模型考虑的物理过程比较多，有较大的通用性，所以书中着重介绍了二阶矩方程中各个物理过程数学模型的建立过程，同时也对一阶模型进行了分析和改进。本书可供在流体力学、工程热物理、航空航天、大气物理、海洋工程、化工和冶金等领域从事湍流计算和湍流理论的教学和研究人员参考，也可做为有关专业的教学参考书。

2198/03

## 序

湍流模拟是流动，传热传质与燃烧模拟中最基本的问题。湍流是流体力学中至今尚未很好解决的难题，但在工程应用中必须找出实用的模拟方法。近年来广泛应用的  $k-\varepsilon$  模型虽然在很多情况下能给出近似符合实际的结果，但其中仍然使用了 Boussinesq 的线性本构关系及标量的粘性系数观念，无法考虑浮力与离心力在不同方向上的不同作用，因而在应用于浮力分层流，强旋流等强烈各向异性的湍流流动时，会造成很大误差，甚至定性上失真。即使采用 Richardson 修正，效果也不好。基于这一情况，人们正在寻找更合理的湍流模型。目前一部分研究者正在从事湍流的直接模拟，即在小尺度网格内直接求解三维瞬态的 N-S 方程，以及大涡模拟，即在大尺度网格内直接求解 N-S 方程而在小尺度（亚网格尺度）内用模拟假设。然而这两种方法所需计算存储量及耗费非常之大，尚无法用于实际工程问题，而且工程中也不关心湍流的产生与发展的细节。因此最近的将来仍然是寻求从雷诺时均方程出发，对其中关联矩加以封闭，同时能兼顾到通用性及经济性的工程上能接受的办法。二阶矩封闭中的雷诺应力输运方程模型及其简化形式的代数应力模型在旋转流及浮力流中的应用已表明它优于  $k-\varepsilon$  模型，但其中一些项的模拟，如压力——应变项的模拟是有争议的，有人认为与可实现性有矛盾，因而仍须改善。

本书系统地讨论了建立湍流模型的理性方法。即宏观特性在数学及物理上的约束条件所规定的模型必须遵循的原则，特别是坐标系变换时的不变性原则和可实现性原则，以及把这些原则用于改善二阶矩模型中压力——应变项，扩散项及耗散项的模拟，和用于一阶矩模型中直接建立更通用的应力与应变（速度梯度），热流与温度梯度间本构关系。这是改善湍流模型的重大方向性问题。本书作者多年来在国内外从事湍流流动及湍流燃烧数值模拟的研究，在这方面造诣很深，有很多独到的见解。目前无论在国内外都还缺乏专

门由理性力学方法的角度讨论湍流模型的专著。因此本书的出版将填补这方面的空白。无疑地，本书将有助于广大读者更深入地了解近代湍流模拟理论的若干重大问题，也为数值模拟工作者提供了如何改善工程湍流模型的新途径。我们希望，本书的出版能够使我国在发展、研究与应用湍流流动的工程模拟方法上达到更先进的水平。

周 力 行

1990年12月25日

于北京清华园

# 前 言

这本书是根据作者在中国科学技术大学为研究生开设的“湍流分析”课讲稿整理而成的。本课程的宗旨有两条：(1) 介绍用理性方法建立湍流模型的思路；(2) 通过几个重要湍流模型的建立，对湍流中各向同性化、快速应变、湍流输运和耗散等几个重要过程进行比较详细的分析。

湍流是一个随机的非线性过程，目前尚无完善的理论。近三十年来，随着高速计算机的发展，用建立湍流模型并上机计算的方法获得了很大的进展，为湍流理论在工程上的应用开辟了广阔的前景，也促进了湍流机理的深入研究。有人把湍流模型与原子结构的卢瑟福模型进行比较，虽然两者都不一定很完善，但却很有用。而且发展成完全湍流理论的机会也比其它方法大。

60年代末，人们提出仿照理性力学的方法建立湍流模型，经过20多年的发展，目前已逐渐形成一个理论分支，并取得了很大的成功。这个方法，首先是提出建立通用湍流模型必须遵循的一些原则，然后用这些原则作为约束条件，运用数学工具，并对照实验观察和测量数据给出工程上实用的模型。文献上有时把这个方法称为理性方法，或不变性模型方法。国内很多单位都开展了湍流的计算工作，并且发现很多模型不太通用或不甚精确，亟待改进或建立新的模型。本书介绍的方法可以为他们提供一个改进和建立自己模型的思路。

建立湍流模型的理性方法本质上是一个唯象的方法。在建立湍流模型的过程中需要我们对湍流机理有比较清晰的认识，这样才能对湍流中影响某个过程的因素有中肯的分析。尤其是模型中的常数有待于将一般的函数关系与实验观察和测量数据进行比较才能确定。但是湍流是一个很复杂的物理现象，至今仍有很多问题未被人们所认识。随着学科的发展，不断有新的现象发现，不断有新概念

和新方法的提出。毫无疑问，在薄薄的一本小册子中不可能牵涉到湍流学科的所有方面，尤其是作者本人，仅仅是湍流学科的初次涉足者，对湍流的认识很肤浅，很难对湍流这么大的领域有全面地、系统地介绍，因而这本书的内容必然是很局限的。

在本书编写的过程中得到了清华大学周力行教授和科学出版社李雪芹同志的热情鼓励和支持，得到了中国科学技术大学周光泉教授和张泰永教授的热情鼓励和推荐。在此对他们表示衷心的感谢。同时也要感谢听过湍流分析课的历届研究生，他们对课程的内容提出了许多宝贵的意见，并积极鼓励和支持将讲稿整理出来。最后也要对中国科学技术大学工程热物理系所有同事给予的积极支持表示感谢。

作者水平有限，书中难免有缺点和不妥之处，恳切希望得到批评和指正。

本书由中国科学技术大学科技情报系机房用计算机排版，该系的学生梁勤、朱战备完成了本书大量的数学公式的排版工作，在此表示诚挚的谢意。

作 者

1991 年 5 月

# 目 录

|                                            |           |
|--------------------------------------------|-----------|
| 序 .....                                    | 周力行 ( 1 ) |
| 前言 .....                                   | ( 3 )     |
| 第一章 引言 .....                               | ( 1 )     |
| 1.1 历史背景 .....                             | ( 1 )     |
| 1.2 发展湍流模型的理性方法 .....                      | ( 4 )     |
| 1.3 本课程的内容 .....                           | ( 7 )     |
| 第二章 湍流统计矩的精确方程 .....                       | ( 8 )     |
| 2.1 平均量的方程 .....                           | ( 8 )     |
| 2.2 二阶统计矩的方程 .....                         | ( 10 )    |
| 2.3 耗散率的方程 .....                           | ( 16 )    |
| 2.4 脉动压力的泊松方程 .....                        | ( 20 )    |
| 第三章 通用湍流模型必须遵守的原则 .....                    | ( 22 )    |
| 3.1 引言 .....                               | ( 22 )    |
| 3.2 不变性函数理论 .....                          | ( 24 )    |
| 3.2.1 不变量和 Cayley—Hamilton 定理 .....        | ( 24 )    |
| 3.2.2 由数个张量组成的系统中独立不变量的数目 .....            | ( 28 )    |
| 3.2.3 满足不变性原理的张量函数形式 .....                 | ( 32 )    |
| 3.3 可实现性条件 .....                           | ( 37 )    |
| 3.3.1 雷诺应力的可实现性条件 .....                    | ( 37 )    |
| 3.3.2 其它参数的可实现性条件 .....                    | ( 43 )    |
| 3.4 标量线性迭加原理的讨论 .....                      | ( 46 )    |
| 第四章 均匀湍流中各向同性化过程的模型 .....                  | ( 50 )    |
| 4.1 雷诺应力各向同性化过程的模型 .....                   | ( 52 )    |
| 4.1.1 各向异性张量的不变量与湍流结构 .....                | ( 55 )    |
| 4.1.2 根据实验结果确定的函数 $\beta$ 和 $\gamma$ ..... | ( 62 )    |
| 4.2 标量通量各向同性化过程的模型 .....                   | ( 74 )    |

|                                          |       |
|------------------------------------------|-------|
| 第五章 快速项的模型 .....                         | ( 79) |
| 5.1 脉动压力的相关项 .....                       | ( 80) |
| 5.2 雷诺应力积分的模型 .....                      | ( 84) |
| 5.3 温度通量积分的模型 .....                      | ( 98) |
| 5.4 温度方差积分的模型 .....                      | (101) |
| 第六章 湍流输运项的模型 .....                       | (105) |
| 6.1 特征函数和累积量 .....                       | (108) |
| 6.2 矩产生函数 $F$ 的模型方程 .....                | (114) |
| 6.3 矩产生函数方程的数量级分析 .....                  | (120) |
| 6.4 压力输运项的模型 .....                       | (125) |
| 6.5 零阶的输运模型 .....                        | (131) |
| 6.6 平均速度梯度和浮力的修正 .....                   | (133) |
| 第七章 耗散率方程的模型 .....                       | (144) |
| 7.1 $\psi$ 的模型 .....                     | (145) |
| 7.2 $\psi_\theta$ 的模型 .....              | (152) |
| 7.2.1 平衡衰变中的时间尺度比 $\tau$ .....           | (153) |
| 7.2.2 平均温度梯度等于零时 $\psi_\theta$ 的模型 ..... | (157) |
| 7.2.3 平均温度梯度为常数时 $\psi_\theta$ 的模型 ..... | (164) |
| 7.3 耗散率方程中湍流输运项的模型 .....                 | (166) |
| 7.3.1 湍流动能耗散率的输运模型 .....                 | (166) |
| 7.3.2 温度方差耗散率的输运模型 .....                 | (171) |
| 第八章 一阶矩模型 .....                          | (176) |
| 8.1 本构关系存在的条件 .....                      | (176) |
| 8.2 雷诺应力与平均速度梯度之间的本构关系 .....             | (179) |
| 8.3 湍流热量的张量系数模型 .....                    | (188) |
| 8.4 逆梯度输运的现象 .....                       | (194) |
| 参考文献 .....                               | (200) |



# 第一章 引言

## 1.1 历史背景

湍流流动的瞬时速度场是遵守 Navier-Stokes 方程的。和其它具有三个以上自由度的系统一样，N-S 方程具有奇异吸引子。也就是说，当初始和边界条件给定时，方程的解呈现出很复杂的、非周期、准随机的特性。在精确的数值模拟中，我们可以得到瞬时解的细节，但是瞬时解对初始和边界条件的微小变化相当敏感。平均参数与瞬时值不同，它对初边条件的变化不是很敏感。从实用观点看，我们一般只是对是否能计算出平均速度，平均的动量通量（阻力），以及脉动速度的方差等感兴趣。当湍流中包含有能动的或被动的夹带物时，也是如此。

只有在雷诺数比较小的时候，才有可能对湍流作精确的数值模拟。当雷诺数增大时，大小涡旋的尺度比迅速增加，所需的计算机容量很快超过在最近的将来最大计算机所能达到的容量。在雷诺数比较大时，我们可以对大尺度湍流进行精确的数值模拟，对小尺度运动则采用模型，这就是大涡模拟的方法。如果流动在其中的一个空间坐标方向（或时间坐标）上是统计均匀（或统计定常的），我们可以在均匀（或定常）的坐标方向上进行平均求得统计量，求解统计平均量是解决工程实际问题中，经费上可以允许的一种方法。如果流动无法在任何一个坐标上进行平均，则为了给出样本的一个系综，我们平均进行大量的计算，其花费超过了工程实际所允许的范围。

在工程设计中，我们对瞬时流场不感兴趣，甚至对大尺度湍流

402033

的精确数值模拟也不太关心，因此在工程的实际计算中发展了各种不同的湍流模型。19 世纪的后半期，Boussinesq 提出用大大增加层流粘性系数（称为涡旋粘性系数）的方法，来模拟湍流流动，涡旋粘性系数的数值用实验办法确定。当然，由于湍流涡旋输运动量及其它量的机理与分子运动输运这些量的机理不同，所以即使是湍流的平均特性，也与 Boussinesq 提出的模型流动不同。但是，由于质量、动量和能量的守恒方程用选定的流场进行了标定，由方程给出的动量、热等的总体输运特性是正确和可实现的。也就是说，体现在涡旋粘性系数假定中的牛顿型本构关系是满足热力学原理的，保证了所得的结果在物理上是合理的。当然，方程中不可能包含与过程有关的所有物理机理，比如在涡旋粘性系数中不可能包含浮力的影响，因此用它来描述浮力起主导作用的流场时，是不可能成功的。但是如果流动的物理过程与用作标定的基准流场类似，参数值也比较接近，则所得结果也不会有太大的误差。这个方法目前得到广泛的应用。在许多实际感兴趣的流场中，平均流动的惯性起了主要作用，湍流输运的影响比较次要，在这种情况下，用涡旋粘性系数方法模拟湍流运动，可以获得比较满意的结果。也就是说，湍流输运可以在不明显改变平均流动的条件下，用其它任何能够输运相同动量和热的机理代替。

但是湍流的机理是很复杂的，很难把它们归纳在一个涡旋粘性系数内。在有的流动中，湍流本身起了主导作用，又同时存在几个产生湍流的机理（如剪切和浮力）。比如涡轮叶片上的湍流换热，用钠冷却的核反应堆在发生意外时产生的过程等就属于这类流动。因此，人们继续对湍流作深入地研究，不断构造出更加精细的模型。在这类模型中包含的物理过程比简单的涡旋粘性系数模型更多。在这个领域比较活跃，并作出重大贡献的，在第二次世界大战以前的有 Von Karman, Prandtl 和 Taylor, 在 60 年代中期以前的有 Kolmogorov, 周培源, Rotta 和 Davidov 等人。但这个时期的工作，由于缺乏大容量、高速的计算机，进展比较缓慢，很多想法

未能实现。最近一个时期的工作是 Donaldson 和 Spalding 从 60 年代后期开始的。对 Boussinesq 模型最早的修正是保留涡旋粘性系数的概念，但用计算办法给出它的数值。根据湍流理论，涡旋粘性系数与湍流特征长度和特征速度的乘积成正比。Kolmogorov 提出，作为一级近似，湍流可以用局部的单一长度尺度  $l$  和速度尺度  $u$  表征。以后 Launder 和 Spalding 构造出湍流动能平均值  $k$  和湍流能耗散率平均值  $\varepsilon$  的方程，求解这两个方程，并利用关系式  $2k = 3u^2$ ， $\varepsilon = u^3 / l$  就可以得到涡旋粘性系数的值。这个模型虽然也受到前面所说的涡旋粘性系数模型的各种限制，但在实际中获得了广泛的应用，在构造湍流动能和耗散率的模型方程时，其中的湍流输运项、耗散率的产生和破坏过程需要模拟。这些模型在许多简单流动中是近似满足的，但仍有许多问题，尤其是  $\varepsilon$  的方程需要进一步完善。事实上，在我们以后讨论的有模型中， $\varepsilon$  方程的模型是最不成熟的一个模型。在  $k-\varepsilon$  模型中，为了考虑浮力，流线曲率等对涡旋粘性系数的影响，提出了各种各样的修正。只要湍流输运不是流动中的控制过程，流动的几何结构和参数值都与用作标定的流场差不多，则上述修正在许多情况下都是适用的。但是，如果将根据弯曲边界层中提出的修正应用到比如有旋流动中，而且标量在径向的湍流输运又很重要（比如燃气轮机燃烧室），则修正不适用。

为了在模型中包含更多物理过程的影响，Donaldson 提出采用二阶统计矩的模型。在等温流动中，除了  $\varepsilon$  方程以外，再建立雷诺应力  $\overline{u_i u_j}$  中 6 个独立分量的方程。作为中间阶段，可以令

$$\overline{q^2} \frac{D}{Dt} \overline{u_i u_j} = \overline{u_i u_j} \frac{D}{Dt} \overline{q^2}$$

其中  $D/Dt$  是沿着瞬时流线物质导数的平均值，也就是说，包括沿着平均流线的物质导数和脉动速度引起的湍流输运。 $\overline{q^2}$  是单位

质量湍流动能平均值的两倍。利用这个假定可以推出雷诺应力张量  $\overline{u_i u_j}$  的代数方程。这个式子比涡旋粘性系数模型稍有改进，通常称为雷诺应力代数方程模型。

完全的二阶模型需要建立起所有二阶统计矩的输运微分方程。比如，包含热和水蒸汽的三维大气流动，除平均速度、平均温度、平均湿度和平均压力以外，还需要有控制雷诺应力、热通量、湿气通量、湿度-温度相关等等参数的 22 个方程。在这些方程中，除了应变量（二阶矩）以外，还出现了各种不同的其它项，为了使方程组封闭，所有这些新出现的项都需要模拟。除此之外，湍流动能耗散率和温度方差耗散率等几乎整个方程都需模拟。需要模拟的项很多，构造模型所需遵循的原则和方法也远没有搞清楚。因此，往往出现这样的情况，当用一阶模型（涡旋粘性系数模型）和二阶模型求解同一个问题时，二阶模型所得的结果不一定比一阶模型结果好。在构造各种不同的模型时，引进的误差可能相当大，抵消了在方程中包含更多精确物理过程带来的好处。但是也有许多情况，用一阶模型根本无法求解，而用二阶模型可以给出非常满意的结果。比如，在由浮力引起的大气混合层（无风速应变）中，用二阶模型可以计算出最高三阶的统计矩，误差都在实验范围之内。而用涡旋粘性系数模型根本无法处理。

偶然也有采用三阶模型的，求解的是三阶统计矩的微分方程，但是因为独立的三阶统计矩比独立的二阶统计矩多得多，因此除了很特殊的流场之外，三阶矩模型都相当复杂。

## 1.2 发展湍流模型的理性方法

研究湍流所用的方法，在许多方面都与研究非牛顿流体时所用的方法类似。在研究非牛顿流体时，有一个学派主张通过对微观结构的仔细分析，给出非牛顿流体宏观的特性。另外一个学派则基本不考虑其微观结构，主张通过找出宏观特性所必须满足的数学物理

上的约束条件，把未知的因素减少到很少几个未知的函数，这类函数与几何结构无关，可以用实验办法确定。这种方法称作理性力学的方法。属于这个学派的有 Stokes, Navier, Truesdell, Rivlin, Ericksen, Coleman 和 Noll 等人。

湍流理论的发展也大致相同。比较正统的一个学派试图通过仔细分析脉动的物理过程，来了解湍流的宏观特性。属于这个学派的有 Taylor, Kalmogorov, Batchelor, Corrsin, Kraichnan, Edwards 等人。另外一个不太正统的学派，试图用半经验的方法构造出宏观的模型。属于这个学派的大多是工程人员，以及从事气象学和海洋学研究的人员。他们希望用计算方法给出湍流对有关过程的影响。在后一个学派中，很多人主张采用理性力学的方法来建立湍流模型。因为我们的目的是要发展比较通用的湍流模型，因此首先需要提出通用湍流模型所必须满足的数学和物理上的约束条件；然后运用这些条件，把未知的因素减少，给出通用模型的一般形式；最后用特定流场中的实验数据，确定出函数的具体形式。期望如此给出的模型有较大的通用性。

1968 年，Donaldson<sup>[1]</sup> 提出了不变性原理。认为当坐标系变换时，模型公式应保持不变，这是保证湍流模型有较大通用性的重要条件。如果构造的模型满足不变性原理，根据某个特定流场标定的模型，应用到其它流场时成功的可能性最大。1977 年，Schumann<sup>[2]</sup> 提出，湍流模型还必须满足可实现性条件，这个原则很快被很多作者采纳。这个条件是说物理量在极限状态下必须满足的性质。比如，假定物理量  $q(t)$  满足不等式：

$$q > 0$$

$q = 0$  是它的极限状态。如果在时刻  $t_1$ ， $q = 0$ ，则它随时间的变化率也必须等于零，否则在下一个时刻， $q$  将变成负值。用数学式子表示，可实现性条件可以写成：

$$\left(\frac{\partial q}{\partial t}\right)_{t=0} = 0$$

除上述两个条件之外，人们还提出了其它不同的原则。但有时根据这些原理，原则建立起来的模型，通用性仍不是很大，这说明目前通用湍流模型必须遵守一些什么样的原则还不是很清楚。当然通用性不大也与建立模型时所采用的假定有关。

以往在建立模型时，一般只是要求模型和待模拟的量在张量的秩，对称性和其它性质（如张量的迹等于零）相同，很少考虑湍流本身的动力学特性。我们在本书中介绍的各种模型，不仅保证了张量的性质，而且尽可能地使模型在雷诺数很大或很小，各向异性量很大或很小，以及接近均匀湍流中，满足湍流的动力学特性。在建立二阶统计矩的各种湍流模型时，我们直接把模型表示成对均匀，定常湍流的展开。在均匀湍流中（甚至有均匀的应变率存在时），大尺度的脉动近似满足正态分布，因此要求模型给出的结果，在非均匀性因素消去后能弛豫到正态分布。对均匀定常状态的展开意味着湍流的长度尺度和平均运动非均匀性的长度尺度之比、湍流的时间尺度和平均运动演变的时间尺度之比很小。这实质上是分子动力学中采用一种近似。但在实际湍流中测出的这两个尺度比，其数量级都是 1，并不是很小（在风洞湍流中，均匀湍流和平均运动的均匀应变率可以用不同的机理产生，在实际湍流中，湍流结构和平均运动的非均匀性是由同一个机理产生的）。那么，我们要问，为什么用这个方法建立起来的模型能够反映实际湍流？或者说，虽然展开参数的数量级是 1，为什么能够象小参数展开那样，只取头几项呢？我们可以作这样的解释：在下面我们用理性方法建立起来的各种过程，可能并不完全是实际湍流。但它同样满足动量守恒和能量守恒；动量和能量的输运机理和实际湍流可能不同，但输运的量相同；同时因为满足可实现性条件，非零物理量不会变成小于零，

Schwarz 不等式总能满足;在雷诺数很大或很小时的特性与实际湍流相同, 在极限条件(弱非均匀性和弱非定常)下趋近于实际湍流。也许满足所有这些约束条件的机理, 在特性上都相同。根据实验数据确定模型系数实质上是控制输运的量。

在湍流的单点统计矩模型中, 除了需对湍流脉动的几率密度函数进行假定以外, 还需假定湍流的谱可以用大尺度的参数唯一表征, 给定大尺度的参数和雷诺数以后, 湍流谱的整个形状也就确定了。也就是说, 假定湍流的所有统计特性都是由大尺度脉动和雷诺数确定的。这个假定要求, 湍流有足够的时间使之和谐空间中的大尺度脉动达到平衡, 或者说大尺度脉动的变化比较慢, 小尺度脉动可以与之保持平衡。这个假定也意味着, 边界和初始条件对当前状态没有直接的影响, 若没有这个假定, 还须引入一个或几个其它参数。

### 1.3 本课程的内容

首先介绍用理性方法建立湍流模型的一些基本原理, 及有关的数学工具, 我们引用的数学工具主要是张量的不变性理论, 在讨论湍流的输运模型时, 还要用到随机变量特征函数等概念。

然后用基本原理构造出湍流中各个过程的模型。前面已经提到, 目前应用比较广泛的是一阶模型和二阶模型。在二阶模型中包含的物理过程比较多, 我们选用二阶模型作为例子进行重点讨论。主要讨论压力——应变项、湍流输运项和耗散过程的模拟。在一阶模型中, 主要是对由脉动速度引起的动量和标量的输运过程进行模拟, 我们还就如何用理性方法对这些模型进行完善作简单讨论。