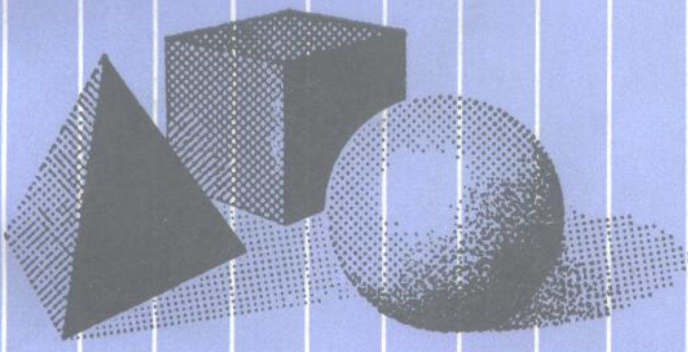
高等学校教材

主　编　蒋大为

# 空间解析几何



西北工业大学出版社

高等学校教材

# 空间解析几何

蒋大为 主编

蒋大为 郑界庸 张永曙 编

西北工业大学出版社

1992年5月 西安

(陕)新登字第 009 号

【内容提要】 本书系统介绍了空间解析几何的基本内容。除了包括向量代数、空间平面、空间直线、坐标变换、常见曲面及二次曲面等内容以外，还增加了图形变换、参数曲线和曲面、空间解析几何在实际中的应用等内容，可供读者选学。

本书主要适用于应用数学专业开设的基础课，可作为理工科大学有关专业的基础课教材或教学参考书。



高等学校教材
空间解析几何
主 编 蒋大为
责任编辑 王夏林
责任校对 樊小力

西北工业大学出版社出版
(西安市友谊西路 127 号)
陕西省新华书店发行
西北工业大学出版社印刷厂印装
ISBN 7-5612-0347-0 / O·41(课)

*

开本 850×1168 毫米 1/32 10.25 印张 247 千字
1992 年 5 月第 1 版 1992 年 5 月第 1 次印刷
印数：1-1 500 册 定价：2.72 元

# 前　　言

本教材是在应用数学、应用力学等理科专业使用多遍的基础上，根据理工科大学应用数学专业教学大纲的要求，重新修改而成的。

本书系统讲述了空间解析几何的基本内容。其中，我们将向量及其有关内容独编一章，这样做无疑会使读者更系统地掌握向量这个有用的工具。为了使讲授的内容更具有一般性，本书大部分章节中的内容都适合于仿射坐标系，仅把那些涉及度量性质的部分，限定在直角坐标系下讨论。

本书是在读者已掌握了平面解析几何内容的基础上编写的。在编写中，我们注意到几何与代数之间密切的联系。在突出几何特征的前提下，简单介绍一些必要的线性代数知识，这一做法不会影响读者对几何的理解。为了使读者全面掌握平面解析几何的内容，将二次曲线一般理论的内容安排在附录中，作为平面解析几何内容的补充，供读者参考。

本书在内容取舍方面，除了保留空间解析几何所必须的内容外，还增加了图形变换、参数曲线和曲面、以及解析几何在科学技术中的应用实例等内容，可供读者选学。

为了提高读者分析问题、解决问题的能力，在引入新概念的同时，注意讲清物理背景。对一些典型的方法，给出一些实例分析，便于读者掌握和加深理解。在每章后面备有足够数量的习题，完成这些习题，对掌握本课程内容、提高分析问题的能力有着非常重要的作用。

本书的编者系西北工业大学数学系教师。蒋大为任主编，对

全书进行了修改、补充和定稿。郑界庸编写第一、二、三、四章，张永曙编写第五、七、十章，蒋大为编写第六、八、九章及附录。

由于我们的水平所限，书中难免出现错误或不妥之处，诚望读者批评指正。

编　者

1991年10月

# 目　录

# 第一章　空间直角坐标系

在平面解析几何里，我们曾经建立了平面直角坐标系，使平面内的点和一对有序实数建立起一一对应的关系。在此基础上，将平面内的曲线（包括直线）与二元方程之间建立了对应关系，从而可以利用代数方法来解决几何问题。这样就构成了平面解析几何的基本思想。所用的数学方法就是坐标法。由于坐标法的运用，丰富了平面几何的内容，并且解决了大量平面几何的问题。

空间解析几何是研究空间中的几何问题。所用的方法有两种，一是坐标法，另一种是向量方法，向量方面的知识在第二章重点论述。

在本章里，首先建立空间直角坐标系，然后利用坐标系建立空间两点的距离公式及讨论空间点的简单轨迹。为了简便，空间仿射坐标系的内容将在第五章讨论。

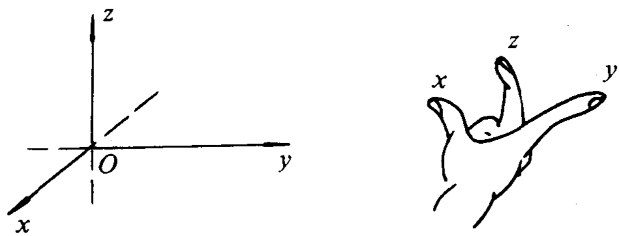
## §1.1　空间直角坐标系

### 1. 坐标系的建立

在空间，选定一点，记为点 $O$，通过点 $O$ 引三条互相垂直的直线，并确定一个单位长度作为直线上的度量单位。当选定三条直线的正方向之后，这三条直线便成为坐标轴，并记为 $Ox$，$Oy$，$Oz$。这样，就建立了一个空间直角坐标系，用 $O—xyz$ 表示，点 $O$ 称为坐标原点，三条坐标轴分别称为 $Ox$ 轴（或 $x$ 轴）、$Oy$ 轴（或 $y$ 轴）及 $Oz$ 轴（或 $z$ 轴）。

如果将 $Ox$，$Oy$，$Oz$ 三条坐标轴分别与右手的姆指、食指

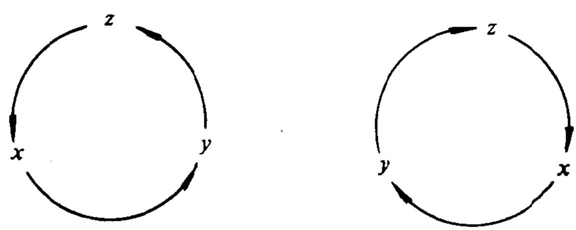
和中指张开后形成的指向相对应（见图 1.1），这样的坐标系称为右手系。另外，从 $Oz$ 轴的正方向朝坐标系的原点 $O$ 看去，$Ox$ 轴与 $Oz$ 轴的顺序是逆时针的方向。右手系中的坐标轴顺序循环轮换，永远是按逆时针的方向来排列次序的，如图 1.2（$a$）所示。




右手系

图 1.1

类似地，若将三个互相垂直的坐标轴 $Ox$，$Oy$，$Oz$ 的正方向，分别与左手系的姆指、食指和中指的指向相对应，这样所构成的空间直角坐标系 $O—xyz$，称为左手系，而且坐标系中坐标轴的顺序是按顺时针的方向来排列的，如图 1.2（$b$）所示。除非特别声明，在本教材中总规定坐标系是右手系，所讨论的问题也总是在右手系下建立起来的。




($a$) ($b$)

图 1.2

在坐标系 $O-xyz$ 中，每两个坐标轴可确定一个平面，称为坐标面，显然共有三个坐标面，它们彼此垂直且交于原点 $O$。垂直于 $Ox$ 轴的称为 $yOz$ 平面；垂直于 $Oy$ 轴的称为 $zOx$ 平面；垂直 $Oz$ 轴的称为 $xOy$ 平面。

**2. 空间点的坐标**

在坐标系 $O-xyz$ 中，对于空间任一点 $P$，可由坐标系下的坐标表示出来。通过点 $P$ 向三个坐标平面做平行的平面，由于过一点做已知平面的平行平面是唯一的，它们与三坐标轴 $Ox$，$Oy$，$Oz$ 依次交于 $A$，$B$，$C$ 三点（见图 1.3）。于是，空间的点 $P$，可由 $A$，$B$，$C$ 三点唯一确定下来。若 $A$，$B$，$C$ 三点在三坐标轴 $Ox$，$Oy$，$Oz$ 上的坐标分别用 $x$，$y$，$z$ 表示，这样，点 $P$ 可以用有序数组（$x$，$y$，$z$）唯一地表示出来，有序数组（$x$，$y$，$z$）称为点 $P$ 的坐标，记为 $P$（$x$，$y$，$z$）。

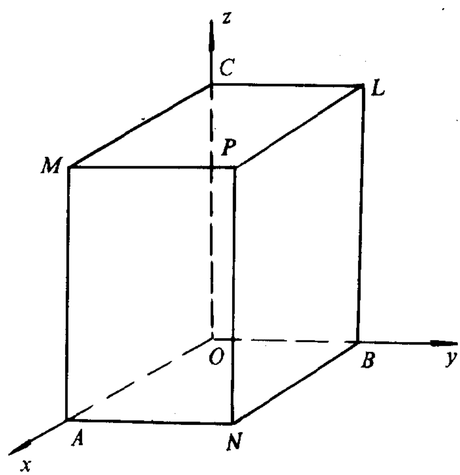



图 1.3

另一方面，给定一数组（$x$，$y$，$z$），空间总有唯一的一

点，该点的坐标是（$x$，$y$，$z$）且记该点为 $P$。这是因为，三个数 $x$，$y$，$z$ 依次是坐标轴 $Ox$，$Oy$，$Oz$ 上的三个点的坐标，通过其三点依次做平行于坐标系的三个平面 $yOz$，$zOx$，$xOy$ 的平面，显然这三个平面互相垂直，必交于一点，该点就是点 $P$。这样就证明了在空间直角坐标系下，空间任一点 $P$，与有序数组（$x$，$y$，$z$）建立一一对应的关系，并且有序数组（$x$，$y$，$z$）就是点 $P$ 的坐标。

对于空间的几何图形（如曲线、直线、平面、曲面等），可以看成是空间内点的集合，于是一般可由三元方程 $F(x, y, z)=0$ 建立起对应关系，这就是本教材要讨论的问题。

### 3. 卦限

在坐标系 $O\text{-}xyz$ 中，由三个坐标平面将空间分成八个子空间，这些子空间称为坐标系的卦限，除坐标面和坐标轴上的点外，空间任一点均属于八个卦限之一，这样由卦限内点的坐标 $x$、$y$、$z$ 的符号，将八个卦限排成一定的顺序，且习惯用罗马数字Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ，Ⅳ，Ⅴ，…，Ⅷ来表示卦限的编号，八个卦限与点坐标关系由表 1.1 列出。

**表 1.1**

| 符号 ＼ 卦限<br>坐标 | Ⅰ | Ⅱ | Ⅲ | Ⅳ | Ⅴ | Ⅵ | Ⅶ | Ⅷ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | + | − | − | + | + | − | − | + |
| $y$ | + | + | − | − | + | + | − | − |
| $z$ | + | + | + | + | − | − | − | − |

**[例 1.1]** 设点 $P(a, b, c)$在第Ⅰ卦限，求该点与三个坐标

面、三个坐标轴及原点 $O$ 对称的点的坐标。

**[解]** 点 $P$ 关于坐标面、坐标轴及原点 $O$ 的对称点的坐标，解答如表 1.2 所示。

**表 1.2**

| 坐标 | 对称于 | 对称点坐标 |
|---|---|---|
| $(a, b, c)$ | $yOz$ 平面 | $(-a, b, c)$ |
| | $zOx$ 平面 | $(a, -b, c)$ |
| | $xOy$ 平面 | $(a, b, -c)$ |
| | $Ox$ 轴 | $(a, -b, -c)$ |
| | $Oy$ 轴 | $(-a, b, -c)$ |
| | $Oz$ 轴 | $(-a, -b, c)$ |
| | 原点 $O$ | $(-a, -b, -c)$ |

## §1.2 两点间距离和简单轨迹

### 1. 空间两点间距离公式

在直 角坐标系 $O-xyz$ 下，已知两点 $P_1$（$x_1$，$y_1$，$z_1$）和 $P_2(x_2,y_2,z_2)$ 之间的距离可以由长方体的一条对角线的平方等于它的长、宽和高的平方和来确定。即将空间两点的连线作为长方体的一条对角线。其做法是：过点 $P_1$ 做三个平行于坐标面的平面，依次交坐标轴 $Ox$，$Oy$，$Oz$ 于 $A_1(x_1, 0, 0)$，$B_1(0, y_1, 0)$，$C_1(0,0,z_1)$；过点 $P_2$ 同样做三个平行坐标面的平面，分别交于 $A_2(x_2,0,0)$，$B_2(0,y_2,0)$，$C_2(0,0,z_2)$，如图 1.4 所示，这样六个平行平面构成一个长方体，它的三个棱长是

$$a=|x_2-x_1| \qquad b=|y_2-y_1| \qquad c=|z_2-z_1| \tag{1.1}$$

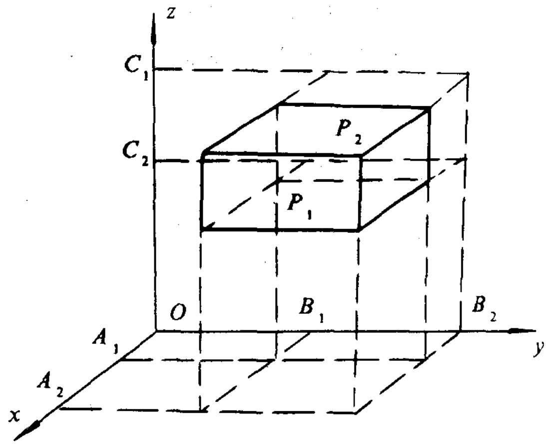



图 1.4

根据勾股定理，并令$\overline{P_1P_2}=d$，则有$d^2=a^2+b^2+c^2$，由此，两点$P_1$，$P_2$之间的距离公式为

$$\overline{P_1P_2}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2} \tag{1.2}$$

若空间点$P_1$与坐标原点$O$重合，可以得到点$P_2$到原点$O$的距离$d$，即

$$d=\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2} \tag{1.3}$$

另外，由式(1.2)可知，点$P_1$与点$P_2$之间距离为零($d=0$)的充要条件是

$$x_1=x_2, \qquad y_1=y_2, \qquad z_1=z_2$$

**2. 简单轨迹**

1) 方程$x=0$表示$yOz$平面

这是因为空间的点$(x, y, z)$的坐标中，$x$处处取0值的点$P(0, y, z)$在$yOz$平面上；反之，$yOz$平面上的点的坐标应

有 $x=0$。

2) 方程 $x^2+y^2+z^2=r^2(r>0)$ 是一个球心在原点 $O$ 的球面方程

事实上，空间一点 $P(x, y, z)$ 到坐标原点 $O$ 的距离是

$$\sqrt{x^2+y^2+z^2}=r$$

故有点 $P$ 的轨迹是一个球心在原点 $O$，半径为 $r$ 的球面。

3) 方程 $x^2+y^2=a^2(a>0)$ 是一个圆柱面方程

事实上，由于空间一点 $P(x, y, z)$ 到点 $Q(0, 0, z)$(在 $z$ 轴上)的距离是 $\sqrt{x^2+y^2}=a$，所以到 $z$ 轴的距离为 $a$ 的点 $P$ 的轨迹方程是 $x^2+y^2=a^2$，即以 $z$ 轴为中心轴，半径为 $a$ 的圆柱面方程。

【例 1.2】 求与 $z$ 轴和 $xOy$ 平面有相等距离的点的轨迹方程。

【解】 设点 $P(x, y, z)$ 为所求轨迹上任一点，由题意知

$$\sqrt{x^2+y^2}=|z|$$

化简为

$$x^2+y^2=z^2$$

或

$$x^2+y^2-z^2=0$$

是一个圆锥曲面方程。

## §1.3 线段的定比分点和坐标平移公式

### 1. 定比分点公式

平面解析几何中的线段定比分点的讨论，可以类似地推广到空间线段的定比分点，即定比分点公式，从下面推出。

**【定理 1.1】** 已知两点 $A(x_1, y_1, z_1)$，$B(x_2, y_2, z_2)$ 连成的线段记为 $AB$，在直线 $AB$ 上的分点 $P(x, y, z)$，当有

$$\frac{\overline{AP}}{\overline{PB}} = \lambda \qquad (\lambda \neq -1) \tag{1.4}$$

时，则

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}; \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, \quad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda} \tag{1.5}$$

**【证】** 在坐标系 $O-xyz$ 中，做线段$\overline{AB}$及分点 $P$，通过三点，$A$，$P$ 及 $B$ 分别做三个平面平行于 $yOz$ 坐标面，(分别截得 $Ox$ 轴上三点)$A_1$，$P_1$ 及 $B_1$，如图 1.5 所示。

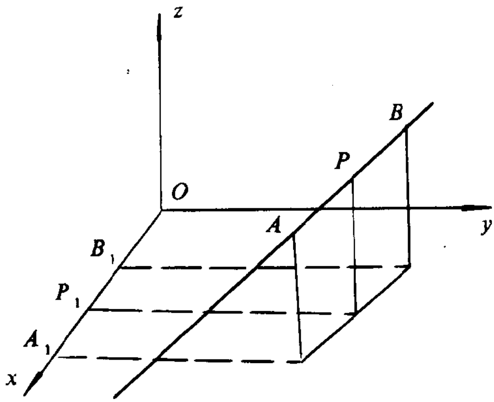



图 1.5

根据平行平面截得的线段的比例关系，设

$$\frac{\overline{A_1P_1}}{\overline{P_1B_1}} = \frac{\overline{AP}}{\overline{PB}} = \lambda$$

记$\overline{OA_1} = x_1$，$\overline{OP_1} = x$，$\overline{OB_1} = x_2$，得知线段

$$\overline{A_1P_1} = x - x_1, \quad \overline{P_1B_1} = x_2 - x$$

从而有

$$\frac{x_1 - x}{x - x_2} = \lambda$$

即 $$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda} \quad (\lambda \neq -1)$$

类似方法，可得出 $y$，$z$ 的坐标表达式：

$$y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}, \quad z=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda} \quad (\lambda \neq -1)$$

**【推论 1】** 当式 (1.4) 中 $\lambda=1$ 时，点 $P$ 是线段 $\overline{AB}$ 的中点，其坐标

$$x=\frac{x_1+x_2}{2}, \quad y=\frac{y_1+y_2}{2}, \quad z=\frac{z_1+y_2}{2} \tag{1.6}$$

事实上，若 $\frac{\overline{AP}}{\overline{PB}}=1$，即 $\overline{AP}=\overline{PB}$，那么代入坐标即得式 (1.6)。

**【推论 2】** 若点 $P$ 分线段 $\overline{AB}$ 为 $\lambda$，即

$$\lambda=\frac{\overline{AP}}{\overline{PB}}$$

则有：

(1) 当 $0 \leqslant \lambda < +\infty$ 时，点 $P$ 在 $\overline{AB}$ 线段内部，即点 $P$ 为 $\overline{AB}$ 的内分点。

(2) 当 $-\infty < \lambda < 0$ 时，点 $P$ 在 $\overline{AB}$ 线段的外部，即点 $P$ 为 $\overline{AB}$ 的外分点。

事实上，由图 1.6 所示，在式 (1.4) 及式 (1.5) 中，取不同的 $\lambda$ 值，容易得出上述两种结论。

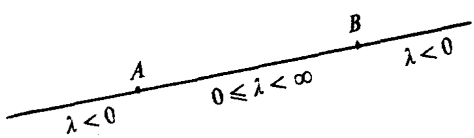



图 1.6