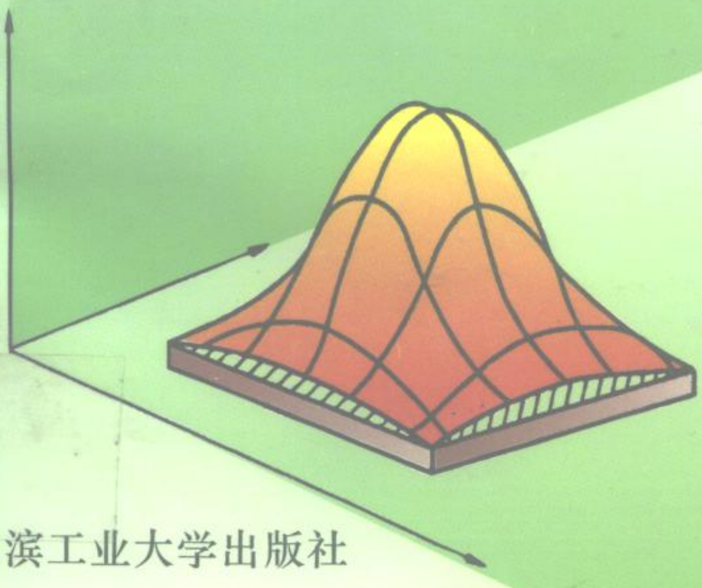
概率论与数理统计

曹彬　许承德　主编
陈桂林　王勇　关忠　副主编



哈尔滨工业大学出版社

概率论与数理统计

主　编　曹　彬　许承德
副主编　陈桂林　王　勇　关　忠

哈尔滨工业大学出版社

概率论与数理统计
Gailulun yu Shulitongji
主编 曹 彬 许承德
*
哈尔滨工业大学出版社出版
新华书店首都发行所发行
黑龙江大学印刷厂印刷
*
开本 850×1168 1/32 印张 10.625 字数 275 千字
1996 年 7 月第 2 版 1997 年 4 月第 3 次印刷
印数 14001-19000
ISBN 7-5603-0530-X/O·42 定价:12.00 元

前 言

本书是为高等工科院校《概率论与数理统计》课程而编写的，它包括了1986年工科数学课程指导委员会制订的“概率论与数理统计教学基本要求”的全部内容。为了适应更多读者的需要，我们适当地增加了部分内容，并在这部分内容前打上了“*”号。本书除供工科各专业使用外，也可供某些非工科专业选用，还可作为工程技术人员的自学参考书。

全书内容共分七个部分：第一部分为事件及其概率的概念与运算（第一、二章）；第二部分为随机变量及其分布（第三、四章）；第三部分为随机变量的数字特征（第五章）；第四部分为极限定理（第六章）；第五部分为数理统计的基本概念（第七章）；第六部分为估计和检验的基本方法（第八、九章）；第七部分为线性模型的统计分析初步（第十章）。每章后附有习题，书末附有习题答案。阅读本书只需具备高等工科院校微积分的数学基础。

本书原稿曾作为哈尔滨工业大学校内教材（曹彬、许承德编）使用多年，效果较好。在此基础上，陈桂林、王勇、关忠根据近几年来的教学实践对本书又进行了认真修改、补充。由于编者水平有限，缺点错误在所难免，恳请读者批评指正。

武汉大学胡迪鹤教授和中国纺织大学吴让泉教授曾分别审查了本书初稿的概率论部分和数理统计部分，赵达纲教授审阅了本书。编者向他们致以衷心地感谢。

编 者

1993年3月

目　　录

第一章　随机事件与概率

§ 1.1　随机事件

1.1.1　必然现象与随机现象

人们在实践活动中所遇到的现象，一般来说可分为两类：一类是**必然现象**，或称**确定性现象**；另一类是**随机现象**，或称**不确定性现象**。

必然现象是指在相同条件下重复试验，所得结果总是确定的现象；只要试验条件不变，试验结果在试验之前是可以预言的。例如：在标准大气压下，将水加热到 100℃，水必然沸腾；用手向空中抛出的石子，必然下落；作等速直线运动的物体，如无外力作用，必然继续作等速直线运动等等，这些现象都是必然现象。

随机现象是指在相同条件下重复试验，所得结果不一定相同的现象，即试验结果是不确定的现象；对这种现象来说，在每次试验之前哪一个结果发生，是无法预言的。例如：新生婴儿，可能是男孩，也可能是女孩；向一目标进行射击，可能命中目标，也可能不命中目标；从一批产品中，随机抽检一件产品，结果可能是合格品，也可能是次品；测量某个物理量，由于许多偶然因素的影响，各次测量结果不一定相同等等，这些现象都是随机现象。

对随机现象，是否有规律性可寻呢？人们经过长期的反复实践，发现这类现象虽然就每次试验结果来说，具有不确定性，但大量重复试验，所得结果却呈现出某种规律性。例如：

(a) 掷一枚质量均匀的硬币，当投掷次数很大时，就会发现正面和反面出现的次数几乎各占 1/2。历史上，蒲丰(Buffon) 掷过 4040 次，得到 2048 次正面；皮尔逊(K. Pearson) 掷过 24000 次，得

到 12012 次正面。

(b) 对一个目标进行射击，当射击次数不多时，对弹孔的分布看不出有什么规律性；但当射击次数非常多时，就可发现弹孔的分布呈现一定的规律性：弹孔关于目标的分布略呈对称性，且越靠近目标的弹孔越密，越远离目标的弹孔越稀。

(c) 从分子物理学观点来看，气体分子对器壁的压力是气体分子对器壁碰撞的结果。由于分子是时刻不停地、杂乱无章地运动着，速度和轨道都是随机的，因而对器壁的碰撞也是随机的。初看起来器壁所受的压力是不稳定的；可是实验证明，由于分子数目非常大，各分子运动所具有的随机性在集体中互相抵消、互相平衡了，使得器壁所受的总压力呈现一种稳定性。分子数目越大，压力越稳定。

从上述各例可以看到，随机现象也包含着规律性，它可在相同条件下的大量重复试验或观察中呈现出来。这种规律性称为**随机现象的统计规律性**。

革命导师恩格斯指出："在表面上是偶然性在起作用的地方，这种偶然性始终是受内部的隐蔽着的规律支配的，而问题只是在于发现这些规律。"①

概率论就是研究随机现象统计规律的一门数学学科。

1.1.2 随机试验与事件、样本空间

对随机现象的研究，总是要进行观察、测量或做各种科学试验，为了叙述方便起见，我们统称为试验。例如，掷一硬币，观察哪面朝上；向一目标进行射击，观察是否命中；从一批产品中随机抽一产品，检查它是否合格；向坐标平面内任投一根针，测量此针的针尖指向与 x 轴正向之间的交角，等等；这些都是试验。仔细分析，这些试验具有如下的共同特点：

(a) 试验可以在相同条件下重复进行；

---

① 马克思恩格斯选集，第四卷，243

(b) 试验的所有可能的结果不止一个，而且是事先已知的；

(c) 每次试验总是恰好出现这些可能结果中的一个，但究竟出现哪一个结果，试验前不能确切预言。

如掷硬币的例子，试验是可以在相同条件下重复进行的，试验的可能结果有两个，即正面和反面；每次试验必出现其中之一，但投掷之前是不可能预言正面出现还是反面出现。

我们将满足上述三个条件的试验，称为**随机试验**，简称**试验**，以字母 E 表示。

在试验中，可能发生也可能不发生的事件称为**随机事件**，简称**事件**，以字母 $A,B,C,\cdots$ 表示。

例如，为检查一批产品的质量，随机地从这批产品中抽取 100 件来检查，结果可能是："没有次品"，"有一件次品"，"有两件次品"，…，"100 件都是次品"。显然，这些都是随机事件。此外，"次品数不少于 5"，"次品数大于 5 小于 10"，"次品数是偶数"，等等，也都是随机事件；不过这些事件，都是由前面那些事件组成的。例如，"次品数不小于 5"这个事件，是由"有 5 件次品"，"有 6 件次品"，…，"100 件都是次品"所组成。因此，这事件称为复合事件，而前面的那些事件称为基本事件。

一般说，随机试验的每一个可能结果，称为**基本事件**，而由多个基本事件组成的事件，称为**复合事件**。

在前面的例子中，还可以考虑两个特殊的事件："次品数大于 100"和"次品数不大于 100"。由于 100 件产品中，次品数是不可能大于 100 的；因而，"次品数大于 100"是不可能发生的，而"次品数不大于 100"是必然发生的。一般，我们将在一定的试验条件下，必然发生的事件称为**必然事件**，不可能发生的事件称为**不可能事件**。由于必然事件与不可能事件的发生与否，已失去了"不确定性"，因而本质上它们已不是随机事件；但为了以后讨论问题的方便，我们仍然把它们看作随机事件。

为了利用点集的知识来描述随机事件，我们引进样本空间的

概念。

由于随机试验的所有可能的结果是已知的，从而所有的基本事件也是已知的。我们将基本事件的全体，称为**随机试验的样本空间**，记为 S；基本事件也称为**样本点**，用 e 表示。

例如，在上述检查产品质量的试验中，若令 e_i = "有 i 个次品"，$i = 0,1,2,\cdots,100$；则

$$S = \{e_0, e_1, e_2, \cdots, e_{100}\}$$

由于随机事件是基本事件或是由基本事件组成的复合事件，故随机事件本身就是样本空间 S 的一个子集。

如在上例中，设 A 表示"次品数不少于 5"的事件，则 $A = \{e_5, e_6, \cdots, e_{100}\}$；设 B 表示"次品数大于 5 小于 10"的事件，则 $B = \{e_6, e_7, e_8, e_9\}$；设 C 表示"有 5 个次品"的事件，则 $C = \{e_5\}$。

由此可知，引入样本空间之后，事件便可定义为样本空间的子集；而且，当且仅当子集中的一个基本事件在试验中发生了，才称事件发生。

样本空间 S 和空集 $\varnothing$ 作为 S 的子集也看作事件。由于 S 包含所有的基本事件，故在每次试验中，必有一个基本事件 $e \in S$ 发生，即在试验中，事件 S 必然发生；因此，S **是必然事件**。又因在 $\varnothing$ 中不包含任何一个基本事件，故在任一次试验中，$\varnothing$ 永远不会发生；因此，$\varnothing$ **是不可能事件**。今后我们常用 S、$\varnothing$ 分别表示必然事件与不可能事件。

对一个随机试验，应当弄清楚它的样本空间是什么，这是弄清事件这一概念的基础，下面看几个例子。

例 1　掷一均匀对称的硬币，观察正反面出现的情况，这是个随机试验。可能结果有两个：正（正面朝上），反（反面朝上）。故样本空间

$$S = \{正, 反\}$$

例 2　将上述硬币掷两次，观察正反面情况，这也是一个随机试验。试验的可能结果有四个：（正，正），（正，反），（反，正），（反，

反）。[①]故样本空间

$S=\{(正,正),(正,反),(反,正),(反,反)\}$

在这个试验中，若设 $A=$“第一次出现正面”，则 $A=\{(正,正),(正,反)\}$；若设 $B=$“两次出现同一面”，则 $B=\{(正,正),(反,反)\}$；若设 $C=$“至少有一次出现正面”，则 $C=\{(正,正),(正,反),(反,正)\}$；若设 $D=$“第一次出现反面”，则 $D=\{(反,正),(反,反)\}$。

例 3 记录某电话交换台在一段时间内接到的呼叫次数，这个试验的基本事件（记录结果）是一非负的整数，由于难于规定一个呼叫次数的上界，所以样本空间

$S=\{0,1,2,\cdots\}$

在这个试验中，若设 $A=$“呼叫次数不超过三次”，则 $A=\{0,1,2,3\}$；若设 $B=$“呼叫次数大于五次”，则 $B=\{6,7,8,\cdots\}$。

例 4 从一批灯泡中抽取一只灯泡，测试它的使用寿命，设 t 表示寿命，则样本空间 $S=\{t:\ t\geqslant 0\}$；基本事件 $e=t$。设事件 $A=$“寿命小于 5 小时”，则 $A=\{t:\ 0\leqslant t<5\}$。

例 5 观察某地区一昼夜最低温度 x 和最高温度 y，设这个地区的温度不会小于 T_0，也不会大于 T_1，则样本空间 $S=\{(x,y):T_0\leqslant x<y\leqslant T_1\}$；基本事件 $e=(x,y)$，$T_0\leqslant x<y\leqslant T_1$。设事件 $A=$“最高温度与最低温度之差不超过10℃”，则 $A=\{(x,y):y-x\leqslant 10,T_0\leqslant x<y\leqslant T_1\}$。

例 6 一尺之棰，折成三段，观察其长度。用 x,y 分别表示折成的第一段和第二段的长度，则第三段的长度为 $1-x-y$。由于各段的长度必须大于 0 小于 1，故 x,y 的可能值满足：$0<x<1$，$0<y<1$，$0<1-x-y<1$。从而，样本空间

$S=\{(x,y):0<x<1,0<y<1,0<x+y<1\}$

基本事件 $e=(x,y)$，$0<x<1$，$0<y<1$，$0<x+y<1$。设事

---

① 括号内第一个和第二个字，分别表示第一次和第二次掷的结果。

件 $A=$“每段长都小于$\frac{1}{2}$”，则 A 可写成

$$A=\{(x,y):0<x<\frac{1}{2},0<y<\frac{1}{2},\frac{1}{2}<x+y<1\}$$

§ 1.2　事件的关系与运算

在实际问题中，往往要在同一个试验中同时研究几个事件以及它们之间的联系。详细分析事件之间的关系，不仅帮助我们更深入地认识事件的本质，而且可以大大简化一些复杂的事件。

在下面的叙述中，为直观起见，我们用平面上的一个矩形域表示样本空间 S，矩形内的每一点表示样本点（基本事件）；并用矩形中的小圆和大圆分别表示事件 A 和事件 B。

(a) 事件的包含与相等

若事件 A 中的每一个样本点都属于事件 B（图 1），则称**事件 B 包含事件 A**，记作 $B\supset A$ 或 $A\subset B$。

显然，这时事件 A 发生必然导致事件 B 发生。故 B 包含 A，也常定义为：“若 A 发生必然导致 B 发生，则称 B 包含 A”。

例如，在 §1.1 的例 2 中，由于 $A=\{$(正正)，(正反)$\}$，$C=\{$(正正)，(正反)，(反正)$\}$，故有 $A\subset C$。

对任一事件 A，有 $\varnothing\subset A\subset S$。

如果 $A\subset B$，且 $B\subset A$，则称 A 与 B **相等**，记为 $A=B$。

(b) 事件的积（或交）

同时属于 A 和 B 的样本点的集合（图 2），称为 **A 与 B 之积（或交）**，记为 $A\cap B$ 或 AB。

显然，事件 AB 发生等价于事件 A 与事件 B 同时发生，常称 AB 为 A 与 B **同时发生的事件**。

例如，在 §1.1 的例 2 中，$AB=\{$(正正)$\}$，$AC=A$；在 §1.1 的例 3 中，$AB=\varnothing$。

对任意事件 A，有 $SA=A$，且若 $A\subset B$，则有 $AB=A$。

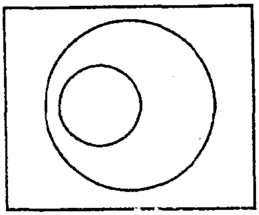


图1　$A\subset B$

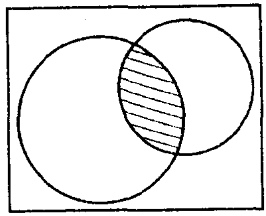


图2　$A\cap B$

(c) 互不相容事件

若 $AB=\varnothing$，即 A 与 B 不能同时发生(图3)，则称 A 与 B 为**互不相容的事件**(或**互斥事件**)。

例如，在§1.1的例3中，A 与 B 是互不相容的事件。再如必然事件 S 与不可能事件 $\varnothing$ 是互不相容的事件。

如果 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中的任意两个事件是互不相容的，则称 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是**互不相容的**。

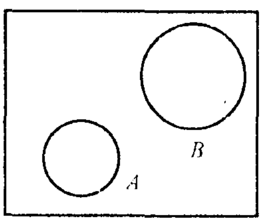


图3　$AB=\varnothing$

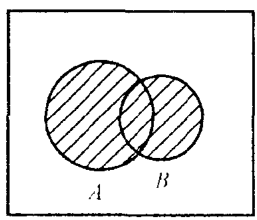


图4　$A\cup B$

(d) 事件的和(或并)

至少属于 A 和 B 二者之一的所有样本点组成的集合(图4)，称为 A 与 B 之**和**(或**并**)，记为 $A\cup B$。

显然，事件 $A\cup B$ 发生，表示 A 发生或 B 发生或 A 与 B 同时

发生,即 A 与 B 中至少有一个发生。因此,常称 $A\cup B$ 为 A 与 B 中**至少有一个发生的事件**。若 A 与 B 是互不相容的事件,则它们的和 $A\cup B$ 也记为 $A+B$。

例如,在 §1.1 的例 2 中,由于 $A=\{$(正正),(正反)$\}$,$B=\{$(正正),(反反)$\}$,$D=\{$(反正),(反反)$\}$,故

$A\cup B=\{$(正正),(正反),(反反)$\}$

$A+D=\{$(正正),(正反),(反正),(反反)$\}=S$

(e) 事件的差

包含在 A 中而不包含在 B 中的样本点的集合(图 5),称为 A 与 B **之差**,记为 $A-B$。

显然,事件 $A-B$ 发生,表示事件 A 发生而 B 不发生。

例如,在 §1.1 的例 2 中,$A-B=\{$(正反)$\}$,$A-C=\varnothing$,$A-D=A$。

对任意事件 A,$A-A=\varnothing$,$A-\varnothing=A$,$A-S=\varnothing$。

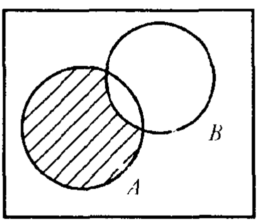


图5 $A-B$

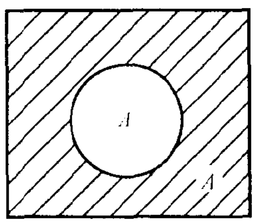


图6 $\overline{A}$

(f) 对立事件

S 与 A 之差 $S-A$,称为 A 的**对立事件**,记为 $\overline{A}$(图 6)。

由定义可知,在任一次试验中,A 与 $\overline{A}$ 不可能同时发生,但 A 与 $\overline{A}$ 二者之中必然有一个发生。因而有

$A\overline{A}=\varnothing$, $A\cup\overline{A}=S$

此外,显然有