大学基础数学自学丛书

常微分方程基础

丁同仁

大学基础数学自学丛书

常微分方程基础

丁 同 仁

上海科学技术出版社

E002/17

大学基础数学自学丛书
常微分方程基础
丁同仁
上海科学技术出版社出版
（上海瑞金二路450号）
新华书店上海发行所发行　芜湖新华印刷厂印刷
开本787×1092　1/32　印张10.25　字数226,000
1981年8月第1版　1984年6月第2次印刷
印数：66,001—95,500
统一书号：13119·939　　定价：0.95元

薄
⑧

序　言

我们伟大的祖国，为了尽早实现四个现代化的宏伟大业，需要造就大批又红又专的、具有高度文化修养和现代科学知识的工业大军、农业大军、科技大军、文化大军和国防大军。这是一项摆在全体人民面前的极为艰巨的任务。人才的培养，基础在教育。然而，目前我国每年只可能吸收很小一部分中学毕业生进入高等院校深造，大批已经走上或将要走上各种工作岗位的千千万万青年人，都迫切要求学习现代科学基础知识，以适应新时期的需要。所以，在办好高等院校的同时，还应尽量为那些不能升入大学或无法离职进入大学的青年提供良好的业余学习条件。为此，上海科学技术出版社编辑出版《大学基础数学自学丛书》、《大学基础物理自学丛书》和《大学基础化学自学丛书》。

《大学基础数学自学丛书》由我们负责主编，由北京大学、北京师范大学和复旦大学数学系有关教师执笔编写。包括《一元函数微分学》、《一元函数积分学》、《多元函数微积分》、《级数》、《空间解析几何》、《高等代数》、《复变函数论基础》、《常微分方程基础》、《概率论与数理统计基础》、《微分几何基础》、《有限数学引论》等共十一种，可供具有相当于高中文化程度、有志于自学大学数学课程的广大读者使用。

本《丛书》是一套大学基础课的自学读物，与中学程度的《数理化自学丛书》相衔接。为了使自学读者在没有教师讲课的条件下读懂、学好，其内容选取和编排不同于一般的大学课

本。文字叙述用讲课的形式书写；概念引入尽量从具体的、通俗的地方入手，逐步深入；内容安排抓住重点，讲深讲透。为了对读者解题有所启发，巩固所学的基础知识等，文中举有较多的例题；凡估计读者容易发生困难的地方，尽量给予必要的分析。习题、例题均按章分节安排，书后附有习题答案或提示。每册之首都有编者的话，指导读者自学全书。总之，想尽可能减少自学中的困难。

自学，时间总比在校学习紧得多。要自学有成就，没什么“诀窍”，如果有的话，那就是“多思考，多练习，熟能生巧”。

学习必须从自己的实际水平出发，学每本书要有一定的基础。选读顺序可根据编者的话的指导进行。有志者，事竟成。希望广大读者循序渐进、持之以恒、锲而不舍地学习。愿大家努力学好。

《丛书》编审过程中得到了北京大学数学系、北京师范大学数学系和北京师范学院数学系领导的大力支持；许多同志参加了提纲、样稿的讨论，并提供了宝贵的意见；编撰者和审稿人为《丛书》付出了辛勤的劳动，谨此一并致谢。

由于《丛书》编写和出版的时间仓促，难免有缺点和错误，希望读者不吝赐教！

江泽涵　　　　赵慈庚
于北京大学燕南园　于北京师范大学工五楼
1980年1月

编者的话

微分方程一直是数学联系实际的一个活跃分支，这不是偶然的．有许多自然科学的定律需要通过微分方程才能得到比较精确的表达．微分方程是一种手段，是人们为了解决科学问题必须精通的一种工具，而不是目的．一个科技工作者想要在自己的工作中自如地运用它，就至少必须熟悉常微分方程的一些基础知识，包括解的存在性和唯一性定理．甚至对于一个纯粹数学家来说，在微分方程的领域内他不仅可以找到丰富的数学思想的泉源，而且也可以充分发挥自己的数学才华．

这本《常微分方程基础》的基本内容是作者在北京大学数学系（包括力学系）讲授这门基础课时的一些讲义，只是进行了一些必要的修改和增删．根据这套《丛书》的要求，考虑了读者自学的特点，本书尽量想用诱导和启发的方式来介绍一些新概念和新方法，这样就说了许多课堂式语言．这对初学者（尤其是完全靠自学的读者）而言，也许不是多余的．

下面对本书各章的主要内容作一简单的说明：

第一章通过一些简单的例子引进了常微分方程的一些基本概念，大多数例子都是常识性的．这样，一方面可以使我们较快地理解微分方程问题的实际背景，另一方面可以使读者自己动手做一些实验．这对于培养理论联系实际的能力是有帮助的．

第二章介绍了常微分方程的一些初等积分法．微分方程

的一个中心问题是求解，通常这不是一个容易的问题. 而这些初等积分法往往能够解决在实际问题中经常出现的微分方程. 这些方法是常微分方程运算的基础之一，因此在这里读者必须进行严格的训练.

第三章先是比较直观地讲了欧拉(Euler)折线法和比卡(Picard)逐次逼近法. 这些方法对于解决实际问题是很有用的. 接着，证明了比卡存在定理和解关于参数(初值)的连续性以及可微性定理. 这些证明涉及数学分析中比较理论性的一部分，读者可以根据自己的需要与兴趣来决定取舍. 但是，读者至少应该联系具体的例子理解这些定理，并且能够正确地叙述和应用它们.

第四章的主要内容是二阶线性微分方程式的一般理论和常系数线性齐次微分方程式的解法. 第一节中我们介绍了在实际应用中比较常见的降阶法；第二节通过单摆的例子讲了有关微分方程的线性化及其意义. 这一章和第二章构成了常微分方程初等方法的主体，是学习力学和电学的重要基础知识之一.

第五章介绍了二阶线性微分方程式的幂级数和广义幂级数解法. 这一章的重点是勒让德(Legendre)方程和贝塞耳(Bessel)方程. 我们用了不少篇幅讲述勒让德多项式和贝塞耳函数的一些重要性质. 这些内容对于学习数学物理方程是不可缺少的. 这里出现的一些计算比前几章的初等方法要复杂一些，读者要掌握它，必须进行仔细的、充分的演算.

第六章讲了拉普拉斯(Laplace)变换. 许多工程师大都喜欢采用拉普拉斯变换求解微分方程，主要是因为这种方法对求解初值问题和间断微分方程要比通常的方法快速得多，而且拉普拉斯变换与工程上的一些术语有紧密的配合. 我们

这一章拉普拉斯变换不用复变函数论的知识，是为许多不大熟悉拉普拉斯变换的工程师提供方便的。

第七章讲的是边值问题．先从简单的实例提出微分方程除了初值问题外还有边值问题．接着，讲了斯托姆-刘维尔(Sturm-Liouville) 边值问题的特征值和特征函数．这些内容主要也是为了学习数理方程而准备的．我们顺便指出，在第一节中所讲的比较定理和振动定理等是常微分方程定性理论最早的萌芽，希望读者注意这种思想方法：不通过微分方程的求解，而只利用微分方程本身的一些特点，来确定解的某些性质。

第八章的内容是微分方程组，它是第四章的推广．在用代入法求解常系数线性齐次微分方程组时，须要预先假定解的一种模式．但是，当特征根是重根时，这种模式可能不够精确．因此，我们在那里加了一个附注，用系数矩阵的约当(Jordan)标准形来说明解的精确模式．

第九章讲了第一积分和一阶拟线性偏微分方程式．在第一节中讲了几个求第一积分的例题，希望读者掌握这种初等方法及其一些技巧．在后面讲的第一积分理论只是这些具体例子在理论上的概括．就是说，只要联系具体的例子，对第一积分的理论是不难理解的，虽然其中许多证明对非数学专业的读者来说是有一定困难的．最后，联系第一积分，顺便讲了一点一阶拟线性偏微分方程的解法(包括柯西(Cauchy)问题的特征线法)。

最后是本书习题的部分答案．读者学了这本书之后，至少应该完成本书百分之八十五以上的习题．这一点可以当作读者考查自学效果的一个重要标准．

在本书的编写过程中，廖可人、黄文灶、高维新、董镇喜、

李正元和许崇清等同志提了不少建设性的意见；尤其是北京师范大学数学系赵慈庚和马遵路等同志进行了认真的审阅，并且对原稿作了一些指正．编者利用这个机会，谨向他们表示深切的感谢．同时，恳切地希望和欢迎读者对本书的缺点提出批评与指正。

丁同仁

于北京大学数学系

1980年8月

目　录

第五章　二阶线性微分方程的级数解法

第六章　拉普拉斯变换

第七章　边 值 问 题

第八章　一阶线性微分方程组

第九章 第一积分与一阶偏微分方程式

习 题 答 案

参 考 文 献

第一章

基本概念

在初等数学中，我们已经学过一些代数方程(如n元n个一次联立方程)，并且用它们解决了一些有趣的应用问题，使我们初步体会到方程论(主要是设未知量、列方程和求解方程的方法)对于解决实际问题的重要性.

在解析几何与微积分中，我们又碰到一类不同的方程——方程的个数少于未知量的个数，也就是通常所说的函数方程. 例如：

1) $$x^2+y^2=1$$

(设x是自变量，则$y=y(x)$是未知函数)；

2) $$x+y+z=0,\ x^2+y^2+z^2=1$$

(设z是自变量，则$x=x(z)$和$y=y(z)$是两个未知函数)；

3) $$\sqrt{x^2+y^2}=\exp\left[\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}\right]$$

(设x是自变量，则$y=y(x)$是未知函数)

等等.

这类函数方程与开头所说的代数方程相比，在概念上进了一步——确定自变量与因变量之间的**函数关系**. 利用这类方程，可以解决一类新的问题，例如某些轨迹问题和极值问题等.

本书将要讲述的方程与刚才说的那种函数方程又不一样，它们除了自变量和未知函数外，还包含了未知函数的**导数**

（即微商）．例如：

1) $$x+y+\frac{dy}{dx}=0$$

$\left(x\right.$ 是自变量，$y=y(x)$ 是未知函数，$\frac{dy}{dx}$ 是

未知函数对 x 的导数$\left.\right)$；

2) $$r^2\frac{d^2u}{dr^2}+r\frac{du}{dr}+(r^2-1)u=0$$

（r 是自变量，$u=u(r)$ 是未知函数，等等）；

3) $$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}=0$$

（x 和 y 是自变量，$\phi=\phi(x, y)$ 是未知函数，等等）．

我们称这类含有未知函数的导数（或微分）的方程式为**微分方程式**．今后我们将会看到，许多描述物理现象的自然定律（例如牛顿第二运动定律）的数学表达形式往往就是微分方程式．因此，微分方程是解决许多力学和物理问题的重要工具．例如，它在自动化控制技术和人造卫星轨道计算中有广泛的应用，而且对于学习数理化的许多基础学科也是很必要的．

微分方程理论的发展大都有明显的实际背景，所以我们将先介绍几个具体的物理模型，并且从中列出几个简单的微分方程．

第一节　几个简单的实例

在这一节中列举几个简单的实际例子，说明怎样从实际问题列成微分方程的问题．例子虽然简单，但是从中能够简明地诱导出微分方程的一些基本概念，成为进一步探讨其他较复杂问题的借鉴．掌握好这些例子，会有助于增进我们分

析问题的能力.

【例题1】 自由落体: 所谓自由落体，指的是只计重力对落体的作用，而忽略空气的阻力和其他外力的影响，参看图1-1. 设落体 B 作垂直于地面的运动，它的位置坐标 $y=y(t)$ 随时间 t 而变化. 它究竟如何变化呢? 这就是要解决的一个实际问题.

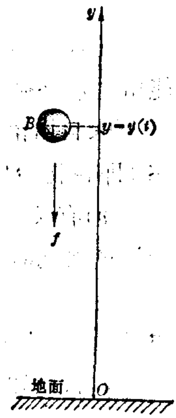

图 1-1

因为 $y=y(t)$ 代表落体 B 的位置坐标，所以它对 t 的一阶导数 $y'=y'(t)$ 代表落体 B 的瞬时速度 $v=v(t)$; 而二阶导数 $y''=y''(t)$ 则代表瞬时加速度 $a=a(t)$. 假定 B 的质量为 m, 则它的惯性力等于 $ma(=my'')$. 我们注意到图1-1的坐标轴 y 向上为正，因此重力 w 向下为负，即 $w=-mg$, 这里 g 是重力加速度(通常取 $g=9.8$ 米/秒^2). 因为假设 B 是自由落体，即假设 B 所受的外力 f 只有重力 w, 即 $f=-mg$, 所以由牛顿第二运动定律($ma=f$)推出

$$my''=-mg.$$

两边消去常数 m, 得到

$$y''=-g. \tag{1}$$

这是一个简单的微分方程式. 这就把上述的自由落体问题化为从微分方程式(1)求解未知函数 $y=y(t)$ 的数学问题了.

这后一问题比较简单，很容易求得它的解答. 由微分方程(1)对 t 进行一次积分，则有

$$y'=-gt+C_1, \tag{2}$$

其中 C_1 是一个任意常数; 再由(2)对 t 积分一次，得到

$$y=-\frac{1}{2}gt^2+C_1t+C_2, \tag{3}$$

其中 C_2 是另一个任意常数. 公式(3)就是我们求得的解答. 但是, 在解答(3)中包含了两个任意的常数 C_1 和 C_2, 因此还不能由此最终确定自由落体 B 的运动状态. 究竟原因何在呢? 原来自由落体 B 的运动规律 $y=y(t)$ 应该与它的初始状态(即在初始时刻 $t=0$ 时的初位置 $y(0)=H$ 和初速度 $y'(0)=v$)有关. 这就是说, 在求解自由落体 B 的运动方程(1)时, 还须同时考虑初始条件

$$y(0)=H, \quad y'(0)=v, \tag{4}$$

这里 H 表示落体 B 的初始高度; v 表示初始速度, 通常我们认为它们是已知的常数.

在(3)和(2)中, 令 $t=0$, 则得

$$y(0)=C_2, \quad y'(0)=C_1.$$

为了保证初始条件(4)成立, 应该取 $C_2=H$ 和 $C_1=v$. 这样一来, 由运动方程(1)和初始条件(4)就完全确定了自由落体 B 的运动规律为

$$y=-\frac{1}{2}gt^2+vt+H. \tag{5}$$

为了加深对初始条件(4)的理解, 我们顺便再解说几句: 初位置 H 和初速度 v 完全由落体 B 的初始状态而定. 例如, 设 B 从距地面 20 米高的塔顶由静止状态落下, 则 $H=20$ (米)和 $v=0$ (米/秒), 从而初始条件(4)为: $y(0)=20$(米), $y'(0)=0$(米/秒). 因此, 由(5)得到 $y=-\frac{1}{2}gt^2+20$ (米). 又若落体 B 从距地面 20 米高的塔顶上以每秒 5 米的初速度垂直向下投掷, 则 $H=20$(米)和 $v=-5$(米/秒), 此时初始条件(4)变为: $y(0)=20$(米), $y'(0)=-5$(米/秒). 因而得到

$y=-\frac{1}{2}gt^2-5t+20$（米）．显然，上面所得到的落体的两种运动规律是不同的．这就清楚地说明运动方程的解与运动的初始条件有关．

在微积分发现以前，十七世纪初，意大利物理学家伽利略已经用实验观察和总结出自由落体的运动规律．现在，我们用牛顿的运动定律列出并求解一个微分方程，再用初始条件，确定了自由落体一般运动规律的数学公式(5)，它在理论上可以很满意地解释伽利略的实验，且便于计算(参看后面的习题)．

【例题 2】 镭的衰变．由于放射性的原因，镭的质量 $R=R(t)$ 是随时间 t 的进行而减少的，即 $\frac{dR}{dt}\leqslant 0$．在实际的应用中，镭的寿命(即 $R=R(t)$ 的变化规律)是我们关心的一个问题．

实验告诉我们，镭的衰变规律是：镭的衰变率 $\frac{dR}{dt}$ 和镭的质量 R 成正比，即

$$\frac{dR}{dt}=-aR, \tag{6}$$

其中 a 是比例常数．按照惯例，我们规定 $a>0$．由于方程(6)的左端 $\frac{dR}{dt}\leqslant 0$，而右端 $R\geqslant 0$ 及 $a>0$，所以在(6)式的右端添了一个负号．

方程(6)就是镭衰变定律的数学表达式，它是一个微分方程，但它并没有直接表明镭的质量是多少，也就是说 $R=R(t)$ 还是一个未知函数．因此，问题是怎样由微分方程(6)求解镭的质量 $R=R(t)$？

另外，镭的质量 $R=R(t)$ 显然与初始时刻 $t=t_0$ 时的质量