Elias M.Stein　Cuido Weiss 著

张阳春 译

欧氏空间上的FOURIER分析引论

上海科学技术出版社

欧氏空间上的
FOURIER 分析引论

Elias M. Stein
Guido Weiss 著

张阳春 译
周民强 校

上海科学技术出版社

Introduction to FOURIER ANALYSIS ON EUCLIDEAN SPACES

By Elias M. Stein
& Guido Weiss

PRINCETON, NEW JERSEY
PRINCETON UNIVERSITY PRESS

欧氏空间上的 FOURIER 分析引论

Elias M. Stein
Guido Weiss 著

张阳春 译

周民强 校

责任编辑 沈鲲龄

上海科学技术出版社出版
（上海瑞金二路 450 号）

新华书店上海发行所发行 江苏扬中印刷厂印刷

开本 850×1156 1/32 印张 10.25 字数 270,000

1987年4月第1版 1987年4月第1次印刷

印数 1—3,200

统一书号：13119·1409 定价：2.30 元

译 者 的 话

本书的目的主要是向读者介绍欧氏空间上 Fourier 分析的发展中的重要结果．书中的内容安排是，在研究了欧氏空间 Fourier 分析的基础(第一章)之后，介绍由 Stein 等人开始研究的多元调和函数的基本理论(第二、三、四章)和 Calderón、Zygmund 开始研究的奇异积分的理论(第六章)；作为应用，在最后一章介绍了多重 Fourier 级数的求和；并且在第五章作为工具介绍了算子插值的理论．本书不仅内容基本、全面、系统，而且包含着许多近代重要成果．

本书可作为数学专业研究生的教材和数学专业工作者以及需要欧氏空间上 Fourier 分析知识的科技工作者的参考书．凡具积分论和单复变函数论知识的人都可阅读此书．

本书译完后，全部译稿经北京大学周民强同志详细审阅，并提出了许多有益的建议，在此深表感谢．

张阳春

1982 年 12 月

中译本序言

这本书已经翻译成中文，我们感到由衷的高兴.

我们两人都曾在中国的北京大学(1980年秋和1981年夏)、复旦大学、杭州大学以及其它学校和研究所讲过学. 这个难得的机会使我们能结识许多中国学者，他们的工作引起了我们很大的兴趣，因而也更使我们的工作为这些中国朋友们所理解. 这对我们是非常重要的.

我们的同事张阳春和周民强为本书的中译本做了许多工作，在此对他们表示感谢.

Elias M. Stein

Guido L. Weiss

1982年4月

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

前　言

本书可作为欧氏空间上调和分析的一本入门书．在近二十年里，这个课题有了硕果累累的发展．我们不打算使本书包罗这一发展的各个方面，我们主要关心的是要阐明 Fourier 分析发展中足以揭示欧氏空间结构的这一方面所用的各种方法．我们特别想指出平移、伸缩和旋转变换所起的作用．此外，与这一主要意图有关，我们也想促进在有类似结构的更一般空间（例如对称空间）上的调和分析的研究．我们感到，当弄清了欧氏空间上的情况之后，研究欧氏空间进而更一般空间上的 Fourier 分析就更有意义．

基于上述考虑，我们没有纳入较普遍的调和分析研究中通常要涉及的几个论题，例如，在一般局部紧 Abel 群上成立的、围绕 Wiener Tauberian 定理的一些结果，因为这些结果没有触及到欧氏空间的特性．简单地说，我们选择论题的原则是为了说明实变与复变的方法是如何从一维推广到多维情形的．

我们要求读者具有积分论和单复变函数论课程中所讲的一般知识．我们也相信，对于已经懂得一些调和分析的读者，本书将更有意义．如果读者事先对调和分析还不够了解，最好先读一下说明性的文章"调和分析"（见 Guido Weiss [3]）．

我们开始想写这本书，是在 1958～59 学年度，那时，我们在研究生课程中，讲授了其中一些课题．此后，我们又各自分别在各处多次讲授这一课程．我们感谢同事们和同学们帮助我们理清思想、组织材料．

更明确地说，作者之一（Weiss）于 1963～64 学年，在华盛顿大学与 Mitchell Taibleson 合作，教授这一课程．我们感谢他对组织这个课程所做的贡献，以及他对我们的工作持续的关注．另一作者曾在芝加哥大学（1961～62）、普林斯顿大学（1963～65）开

设这一课程，讲授本书各章节的内容． R. Askey, N. J. Weiss 和 D. Levine 的课堂笔记给我们写书带来很大方便，特向他们致以谢意．在整个著书过程中，Ronald R. Coifman 经常帮助我们，本书采纳了他的许多建议． Miguel de Guzmán, J. R. Hattemer, Stephen Wainger 和 N. J. Weiss 阅读了全部手稿，感谢他们的注释和指正． 还要感谢 I. I. Hirschman Jr.，他读了部份手稿，并提出了一些有益的建议． 感谢 A. Bonami 夫人，J. L. Clerc, L. J. Dickson、S. S. Gelbart 和 S. Zucker，他们帮助我们校对了清样．

于新泽西州　普林斯顿
密苏里州　圣路易斯

目　录

第一章 Fourier 变换

本章介绍 Fourier 变换并研究其基本性质．由于大部份内容极为一般，在此我们仅做简单介绍．首先，在前两节，论述 $L^1(E_n)$、$L^2(E_n)$ 空间上 Fourier 变换的性质．其次，由于 Fourier 变换的形式特点更容易在广义函数中描述，故在第三节，我们将 Fourier 变换的定义拓广到缓变广义函数空间上．读者将会注意到，在本章中，我们主要是利用欧氏空间的平移结构．而在后几章（特别是在第四章）里，欧氏空间中的旋转变换起着重要的作用．

§1 Fourier 变换的 L^1 基本理论

我们首先引入本书通用的一些记号．E_n 表示 n 维（实）欧氏空间，E_n 的元素记作 $x=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，$y=(y_1, y_2, \cdots, y_n)$，$\cdots$．对于 $x, y\in E_n$，x 与 y 的内积是数 $x\cdot y=\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$；$x$ 的范数是（非负）数 $|x|=\sqrt{x\cdot x}$；此外，$dx=dx_1 dx_2\cdots dx_n$ 表示通常的 Lebesgue 测度元．

我们将讨论定义在 E_n 上的各种函数空间，其中最简单的是 $L^p=L^p(E_n)$，$1\leqslant p<\infty$，即，使得 $\|f\|_p=\left(\int_{E_n}|f|^p dx\right)^{1/p}<\infty$ 的可测函数空间（f 为可测函数）．数 $\|f\|_p$ 称为 f 的 L^p 范数．空间 $L^\infty(E_n)$ 是由 E_n 上所有本性有界的函数组成．对于 $f\in L^\infty(E_n)$，令 $\|f\|_\infty$ 是 $|f(x)|$ 在 E_n 上的本性上确界[1]．通常，建立空间 C_0（即

1) 当 $f, g\in L^p(E_n)$，$1\leqslant p\leqslant\infty$ 时，若对几乎一切的 $x\in E_n$，有 $f(x)=g(x)$，则称 f 与 g 等价．如果考虑由此等价关系得到的等价类，其范数以类中任一代表元的范数来定义（若 f 与 g 等价，则显然有 $\|f\|_p=\|g\|_p$），那就得到一个 Banach 空间．我们仍记这个空间为 $L^p(E_n)$．从上下文可以看清楚要讨论的 $L^p(E_n)$ 究竟是哪一个空间．

由一切在无穷远处为 0 的连续函数组成，并以上述 L^∞ 的范数为范数的空间)比建立 $L^\infty=L^\infty(E_n)$ 更自然些.今后,如不另加说明,所论函数都是复值(Borel)可测函数.

当 $f\in L^1(E_n)$ 时,f 的 Fourier 变换 $\hat{f}$ 是如下定义的函数:对于任意 $x\in E_n$,

$$\hat{f}(x)=\int_{E_n} f(t)e^{-2\pi ix\cdot t}\,dt.$$

容易建立下列定理:

定理 1.1 (a) 映射 $f\to\hat{f}$ 是 $L^1(E_n)$ 到 $L^\infty(E_n)$ 的一个有界线性变换. 事实上 $\|\hat{f}\|_\infty\leqslant\|f\|_1$;

(b) 若 $f\in L^1(E_n)$,则 $\hat{f}$ 一致连续.

定理 1.2(Riemann-Lebesgue) 若 $f\in L^1(E_n)$, 则当 $|x|\to\infty$ 时,$\hat{f}(x)\to 0$; 再注意到前一结果,于是可以断言 $\hat{f}\in C_0$.

定理 1.1 是显然成立的. 至于定理 1.2,当 f 是 n 维区间 $I=\{x\in E_n; a_1\leqslant x_1\leqslant b_1, \cdots, a_n\leqslant x_n\leqslant b_n\}$ 的特征函数时, 也显然成立(因为可把 $\hat{f}$ 明显地表成累次积分). 而对于这种特征函数的有限线性组合, 定理 1.2 的结论也正确. 对于一般的函数 $f\in L^1(E_n)$,可以借助于这种线性组合 g 按 L^1 范数逼近 f 来证明这一定理. 因为这时 $f=g+(f-g)$, 其中 $\hat{f}-\hat{g}$ 一致地小(依定理 1.1 (a)),而且当 $|x|\to\infty$ 时,$\hat{g}(x)\to 0$.

定理 1.2 给出了函数是一个 Fourier 变换的必要条件.然而,“属于 C_0 类”远不是充分条件(见 4.1). 似乎尚没有简单满意的条件来刻划 $L^1(E_n)$ 中函数的 Fourier 变换的特征.

上述 Fourier 变换的定义,可立即推广到有限 Borel 测度:若 μ 是 E_n 上的有限 Borel 测度,定义 $\hat{\mu}$ 为

$$\hat{\mu}(x)=\int_{E_n} e^{-2\pi ix\cdot t}\,d\mu(t).$$

如果在定理 1.1 中,用 μ 的全变差代替 L^1 范数,则定理 1.1 对这种 Fourier 变换是成立的.

除向量空间的运算外，我们还可赋予 $L^1(E_n)$ 一个“乘法运

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

算”，使之成为一个 Banach 代数．这个运算称为卷积，定义如下：若 f、g 皆属于 $L^1(E_n)$，它们的卷积 $h=f*g$ 是一个函数，其在 $x\in E_n$ 处的值为

$$h(x)=\int_{E_n} f(x-y)g(y)\,dy.$$

容易证明，$f(x-y)g(y)$ 是双变量 x，y 的可测函数．那么，根据 Fubini 定理交换积分次序，立刻推知 $h\in L^1(E_n)$，且 $\|h\|_1\leqslant\|f\|_1\|g\|_1$．此外，卷积运算还是可交换和可结合的．更一般地说，当 $f\in L^p(E_n)$，$1\leqslant p\leqslant\infty$，且 $g\in L^1(E_n)$ 时，$h=f*g$ 是有意义的．事实上，我们有以下结果：

定理 1.3 若 $f\in L^p(E_n)$，$1\leqslant p\leqslant\infty$，且 $g\in L^1(E_n)$，则 $h=f*g$ 是有意义的，且属于 $L^p(E_n)$．此外

$$\|h\|_p\leqslant\|f\|_p\,\|g\|_1.$$

显然我们有 $|h(x)|\leqslant\int_{E_n}|f(x-y)|\,|g(y)|\,dy$．于是定理的结论容易由如下的 Minkowski 积分不等式推出：

$$\left(\int_{E_n}|h(x)|^p dx\right)^{1/p}\leqslant\int_{E_n}\left(\int_{E_n}|f(x-y)|^p dx\right)^{1/p}|g(y)|\,dy$$
$$=\|f\|_p\|g\|_1.$$

如同推广 Fourier 变换一样，也可将此运算推广到有限 Borel 测度：设 μ 是 E_n 上有限 Borel 测度，定义 $h=f*d\mu$ 如下：对于 $x\in E_n$ 及 $f\in L^p$，

$$h(x)=\int_{E_n} f(x-y)\,d\mu(y).$$

如果在定理 1.3 中，用 μ 的全变差代替 g 的 L^1 范数，那么定理 1.3 对这种卷积是正确的．

调和分析的一个基本特征就在于：二个函数卷积的 Fourier 变换是它们各自 Fourier 变换的(点态)乘积．更确切地说，从定义可以直接推出下述结果：

定理 1.4 若 f 和 g 皆属于 $L^1(E_n)$，则

$$(f*g)^{\wedge}=\hat{f}\hat{g}.$$ [2]

其他许多重要的分析运算与 Fourier 变换之间，也有极简单的联系．例如，令 τ_h 表示由 $h\in E_n$ 给出的平移(即把函数 $g(x)$ 映射成函数 $g(x-h)$ 的算子)，则当 $f\in L^1(E_n)$ 时，有

(1.5)
$$\text{(i)}\quad (\tau_h f)^{\wedge}(x)=e^{-2\pi i h\cdot x}\hat{f}(x),$$
$$\text{(ii)}\quad (e^{2\pi i t\cdot h}f(t))^{\wedge}(x)=(\tau_h\hat{f})(x).$$

又如，令 δ_a 表示由 $a>0$ 给出的伸缩(即将函数 $g(x)$ 映射成函数 $g(ax)$ 的算子)，于是当 $f\in L^1(E_n)$ 时，有

(1.6)
$$a^n(\delta_a f)^{\wedge}(x)=\hat{f}(a^{-1}x).$$

至于微分与 Fourier 变换，则以下述方式相互联系：

定理 1.7 设 $f\in L^1(E_n)$，$x_k f(x)\in L^1(E_n)$，此处 x_k 是第 k 个坐标函数，则 $\hat{f}$ 关于 x_k 可微，且

$$\frac{\partial\hat{f}}{\partial x_k}(x)=(-2\pi i\, t_k f(t))^{\wedge}(x).$$

证明 令 $h=(0,\cdots,h_k,0,\cdots,0)$ 是沿第 k 个坐标轴的非零向量．依(1.5)之(ii)和 Lebesgue 控制收敛定理，当 $h_k\to 0$ 时，

$$\frac{\hat{f}(x+h)-\hat{f}(x)}{h_k}=\left\{\left(\frac{e^{-2\pi i t\cdot h}-1}{h_k}\right)f(t)\right\}^{\wedge}(x)$$
$$\to(-2\pi i t_k f(t))^{\wedge}(x).\qquad ▌$$

定理 1.7 断言：函数乘以第 k 个坐标函数后的 Fourier 变换，等于该函数的 Fourier 变换对第 k 个变量的偏导数乘以某个常数．我们还可证明，函数的偏导数的 Fourier 变换可以用函数的 Fourier 变换乘以相应的坐标函数而得到(也差一常数因子)．我们将遇到这个事实的多种表达形式．为了精确叙述其中之一(或许是最易证明的一种)，我们引入下述概念：若 $f\in L^p(E_n)$，且存在 $g\in L^p(E_n)$，使得当 $h_k\to 0$ 时，

$$\left(\int_{E_n}\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h_k}-g(x)\right|^p dx\right)^{1/p}\to 0,$$

就称 f 按 L^p 范数关于 x_k 可微(此处沿用定理 1.7 证明中规定的记号)．函数 g 称为 f 按 L^p 范数关于 x_k 的偏导数．

2) 我们将一直沿用记号 $(\cdots)^{\wedge}$ 来表示$(\cdots)$的 Fourier 变换．

对 $|\hat{g}(x)-\hat{f}(x)(e^{2\pi i(h\cdot x)}-1)/h_k|$ 应用(1.5)之(i)和定理1.1之(a)，并令 $h_k\to 0$，可得：

定理1.8 若 $f\in L^1(E_n)$，g 是 f 按 L^1 范数关于 x_k 的偏导数，则

$$\hat{g}(x)=2\pi i x_k \hat{f}(x).$$

定理1.7和1.8皆可推广到高阶导数．我们不再详述，只给出下列公式：

$$(1.9)\qquad \begin{aligned} &\text{(i)}\ \ P(D)\hat{f}(x)=(P(-2\pi i t)f(t))^{\wedge}(x),\\ &\text{(ii)}\ \ (P(D)f)^{\wedge}(x)=P(2\pi i x)\hat{f}(x), \end{aligned}$$

这里，对于 n 元非负整数组 $\alpha=(\alpha_1,\ \cdots,\ \alpha_n)$，设 $x^\alpha=x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\cdots x_n^{\alpha_n}$，$D^\alpha=\partial^{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n}/\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}$．又 P 是 $x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n$ 的 n 元多项式，$P(D)$ 是相应的微分算子(即在 $P(x)$ 中以 D^α 代替 x^α)．

现在转入讨论 Fourier 分析的反演问题．就是说，要考虑这样的问题：给定一个可积函数的 Fourier 变换 $\hat{f}$，如何从 $\hat{f}$ 得到它的原象 f？熟悉 Fourier 级数和积分初等理论的读者会希望 $f(t)$ 等于积分

$$(1.10)\qquad \int_{E_n}\hat{f}(x)e^{2\pi i t\cdot x}\,dx.$$

不幸的是，$\hat{f}$ 不一定可积(例如，当 $n=1$，f 是有限区间的特征函数时)．我们将利用积分的某些求和法，来解决这个难点．首先引入 Abel 求和法(关于级数的类似求和法，大家是非常熟悉的)．对任一 $\varepsilon>0$，定义 Abel 平均 $A_\varepsilon=A_\varepsilon(f)$ 为积分

$$A_\varepsilon(f)=A_\varepsilon=\int_{E_n}f(x)e^{-\varepsilon|x|}\,dx.$$

显然，若 $f\in L^1(E_n)$，则 $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}A_\varepsilon(f)=\int_{E_n}f(x)\,dx$．而且，甚至当 f 不可积时，Abel 平均也是有意义的(例如，若只假定 f 有界，那么对一切 $\varepsilon>0$，$A_\varepsilon(f)$ 都存在)．并且，即使 f 不可积，$A_\varepsilon(f)$ 的极限

$$(1.11)\qquad \lim_{\varepsilon\to 0}A_\varepsilon(f)=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{E_n}f(x)e^{-\varepsilon|x|}\,dx$$

也可以存在．这种情形的一个经典例子是当 $n=1$ 时函数 $f(x)=\frac{\sin x}{x}$[3]．

只要(1.11)中的极限存在且有限，就称 $\int_{E_n} f$ Abel 可求和，和就是该极限值．

与 Abel 求和法类似的是 Gauss 求和法．它是用 Gauss 平均(有时称为 Gauss-Weierstrass 平均) $G_\varepsilon(f)=G_\varepsilon$ 来定义的，

$$G_\varepsilon(f)=G_\varepsilon=\int_{E_n} f(x)e^{-\varepsilon|x|^2}\,dx。$$

如果

$$\text{(1.11')}\qquad \lim_{\varepsilon\to 0}G_\varepsilon(f)=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{E_n} f(x)e^{-\varepsilon|x|^2}\,dx$$

存在且等于数 l，则称 $\int_{E_n} f$ Gauss 可求和(和等于 l)．

我们看到，(1.11)和(1.11′)都可写成以下形式：

$$\text{(1.12)}\qquad M_{\varepsilon,\Phi}(f)=M_\varepsilon(f)=\int_{E_n}\Phi(\varepsilon x)f(x)\,dx,$$

其中，$\Phi\in C_0$，且 $\Phi(0)=1$．称 $M_\varepsilon(f)$ 为积分 $\int_{E_n} f$ 的 Φ 平均．若 $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}M_\varepsilon(f)=l$，则称 $\int_{E_n} f$ 可求和，和等于 l．

我们需要计算 $e^{-\varepsilon|x|^2}$ 和 $e^{-\varepsilon|x|}$ 的 Fourier 变换．前者很容易计算，它可化归一维情形：由于

$$\int_{E_n} e^{-4\pi^2|x|^2}e^{-2\pi i x\cdot t}\,dx=\prod_{j=1}^{n}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-4\pi^2x_j^2}e^{-2\pi i x_j t_j}\,dx_j$$
$$=\prod_{j=1}^{n}\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\,e^{-t_j^2/4}=2^{-n}\pi^{-n/2}e^{-|t|^2/4},$$

对此做变量代换$(\sqrt{\alpha}/2\sqrt{\pi})y=x$，就得到

定理 1.13 对一切 $\alpha>0$，有

---

3) 如所周知，此时 $\lim\limits_{\rho\to 0}\int_0^\rho f(x)\,dx$ 存在．容易证明，只要 f 局部可积，且上述极限存在，设为 l，则 Abel 平均 $A_\varepsilon=\int_0^\infty e^{-\varepsilon x}f(x)\,dx$ 收敛于 l．

$$\int_{E_n} e^{-\pi\alpha|y|^2} e^{-2\pi i t\cdot y}\,dy = \alpha^{-n/2} e^{-\pi|t|^2/\alpha}.$$ [4]

至于计算第二个函数的 Fourier 变换，要稍困难些，我们有以下定理：

定理 1.14 对一切 $\alpha>0$，有

$$\int_{E_n} e^{-2\pi|y|\alpha} e^{-2\pi i t\cdot y}\,dy = c_n \frac{\alpha}{(\alpha^2+|t|^2)^{(n+1)/2}},$$

其中 $c_n = \Gamma[(n+1)/2]/(\pi^{(n+1)/2})$.

证明 作变量代换，我们看到，只要证 $\alpha=1$ 的情形即可. 为此，我们暂且承认，在 $\beta>0$ 时，有

$$\text{(i)} \qquad e^{-\beta} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}} e^{-\beta^2/4u}\,du.$$

然后，应用定理 1.13 来建立第三个等式，

$$\begin{aligned}
&\int_{E_n} e^{-2\pi|y|} e^{-2\pi i t\cdot y}\,dy \\
&= \int_{E_n} \left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}} e^{-4\pi^2|y|^2/4u}\,du \right\} e^{-2\pi i t\cdot y}\,dy \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}} \left\{ \int_{E_n} e^{-4\pi^2|y|^2/4u} e^{-2\pi i t\cdot y}\,dy \right\} du \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}} \left\{ \left(\sqrt{\frac{u}{\pi}}\right)^{n/2} e^{-u|t|^2} \right\} du \\
&= \frac{1}{\pi^{(n+1)/2}} \int_0^\infty e^{-u} u^{(n-1)/2} e^{-u|t|^2}\,du \\
&= \frac{1}{\pi^{(n+1)/2}} \frac{1}{(1+|t|^2)^{(n+1)/2}} \int_0^\infty e^{-s} s^{(n-1)/2}\,ds \\
&= \frac{\Gamma[(n+1)/2]}{\pi^{(n+1)/2}} \frac{1}{(1+|t|^2)^{(n+1)/2}}.
\end{aligned}$$

所以，只要证明了(i)，定理 1.14 就得证. 现在用下面两个等式来证明(i)：

$$\text{(ii)} \qquad e^{-\beta} = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\cos\beta x}{1+x^2}\,dx,\ \beta>0,$$

---

4) 注意，这个定理说明 $e^{-\pi|x|^2}$ 是它本身的 Fourier 变换.

(iii) $$\frac{1}{1+x^2}=\int_0^\infty e^{-(1+x^2)u}\,du.$$

这里，第二个等式是显然成立的. 至于第一个等式，若对函数 $e^{i\beta z}/(1+z^2)$ 应用残数理论，也不难得到. 于是，

$$e^{-\beta}=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\cos\beta x}{1+x^2}\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \cos\beta x\left\{\int_0^\infty e^{-u}e^{-ux^2}\,du\right\}dx$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty e^{-u}\left\{\int_0^\infty e^{-ux^2}\cos\beta x\,dx\right\}du$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty e^{-u}\left\{\frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty e^{-ux^2}e^{i\beta x}\,dx\right\}du$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty e^{-u}\left\{\pi\int_{-\infty}^\infty e^{-4\pi^2uy^2}e^{-2\pi i\beta y}\,dy\right\}du$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty e^{-u}\left\{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{u}}\,e^{-\beta^2/4u}\right\}du.$$

因而定理得证. 】

设 $\alpha>0$, 我们用 W 和 P 分别表示 $e^{-4\pi^2\alpha|y|^2}$ 和 $e^{-2\pi\alpha|y|}$ 的 Fourier 变换. 即，$W(t,\alpha)=(4\pi\alpha)^{-(n/2)}e^{-|t|^2/4\alpha}$, $P(t,\alpha)=c_n[\alpha/(\alpha^2+|t|^2)^{(n+1)/2}]$. 前者称为Weierstrass核（或Gauss-Weierstrass 核），后者称为 Poisson 核[5].

我们要特别指出，积分 (1.10) 的 Abel 平均和 Gauss 平均都收敛于 f（按范数以及 a.e.）. 为此，我们先导出一个一般公式，它能把该积分的 Abel 平均与 Gauss 平均表成 f 与 Poisson 核或与 Weierstrass 核的卷积. 为了得出这些表达式，我们要用到下面的重要结果：

定理 1.15（乘法公式） 若 f, g 属于 $L^1(E_n)$, 则

$$\int_{E_n}\hat{f}(x)g(x)\,dx=\int_{E_n}f(x)\hat{g}(x)\,dx.$$

证明 应用 Fubini 定理，我们有

5) 在稍后的章节里，我们会遇到另一些 Poisson 核，它们定义在一定的区域上. 故此后，我们称刚才引进的 Poisson 核为定义在上半空间 $E^+_{n+1}=\{x=(x_1,\cdots,x_n,x_{n+1})\in E_{n+1};x_{n+1}>0\}$ 上的 Poisson 核.

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com