叶柵的流体动力学理論

H. E. 柯 欽 著

李 有 章 譯

科 学 出 版 社

叶栅的流体动力学理論

H.E.柯 欽 著
李 有 章 譯
董 务 民 校

*

科学出版社出版（北京朝陽門大街117号）
北京市書刊出版業營業許可証出字第061号
中国科学院印刷厂印刷 新华書店总經售

*

1958年7月第一版
1958年7月第一次印刷
（京）0001-1,655

書号：1225 印張：2 1/2
开本：850×1168 1/32
字数：68,000

定价：(10) 0.50元

Н. Е. КОЧИН

ГИДРОДИНАМИЧЕСКАЯ

ТЕОРИЯ РЕШЁТОК

ГОСТЕХИЗДАТ

МОСКВА 1949 ЛЕНИНГРАД

内 容 簡 介

本書系統地介紹了叶柵理論的基本概念、直線叶柵的繞流、厚叶型叶柵的繞流、用一排圓法解叶柵繞流問題的初步概念、以及薄叶型叶柵繞流的解法。

本書可供水渦輪、燃气輪机及軸流式压气机的設計工程师、研究工作者及高等学校的教师和学生参考之用。

原書为 А. И. 魯雷叶(Лурье) 及 Л. Г. 洛江斯基 (Лойцянский) 教授所編輯的"現代力学問題(Современные Проблемы Механики)"叢書之一。

原 序

叶柵的势流理論乃是設計水渦輪、燃气輪机及軸流式压气机的理論基础。由於渦輪机及压气机生产的發展，叶柵的理論获得了特殊的意义。

本書系以1944年著者在国立莫斯科大学的講稿为基础編成的。講稿的内容包括 H. E. 柯欽（Кочин）独創的叶柵理論的經典成果，以及柯欽本人、Л. А. 西蒙諾夫（Симонов）和 Л. И. 謝道夫（Седов）的研究工作。

参加本書編輯工作的为 П. Я. 帕魯巴黎諾娃-柯欽娜（Полубаринова-Кочина）及西蒙諾夫；Н. А. 塔里茨基（Талицкий）在准备出版方面亦做了很多工作。

目 錄

第一章
基本概念

§1. 引起研究叶栅繞流的流体动力学問題

研究物体在流体中的运动，乃是流体动力学所从事的基本問題之一。平面运动的情形研究起来特别簡單；在航空上，当研究到一个或兩个物体运动的时候，广泛应用了平面运动的情形。我們將要研究的問題乃是孤立叶型运动問題的推广。現在我們就来研究叶栅。叶栅乃是由無限多个叶型構成的一个系統（圖1），这个系統是把孤立叶型移动同一距离 t 而構成的。这个距离叫作栅距。叶型必須順其方向移动方得以構成叶栅的一条線，則叫作栅軸。

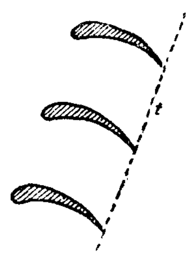
圖 1

1911 年，С. А. 查浦雷金（Чаплыгин）[1]首先研究了叶栅的基本問題，並在 1914 年發表了問題的解。当时航空还不發达。查浦雷金已經考慮到把所得的解直接用到栅型机翼的飞机（多翼机）上去。現在採用的主要是單翼机。但是，即使对於單翼机机翼的空气动力学来説，叶栅的問題对於作机翼的实驗时，估計風洞的影响也是有意义的。如果叶型是对称的，並且是相对於風洞对称地放着，那末我們就得到一个單重叶栅。在某些其他的情形下，我們还能得到二重叶栅，它的栅距等於流道寬度的二倍（圖2）。二重叶栅的另一个例子是：一个叶型落在由平行壁圍起来的無限深的水渠中，

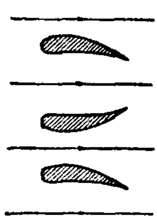
圖 2

1) Чаплыгин С. А., Теория решетчатого крыла. Собрание сочинений, т. II, М., 1948（此文也刊載在 1954 年出版的查浦雷金的“Избранные Труды по Механике и Математике”一書中——譯者註）。

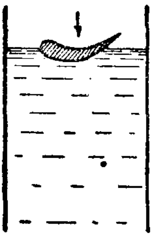

圖 3

並打击水面(譬如水上飞机的降落)。將叶型对壁映射,我們就得到無限多个叶型(圖 3)。如果水渠是有底的,卽水是有限深的,則結果就能得到双重週期的叶柵。在平板撞到有限深的液体上的情形下,我們就得到了平板柵(圖 4 及 5)。平板在有限深水渠內撞到液体上去的問題,就給出了双重週期的叶柵(圖 6)。

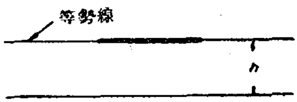

圖 4

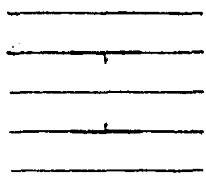

圖 5

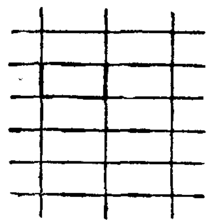

圖 6

但是,叶柵的最重要的应用則是在透平机的理論方面。軸流式透平机是各种类型透平机中的一种(圖 7 及 8)。水經过导向器流下来。在叶輪范圍內,水系沿着大約是一些圓柱面上的螺旋形流線运动,这是因为徑向速度 v_r 很小的緣故。利用下面的方法,可以把研究各个圓柱層上的流动,化为研究叶柵的繞流。

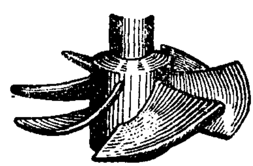

圖 7

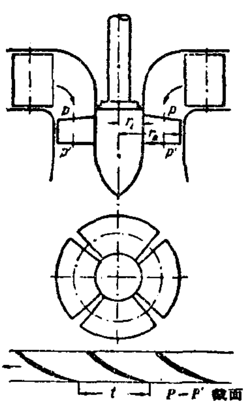

圖 8

我們取一个圓柱面 $pp'pp'$ (圖 8)。沿母線 pp' 把圓柱切开,並將它展开成一个平面;而透平叶片相截於圓柱面的截面,在平面上就構成一个叶柵;我們將認为这个叶柵向兩方都延伸到無限远。而当 $pp'pp'$ 截面轉到另一个截面时,柵距及叶型形狀均有改变。

§ 2. 朱科夫斯基定理的推广

我們先从推导类似於朱科夫斯基定理的一个定理来开始对叶柵的研究。研究作用在

叶柵叶型上的力，要比研究孤立叶型上的力为簡單．令叶柵前方流动速度为 v_1，v_1 与 x 軸傾斜成 α_1 角（圖 9）；叶柵后方速度为 v_2，v_2 与 x 軸成 α_2 角．渦輪机叶片的主要用途是使流动变更方向．在叶片上作用有能产生轉矩的流体之反作用力．知道了 v_1, α_1 及 v_2, α_2，就可以决定渦輪机轉矩的大小。我們把流体看作是理想流体，即把摩擦阻力略去不計，同时也不計及質量力．

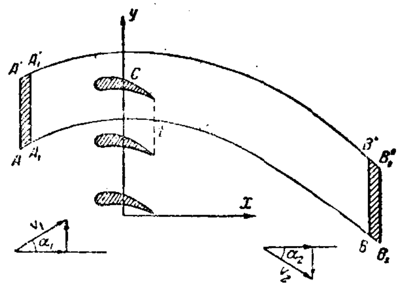

圖 9

由於繞流的情況是週期地重复的，因此可以作兩条流線，而使兩条流線間有一叶型，並且其中的一条流線乃是由另一条流線移动一个柵距 t 而得到的（圖 9）；線 AB 与 $A'B'$ 同态，且 $AA'=BB'=t$．我們把动量定律应用到体积 $AA'B'B$ 內的流体上，来計算作用在叶型 C 上的力 P．

动量定律系用下列方程来表示：

$$\frac{d\boldsymbol{K}}{d\tau}=\boldsymbol{R}, \tag{2·1}$$

式中　$\boldsymbol{K}$ 是动量，$\boldsymbol{R}$ 是作用力的主矢量，τ 是时間．时刻 τ 位在線段 AA' 上的流体質点，在时刻 $\tau+\Delta\tau$ 时即佔有位置 A_1A_1'，而在線段 BB' 上的質点，亦挪到位置 B_1B_1'．我們假定流动是定常的，因此可以把动量的变化看作是下列的差：

$$d\boldsymbol{K}=\boldsymbol{K}(BB'B_1'B_1)-\boldsymbol{K}(AA'A_1'A_1).$$

左右方速度的分量相应地为：

$$v_{1x}=v_1\cos\alpha_1, \qquad v_{1y}=v_1\sin\alpha_1,$$
$$v_{2x}=v_2\cos\alpha_2, \qquad v_{2y}=v_2\sin\alpha_2.$$

根据流量为常数的条件，水平分速度应該一样：

$$v_{1x}=v_{2x}. \tag{2·2}$$

單位时間內通过線段 AA' 流过的質量为

$$\rho\overline{AA'}v_{1x}\times 1=\rho\overline{BB'}v_{2x}\times 1.$$

$d\tau$ 时間内通过線段 AA' 流过的質量为:

$$\rho t v_{1x} d\tau = \rho t v_{2x} d\tau.$$

所以

$$\boldsymbol{K}(AA'A_1'A_1) = \rho t v_{1x} d\tau \boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{K}(BB'B_1'B_1) = \rho t v_{2x} d\tau \boldsymbol{v}_2,$$

式中 v_2 及 v_1 是离叶栅很远处的速度。將兩个等式相減，我們得到:

$$d\boldsymbol{K} = \rho t d\tau (v_{2x}\boldsymbol{v}_2 - v_{1x}\boldsymbol{v}_1)$$

和

$$\frac{d\boldsymbol{K}}{d\tau} = \rho t v_{1x}(\boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_1). \tag{2·3}$$

現在，我們来計算作用在体积 $ABA'B'$ 上的力之主矢量 $\boldsymbol{R}$. 作用在体积 $ABA'B'$ 上的力有从叶型方面来的力和边界上的压力。流線 AB 及 $A'B'$ 上的力是相互抵消的，因为其上的压力大小相同但作用方向則相反。在边界 AA' 上压力等於 p_1，它产生平行於 x 軸且等於 $p_1 t\boldsymbol{i}$ 的力。作用在 BB' 上的力为 $-p_2 t\boldsymbol{i}$。此处，$\boldsymbol{i}$ 是平行於 x 軸的單位矢量。

在叶型的周線 C 上有力 $-\boldsymbol{P}$ 作用在流体上，此处的 $\boldsymbol{P}$ 就是作用在叶型上的力。所以我們得到:

$$\boldsymbol{R} = (p_1 - p_2)t\boldsymbol{i} - \boldsymbol{P}.$$

根据动量定律可得:

$$\rho t(v_{2x}\boldsymbol{v}_2 - v_{1x}\boldsymbol{v}_1) = (p_1 - p_2)t\boldsymbol{i} - \boldsymbol{P}. \tag{2·4}$$

由此我們就求得力 $\boldsymbol{P}$。把等式(2·4)投影到 x 軸上以后，可得到:

$$\rho t(v_{2x}^2 - v_{1x}^2) = t(p_1 - p_2) - P_x = 0.$$

把同一等式投影到 y 軸上得到:

$$\rho t v_{1x}(v_{2y} - v_{1y}) + P_y = 0.$$

所以

$$P_x = t(p_1 - p_2),\ P_y = -\rho t v_{1x}(v_{2y} - v_{1y}). \tag{2·5}$$

在 x 軸上的投影系通过压力表示出来，而 y 軸上的投影則通过速度表示出来。

利用伯努利方程

$$p + \frac{\rho v^2}{2} = 常数$$

来变换所得的公式，我們得到：

$$p_1+\frac{\rho v_1^2}{2}=p_2+\frac{\rho v_2^2}{2},$$

或

$$p_1-p_2=\frac{\rho}{2}\left(v_2^2-v_1^2\right)=\frac{\rho}{2}\left(v_{2y}^2-v_{1y}^2\right).$$

所以根据(2·4)式

$$P_x=\frac{t\rho}{2}\left(v_{2y}^2-v_{1y}^2\right).$$

我們引入無限远处速度的算术平均值

$$\frac{1}{2}(\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2)=\boldsymbol{v}_0,\quad v_{0x}=v_{1x}=v_{2x},\quad v_{0y}=\frac{1}{2}(v_{1y}+v_{2y}).$$

於是最后得到：

$$\left.\begin{aligned}P_x&=t\rho v_{0y}(v_{2y}-v_{1y}),\\ P_y&=-t\rho v_{0x}(v_{2y}-v_{1y}).\end{aligned}\right\}\tag{2·6}$$

由此我們看出

$$P_x v_{0x}+P_y v_{0y}=0,$$

即压力矢量 $\boldsymbol{P}$ 系垂直於速度矢量 $\boldsymbol{v}_0$（圖 10）.

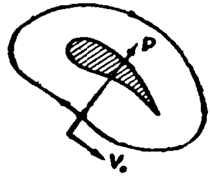

圖 10

現在我們来計算繞周線 C 的环量 Γ；我們有：

$$\Gamma=\Gamma_C=\Gamma_{ABB'A'}=\Gamma_{AB}+\Gamma_{BB'}+\Gamma_{B'A'}+\Gamma_{A'A}.$$

第一項及第三項抵消掉了，因此

$$\Gamma=t(v_{2y}-v_{1y}).\tag{2·7}$$

代入(2·6)式，我們即得：

$$P_x=\rho v_{0y}\Gamma,\quad P_y=-\rho v_{0x}\Gamma,\quad \boldsymbol{P}=\rho v_0\Gamma.\tag{2·8}$$

因此我們就得到了朱科夫斯基公式，其中系把叶柵前后無限远处速度的半和当作無限远处的速度.

§ 3. 环量与渦輪机功率間的关系

回到渦輪机（圖 11）上来，我們看到，平行於渦輪机軸的分力 P_x，产生由渦輪机軸承承受的軸向推力．分力 P_y 則垂直作用於渦輪机

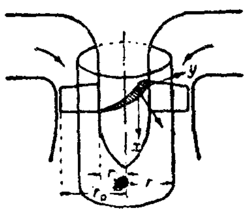

圖 11

軸而产生轉矩[1)]. 我們將流体的全部流量分割成很多圓柱面間的流片. 取半徑为 r 及 $r+dr$ 的兩圓柱面間的一流片元. 則作用在这个流片元中一小段叶片上的力,其圓周分力我們用附加符号 u 来表示:

$$\delta P_u = \rho \Gamma v_{0x} dr.$$

此力产生一相对於渦輪机軸的轉矩,此轉矩等於:

$$r\delta P_u = \rho \Gamma v_{0x} r dr.$$

若設我們有 n 个叶片,並用 M 代表总轉矩,於是与長度为 dr 的这些叶片段相应之轉矩可写成:

$$\delta M = nr\delta P_u = \rho \Gamma n v_{0x} r dr,$$

而总轉矩就等於:

$$M = \rho n \int_{r_i}^{r_a} \Gamma v_{0x} r dr. \qquad (3\cdot1)$$

流体的流量 Q 是渦輪机的一个基本特性参数. 对於一个流片元来說,我們有:

$$\delta Q = 2\pi r dr v_{0x}.$$

由此,我們就得到力矩元的下列表示式:

$$\delta M = \rho \Gamma n \frac{\delta Q}{2\pi} = \frac{\rho n}{2\pi} \Gamma \delta Q. \qquad (3\cdot2)$$

如果 Γ 与 r 無关,則 δM 系与 δQ 成正比,因此,

$$M = \frac{\rho n}{2\pi} \Gamma Q. \qquad (3\cdot3)$$

渦輪机的功率 N (卽單位时間內作的功)与力矩間存在下列的关系:

$$N = M\omega = \frac{\rho n \Gamma Q \omega}{2\pi}, \qquad (3\cdot4)$$

式中 ω 是渦輪机的旋轉角速度.

1) Проскура Г. Ф. Гидродинамика турбомашин, 1934. 我們从这本書中採用了一些圖(1954 年苏联出过本書的修訂第二版,国内曾出过第二版的影印版——譯者註).

对於一給定的狀況，可以設計环量 Γ 为常数的渦輪机。但对於其他的狀況，Γ 就不再是常数了。

在水渦輪上，由重力作功。如果 Q 为流量，則單位时間內流过渦輪机轉子的質量为 ρQ；單位时間內作的功等於 ρQgH，其中 H 是水的落差。

引入效率 $\eta<1$，於是我們就得到軸功率的下列表示式：

$$N=\eta\rho QgH. \tag{3·5}$$

比較(3·4)及(3·5)式，我們得到：

$$\Gamma=\frac{2\pi\eta gH}{n\omega}. \tag{3·6}$$

如果給定了水头、效率和水渦輪的轉数，根据这个公式就可以决定 Γ。

第二章

叶栅理論的基本問題

§4. 等价叶栅

对於具有扭轉叶片的軸流式渦輪机，决定繞叶片的环量，以及把所有叶片扭轉同一角度时决定环量的变化，乃是叶柵理論的一个最重要的問題。所以，我們有兩类基本問題：1)設計能使流动得到給定轉向(或給定环量)的叶柵，2)研究給定了形狀的叶柵的繞流。

我們現在来考慮环量根据来流方向而变化的問題。我們令

$$v_{1x}=v_1\cos\alpha_1,\qquad v_{1y}=v_1\sin\alpha_1.$$

和机翼理論中的情形一样，我們認为叶型的尾緣是尖的。因此根据尾緣点上速度有限的条件就可以决定环量(查浦雷金-朱科夫斯基原理)。我們来研究兩种基本流动：

1) 令 $\alpha_1=0,\ v_1=1$；則

$$v_{1x}=1,\quad v_{1y}=0.$$

我們用 $\varphi^{(1)}(x,y)$来表示速度勢，用 $\gamma^{(1)}$来表示环量。

2) 令 $\alpha_1=\frac{1}{2}\pi,\ v_1=1$；在此情形下

$$v_{1x}=0,\quad v_{1y}=1.$$

令相应的速度勢及环量为 $\varphi^{(2)}(x,y)$ 及 $\gamma^{(2)}$。我們用 $\varphi(x,y)$ 及 Γ 来表示速度为(v_1,α_1)的任意来流情形下之速度勢及环量。因此，应用下列方法，可以通过前面所研究的速度勢 $\varphi^{(1)}(x,y)$ 及 $\varphi^{(2)}(x,y)$ 把速度勢 $\varphi(x,y)$表示出来：

$$\varphi(x,y)=v_1\cos\alpha_1\varphi^{(1)}(x,y)+v_1\sin\alpha_1\varphi^{(2)}(x,y);\qquad(4\cdot1)$$

同理也可以把环量表示为

$$\Gamma=v_1\cos\alpha_1\gamma^{(1)}+v_1\sin\alpha_1\gamma^{(2)}.\qquad(4\cdot2)$$

直接的驗証指明，φ 滿足無限远处及周線上的条件。

如果尾緣是尖的，且給定了 v_1 及 α_1，則由此就可决定环量 Γ，因此也就知道了 v_2 及 α_2。設已給定了 $\gamma^{(1)}$ 及 $\gamma^{(2)}$——所給定叶柵的特征常数。間流动的方向要在什么样的角度下，才能得到無环量繞流？从(4·2)式我們得到，当

$$\gamma^{(1)}\cos\alpha_1+\gamma^{(2)}\sin\alpha_2=0$$

时，$\Gamma=0$。在此情形下，正像公式(3·1)所指出的那样，升力等於零。

我們用 β 来表示叶柵的無环量繞流角，即用 β 表示所求的 α_1 值。根据最后这个等式，我們得到：

$$\operatorname{tg}\beta=\operatorname{tg}\alpha_1=-\frac{\gamma^{(1)}}{\gamma^{(2)}}. \tag{4·3}$$

所以我們有：

$$v_{1x}=v_1\cos\beta,\quad v_{1y}=v_1\sin\beta;$$

根据流量守恆条件，有

$$v_{1x}=v_{2x}.$$

除此以外，从(2·7)式我們得

$$v_{2y}-v_{1y}=\frac{\Gamma}{t}=0;$$

因此

$$v_{2y}=v_{1y}.$$

所以，在無环量繞流的情形下，当流动通过叶柵的时候，速度並不会發生变化；沒有力的作用，流动方向也不改变。

我們換一种方式来写出环量的表示式。令

$$\gamma=\sqrt{\gamma^{(1)2}+\gamma^{(2)2}}, \tag{4·4}$$

此时可取：

$$\gamma^{(1)}=-\gamma\sin\beta,\ \gamma^{(2)}=\gamma\cos\beta,\ \Gamma=v_1\gamma\sin(\alpha_1-\beta); \tag{4·5}$$

式中 α_1 是所給流动的方向，β 是無环量流的方向。我們令

$$\delta_1=\alpha_1-\beta,$$

且將 δ_1 叫作冲角。

則 Γ 的表示式取下列的形式

$$\Gamma=v_1\gamma\sin\delta_1, \tag{4·6}$$

即环量系与冲角的正弦成正比。

§ 5. 等价直線叶栅

量 γ 及 β 系从环量的观点来表征叶栅的特性的。如果在相同的栅距下，兩个叶栅的 γ 及 β 是一样的，則兩个叶栅就是等价的。对於任何一个叶栅，都可以求出一个由很多直線構成的与它等价的叶栅，因为在給定了栅距的情形下，直線叶栅只剩下兩个参数——長度 l 及角 β'（圖 12）。我們来証明，实际上是可以求得这种叶栅的。

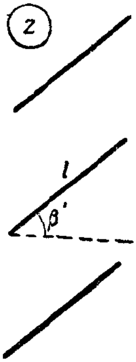

圖 12

首先我們注意到，如果所求的直線叶栅是存在的，則这个叶栅的角 β' 就等於無环量平行繞流的角 β，即 $\beta'=\beta$，因为在此情形下，叶片不会改变流动的方向。問題就成为如何选擇 l 来使这兩个叶栅的环量相等。

假定对於任意一个叶栅，我們已求得了無环量繞流的方向（圖 13）。令 $f(z)$ 为这个無环量繞流的复势，它在無限远的速度等於 1。因此，在平面

$$f=\varphi+i\psi$$

上，我們就得到一排平行直線的繞流（圖 14）。我們用 β 表示無环量繞流角，令 $v=1$。

在無环量繞流情形下，点 B 处的 φ 值在由上方及由下方趋於 B 时是一样的（圖 13）。現在我們来决定 f 面上叶栅的栅距是多大，又点 A 相对於点 A' 的前伸量是多少（圖 14）。

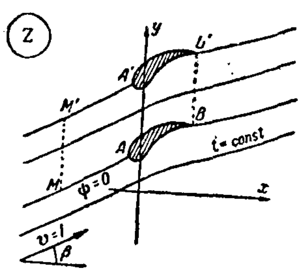

圖 13

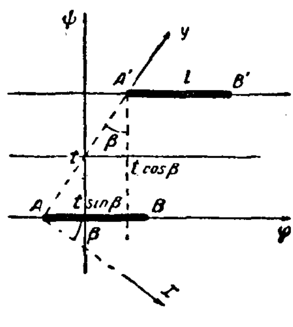

圖 14

在叶栅两个叶型被繞流过的地方，存在有同态点，所謂同态点，就是在这些点上速度是一样的。把一个点移动一个栅距 t 就可以得到另一个点，卽同态点 z 及 z' 必須滿足下列等式：

$$z'=z+nti.$$

我們有：

$$\frac{df}{dz}=v_x-iv_y.$$

根据同态条件得：

$$f'(z+nti)=f'(z);$$

將上式积分，我們則得到：

$$f(z+nti)=f(z)+nc. \tag{5·1}$$

特別是

$$\left.\begin{aligned}&f(z+ti)=f(z)+c\\ \text{及}\quad&\\ &f(A')=f(A)+c\ \ (c=AA',\text{圖 14}).\end{aligned}\right\} \tag{5·2}$$

为了决定 c，以考虑远离叶栅的同态点較为簡單。在 $x\to-\infty$ 处，我們取点 M 及 M'（圖 13）。在点 $M=-\infty$ 处，我們有：

$$v_x=\cos\beta,\quad v_y=\sin\beta.$$

另一方面

$$v_x=\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\frac{\partial\psi}{\partial y},\quad v_y=\frac{\partial\varphi}{\partial y}=-\frac{\partial\psi}{\partial x}.$$

我們写出下列差数：

$$\varphi(M')-\varphi(M)=\int_M^{M'}\frac{\partial\varphi}{\partial y}dy=\int_M^{M'}v_y\,dy=\sin\beta\int_M^{M'}dy=t\sin\beta,$$

这个增量对於任何一对同态点都是成立的。同理我們得到：

$$\psi(M')-\psi(M)=\int_M^{M'}\frac{\partial\psi}{\partial y}dy=t\cos\beta.$$

所以，在点 A 及 A' 就有：

$$c=t(\sin\beta+i\cos\beta)=tie^{-\beta i}.$$

其次，我們令

$$l=\varphi(B)-\varphi(A), \tag{5·3}$$

式中 l 为 f 面上線段 AB 的長度(圖 14). 我們引入变数

$$\zeta=fe^{i\beta}.$$

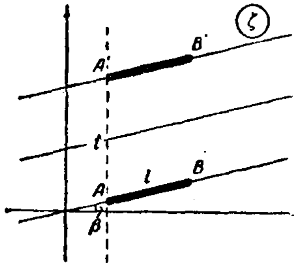

圖 15

这样在 ζ 面上得到的平板栅(圖 15)就等价於所給定的叶栅. 我們来証明, 如果取任意一原始速度, 則所給定叶栅的来流速度与平板栅的来流速度將是一样的.

我們取 ζ 面上的复势为:

$$f(\zeta)=F(\zeta).$$

將 $\zeta(z)$ 代入以后, 我們得到:

$$F(\zeta(z))=g(z).$$

函数 $g(z)$ 决定了 z 面上的某一流动. 設在 ζ 面上对於叶栅左方的流动来說是 v_1, α_1. 这就是說

$$\left(\frac{dF(\zeta)}{d\zeta}\right)_{\zeta=-\infty}=v_1\cos\alpha_1-iv_1\sin\alpha_1=v_1e^{-i\alpha_1}.$$

於是, 在 z 面上就有:

$$\left(\frac{dg(z)}{dz}\right)_{z=-\infty}=\left(\frac{dF}{d\zeta}\right)_{-\infty}\left(\frac{d\zeta}{dz}\right)_{-\infty}=\left(v_1e^{-i\alpha_1}\frac{d\zeta}{df}\frac{df}{dz}\right)_{-\infty}=$$
$$=v_1e^{-i\alpha_1}e^{i\beta}e^{-i\beta}=v_1e^{-i\alpha_1}.$$

与此相同, 也可以証明叶栅右方的速度是一样的. 显然, 在此情形下环量也是一样的, 所以叶栅是等价的.

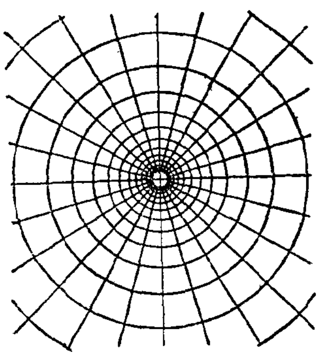

圖 16

当 $t\to\infty$ 时, 我們就把叶型的外部轉繪为線段的外部. 通常系把叶型轉繪为圓. 也有可能將叶栅轉繪为一排圓的外部.

在研究直線叶栅繞流以前, 我們先来研究三个簡單的問題.

1. 圓外的点渦 位在坐标原点的点渦(圖 16), 其复势为