数字滤波与卡尔曼滤波

蒋志凯　　编著

中国科学技术出版社

TP713
P36

数字滤波与卡尔曼滤波

蒋志凯　　编著

中国科学技术出版社

内容提要

本书是一本介绍数字滤波和卡尔曼滤波的基础理论书。全书共分六章：前三章介绍与数字滤波有关的内容，后三章介绍与统计滤波，特别是卡尔曼滤波有关的内容。

本书物理概念清晰，通过从模拟滤波到数字滤波再到统计滤波的循序渐进之路，向读者介绍了数字滤波和卡尔曼滤波的基础理论和实际应用。所用之数学工具，力求使工程技术人员和自学者较易接受。本书可作为电子、自控、导航、通信、数据处理和计算机应用等专业的教学参考书和工程技术人员的自修读本。

[京]新登字 175 号

数字滤波与卡尔曼滤波

蒋志凯　编著

责任编辑　张　日

*

中国科学技术出版社出版

北京海淀区白石桥路 32 号　邮政编码:100081

新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售

大连凌山印刷厂印刷

*

开本 787×1092 毫米 1/32　印张 7.875　字数:150 千字

1993 年 3 月北京第 1 版　1993 年 3 月第 1 次印刷

印数:1—1000 册　定价:4.80 元

ISBN 7-5046-1075-5/O·26

目　录

滤波的概念和滤波器的发展简史

滤波的概念，最初是从过滤的概念而来。所谓过滤，是指将悬浮在液体或气体中的固体颗粒分离出来的一种方法。例如，我们常用滤纸来分离沉淀和溶液、用滤池来对水进行净化等。

《辞海》中对“滤”字解为：漉去液体中的杂质。《正字通·水部》在对“滤”字作解释时，引用了唐人白行简的《滤水罗赋》为注：“罗者，滤水具，用轻纱粗葛布为之，滓在上，水在下，则水洁净也。”陆游在《野饭》一诗中也有“时能唤邻里，小瓮酒新漉。”的诗句。其中的“漉”字，也是过滤之意。

滤波这一概念虽源于过滤，但其含义却比过滤要狭窄得多。顾名思义，滤波是指对波的一种过滤。例如，我们在摄影时常用滤色镜将某一频率范围内的光波滤去，这实际上就是一种滤波。在电子工程中，滤波则主要是指让电信号通过某种电子网络，滤去其中某些无用的频率成分，而保留其有用的频率成分。例如在通信系统中，信号中往往混有一些我们不想要的信号或噪声，此时就要靠滤波器来把它们滤掉。在自动控制系统中，对系统的自动控制是靠系统输出的反馈来实现的。系统的输出往往包含一些干扰信号和噪声。在从中提取一定量的反馈作为控制量时，也往往存在随机误差。因此，为减小控制误差，也必须进行适当的滤波。

滤波器最初是指某种具有选频特性的电子网络，一般由

线圈、电容器和电阻器等元件组成。滤波器将使它所容许通过的频率范围(即通带)内的电信号产生较小的衰减,而使它所阻止通过的频率范围(即阻带)内的电信号产生较大衰减。划分通带和阻带的频率,称为滤波器的截止频率。

按组成电路的元件,滤波器可分成 LC、RLC、RC、晶体和陶瓷滤波器等。我们也可用机械元件代替电子元件,制成机械式滤波器,或利用物质(如钆铁石榴石)的铁磁共振原理制成可电调谐的滤波器。

按容许通过的频率范围,滤波器又可分成低通、高通、带通和带阻滤波器等。

具有选频特性的串联或并联谐振回路,是一种常用的滤波器。收音机或其他外差式接收机中的中频放大器,也是一种滤波器。各级中频放大器中的谐振回路靠放大器和变压器来耦合,形成一定的通带和阻带。信号在通过中放级时,通带内的成分将被放大,而阻带内的成分将大大衰减。由于引入了放大单元,这种滤波器不仅对不同频带的信号呈现不同的衰减,而且对通带内的信号还有放大作用。

此外,调幅波接收机中的包络检波器是一种非线性滤波器。非线性滤波器的实例还有:自动增益控制(AGC)电路、调频接收机中的锁相环以及近年来在组合音响装置中用来提高信噪比的 Dolby 系统等。

上面所列举的这些滤波器,不论是线性还是非线性的,由于都是用来对模拟信号(时间和量值都可连续取值的信号)进行处理,故统称模拟滤波器或经典滤波器。

随着集成电路技术的出现,特别是数字电子计算机的广泛应用,模拟滤波器开始向数字滤波器方向发展。A/D或D/A

转换器、移位寄存器、只读存贮器以及微处理机这样一些与传统的模拟滤波电路元件截然不同的电路元件和模块被广泛应用于数字滤波电路中，以适应离散数字信号处理的要求。即使是模拟信号，也可通过 A/D 转换先变成离散的数字信号，经相应的处理(包括数字滤波)后再恢复成模拟信号。

人们在讨论数字滤波器时，考虑的不再是如何减少电路元件、缩小电感器体积、减少电阻元件的损耗或实现端口阻抗匹配等问题，而是如何缩短字长、减小舍入误差、减少引线和缩短信号处理的时延等。

与模拟滤波器相比，数字滤波器不仅可使体积缩小、成本降低，而且还有如下优点：第一，滤波器的参数可根据对滤波器性能指标的要求来设定，从而具有较高的精度；第二，滤波器的参数很容易重新设定或使其具有自适应性；第三，有些采用微处理机的数字滤波器可实现对微处理机的分时使用，从而大大提高工作效率。

经典滤波的另一发展方向，就是利用统计理论来处理滤波问题。由此，产生了统计滤波器。

从经典滤波的观点来看，有用信号和噪声是分布在不同频带之内的(当然，它们所在频带有时可能有所重叠)。因此，我们可用具有一定选频特性的经典滤波网络把噪声尽可能地滤除，而保留畸变不大的有用信号。但是，我们所遇到的信号和噪声有时可能是随机的，其特性往往只能从统计的意义上来描述。例如：在导弹控制系统中，由于目标运动的随机性，目标的位置和速度都是随机的。此外，测量装置也会有随机噪声(如雷达测角的起伏噪声等)。此时，我们就不可能采用一般的经典滤波器把有用信号从测量结果中分离出来，而只能用统

计估算方法给出有用信号的最优估计值。从统计的观点来看，一个滤波器的输出越接近实际有用信号，这个滤波器就越好。也就是说，最优滤器是输出最接近于实际有用信号的滤波器。

在统计滤波器的发展过程中，早期的维纳滤波器涉及到对不随时间变化的统计特性的处理，即静态处理。在这种信号处理过程中，有用信号和无用噪声的统计特性可与它们的频域特性联系起来，因此与经典滤波器在概念上还有一定的联系。

由于军事上的需要，维纳滤波器在第二次世界大战期间得到了广泛的应用。但是，维纳滤波器有如下不足之处：第一，必须利用全部的历史观测数据，存贮量和计算量都很大；第二，当获得新的观测数据时，没有合适的递推算法，必须进行重新计算；第三，很难用于非平稳过程的滤波。

为了克服维纳滤波器的上述不足之处，卡尔曼等人在维纳滤波的基础上，于 60 年代初提出了一种递推滤波方法，称为卡尔曼滤波。与维纳滤波不同，卡尔曼滤波是对时变统计特性进行处理。它不是从频域，而是从时域的角度出发来考虑问题。20 多年来，卡尔曼滤波已在各个领域中得到了广泛的应用。

本书将从经典模拟滤波器的上述两个发展方向出发，分别对数字滤波和卡尔曼滤波加以介绍。

第一章　数字滤波的分析工具

一个滤波器或滤波系统，可从时域和频域两个不同角度来描述。对模拟滤波器而言，其时域描述要用到微分方程，其频域描述要用到拉氏变换。对数字滤波器而言，其时域和频域描述则要分别用到差分方程和 Z 变换。

本章着重介绍了数字滤波的两个重要分析工具——差分方程和 Z 变换，并在剖析它们与微分方程和拉氏变换的内在联系和基础上，从大家熟知的模拟滤波器出发，引出了数字滤波器的概念和分析方法。

第一节　差分方程

一、差分

设 $y = f(x)$ 为自变量 x 的函数，而自变量 x 的取值是离散的，如可取 $\cdots -1,0,1,2,\cdots$ 等。

现取 Δx 作为 x 取值变化的步长。若 x 自某值 a 变到另一值 $a+\Delta x$ 时，y 的增量为 Δy，则 Δy 就称为 y 在 $x=a$ 处的差分，而 Δx 就称为自变量 x 的差分。

显然，当 $\Delta x \to 0$ 时，差商 $\Delta y/\Delta x$ 即为我们所熟悉的微商或导数。但是，在差分问题中，Δx 不是一个无穷小量，而是一个有限值。因 Δx 为一有限值，故通常又称有限差分（finite difference）。

我们一般把自变量 x 的差分 Δx 取作 1。这样做，并不影响

其一般性。当自变量的差分不为 1 时，我们可通过对自变量进行线性变换而使 Δx 变成 1。

若将函数 $y = f(x)$ 在 $x = x$ 处之值记作 y_x，在 $x = x + \Delta x = x + 1$（注意：我们已令 $\Delta x = 1$）处之值记作 y_{x+1}，则函数 $y = f(x)$ 在 $x = x$ 处的差分 Δy_x 为

$$\Delta y_x = y_{x+1} - y_x \tag{1.1}$$

二、高阶差分

由于(1.1)式中的 Δy_x 一般仍为 x 的函数，故仍可继续对其求差分，并用 $\Delta^2 y_x$ 来表示

$$\begin{aligned}\Delta^2 y_x &= \Delta(\Delta y_x) \\ &= \Delta y_{x+1} - \Delta y_x \\ &= y_{x+2} - y_{x+1} - (y_{x+1} - y_x) \\ &= y_x + - 2y_{x+1} + y_x \end{aligned} \tag{1.2}$$

公式(1.2)中 $\Delta^2 y_x$ 称为 y 在 $x = x$ 处的二阶差分，而公式(1.1)中的 Δy_x 则称为 y 在 $x = x$ 处的一阶差分。

用类似的方法，我们还可求出 y 在 $x = x$ 处的三阶差分、四阶差分…等高阶差分。

y 在 $x = x$ 处的 n 阶差分的一般表达式为

$$\begin{aligned}\Delta^n y_x &= \Delta^{n-1} y_{x+1} - \Delta^{n-1} y_x \\ &= y_{x+n} - \binom{n}{1} y_{x+n-1} + \binom{n}{2} y_{x+n-2} \\ &\quad - \binom{n}{3} y_{x+n-3} + \cdots + (-1)^{n-1} \binom{n}{n-1} y_{x+1} \\ &\quad + (-1)^n y_x \end{aligned} \tag{1.3}$$

式中：

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

反之，y 的各个值 $y_{x+1}, y_{x+2}, \cdots$ 等，也可用 y_x 和它的各阶差分来表示

$$\left.\begin{aligned}
&y_{x+1} = y_x + \Delta y_x \\
&y_{x+2} = y_{x+2}\Delta y_x + \Delta^2 y_x \\
&\cdots\cdots \\
&y_{x+n} = y_x + \binom{n}{1}\Delta y_x + \binom{n}{2}\Delta^2 y_x + \cdots + \binom{n}{n-1}\Delta^{n-1} y_x
\end{aligned}\right\} \quad (1.4)$$

三、差分方程

若某方程除了含有自变量 x 和其函数 y_x 外，还含有 y_x 的差分 $\Delta y_x, \Delta^2 y_x, \cdots$ 等，则此方程就称为差分方程，并可用下式表达

$$\Phi(x, y_x, \Delta y_x, \Delta^2 y_x, \cdots, \Delta^n y_x) = 0 \qquad (1.5)$$

若取 $\Delta x = 1$，并利用(1.1)～(1.3)式将 $\Delta y_x, \Delta^2 y_x, \cdots$ 等分别用 $y_x, y_{x+1}, \cdots$ 的多项式来表示，然后代入(1.5)式，则可得到

$$F(x, y_x, y_{x+1}, y_{x+2}, \cdots, y_{x+n}) = 0 \qquad (1.6)$$

显然，(1.6)式与(1.5)式是完全等价的。但是，由于用(1.6)式的形式来表达的差分方程较易处理，故我们常在实际应用时将其写成(1.6)式的形式。

例如，有一个以(1.5)式形式表达的差分方程

$$\Delta^2 y_x - 2\Delta y_x + y_x = 0$$

我们就可以利用(1.1)和(1.2)式将其改写成如(1.6)式的形式，即

$$y_{x+2} - 4y_{x+1} + 4y_x = 0$$

和微分方程类似，差分方程也有阶数之分。但是，差分方

程的阶数不能由其所含差分的最高阶数来定，而必须根据方程中 y 的下标的最大者与最小者之差来定。

例如，有一差分方程

$$ay_{x+2} + by_x + cy_{x-1} + d = 0$$

因为 2－(－1)＝3，故此差分方程是一个三阶差分方程，而不是一个二阶差分方程。

又如，有一差分方程

$$\Delta^3 y_x + y_x + c = 0$$

由于 $\Delta^3 y_x = y_{x+3} - 3y_{x+2} + 3y_{x+1} - y_x$，故此差分方程可写作

$$y_{x+3} - 3y_{x+2} + 3y_{x+1} + c = 0$$

因 3－1＝2，故此差分方程是一个二阶差分方程，而不是一个三阶差分方程。

四、前向差分和后向差分

我们在前面用(1.1)式来定义的差分 Δy_x，即

$$\Delta y_x = y_{x+1} - y_x$$

一般称作前向差分(forward difference)。

与前向差分相对应，还有后向差分(backward difference)。后向差分的定义可由下式给出

$$\Delta y_x = y_x - y_{x-1} \tag{1.7}$$

显然，只要用 $y_x, y_{x-1}, \cdots$ 等代替 $y_{x+1}, y_x, \cdots$ 等，则前面对前向差分所导出的许多公式也适用于后向差分。

例如，(1.2)式对二阶前向差分给出

$$\Delta^2 y_x = y_{x+2} - 2y_{x+1} + y_x$$

对二阶后向差分，此式则应改写为

$$\Delta^2 y_x = y_x - 2y_{x-1} + y_{x-2}$$

要注意：在研究滤波问题时，我们在习惯上一般采用后向

差分。

第二节　从模拟滤波器到数字滤波器

一提到滤波器，我们马上就会想到RC和LRC这样一些典型的模拟滤波电路。在连续时间系统中，我们所熟悉的上述这样一些模拟滤波器都是用微分方程来描述其输入和输出信号之间的动态变化规律、并据此对它们作出定量分析的。

与模拟滤波器是一种对输入模拟信号（时间和量值皆连续取值的信号）进行连续时间处理的系统相对应，数字滤波器则是一种对输入离散时间信号（可以是离散时间序列或是由连续时间信号经取样得到的取样序列）进行离散时间处理的系统。

我们在上一节中曾谈到：微分和差分、微商（导数）和差商的区别，仅在于自变量 x 的增量 Δx 是一个无穷小量还是一个有限量。

对一个连续时间函数 $y = f(t)$ 来说，作为自变量的时间 t 是连续变化的，其变化增量可以是一个无穷小量。因此，我们可以求其对自变量 t 的导数，即

$$\frac{df}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t} \text{（前向）}$$

或

$$\frac{df}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t) - f(t - \Delta t)}{\Delta t} \text{（后向）}$$

对一个连续时间系统来说，其输入和输出信号 $x(t)$ 和 $y(t)$ 都是连续时间函数。因此，它们之间的动态变化规律可用

微分方程来表述，即系统的数学模型为一微分方程或微分方程组。

但是，对一个离散时间系统来说，其输入和输出信号 $x(t)$ 和 $y(t)$ 的自变量 t 的取值是离散的，其变化增量不可能是一个无穷小量，而是一个有限量。此时，我们不可能求得输入和输出信号对 t 的导数，而只能求得它们的差分或差商。因此，离散时间系统的输入和输出信号之间的动态变化规律是用差分方程来表述的，即系统的数学模型为一差分方程或差分方程组。

我们对如何用微分方程来描述模拟滤波器的输入和输出之间的动态变化规律是熟悉的。那么，如何用差分方程来描述数字滤波器的输入和输出之间的动态变化规律呢？

为了引入数字滤波的概念和分析方法，让我们从较为熟悉的模拟滤波器出发，对如下两个例子作一考察。

例一：图 1.1 所示的是一个典型的一阶 RC 滤波电路。

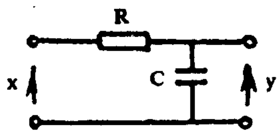

图 1.1　一阶 RC 滤波电路

该滤波器的输入 x 和输出 y 之间的动态变化规律可用如下的一阶微分方程来表述

$$RC\frac{dy}{dt} + y = x \tag{1.8}$$

若输入为一单位阶跃电压，且初始条件为零，则微分方程(1.8)的解可用图 1.2 来表示。

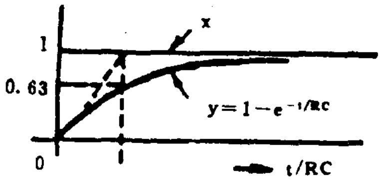

图 1.2　一阶 RC 滤波器对单位阶跃输入的时域响应

下面，让我们将(1.8)式改写成差分方程的形式。

我们知道，在微积分学中微商(导数)是通过极限来定义的。若取其达到极限之前的形式，即可得到微商的差商近似。若用差分的有限运算代替微分的极限运算(用数值方法解微分方程就是这样做的)，则可将(1.8)式近似写成

$$RC\,\frac{\Delta y_k}{\Delta t} + y_k = x_k$$

采用后向差分，可得

$$RC\,\frac{y_k - y_{k-1}}{\Delta t} + y_k = x_k$$

再解出 y_k，得

$$y_k = \frac{1}{1+\Delta t/RC}\;y_{k-1} + \frac{\Delta t/RC}{1+\Delta t/RC}\;x_k$$

利用近似公式

$$(1+\Delta t/RC)^{-1} \doteq 1 - \Delta t/RC$$

可得

$$y_k = a_0 x_k + b_1 y_{k-1} \tag{1.9}$$

式中：$a_0=\Delta t/RC$，$b_1=1-a_0$。

现在，我们要对下标 k 作一点说明：

在连续时间系统中，时间增量一般是用 Δt 来表示的。但在数字滤波中，我们则采用取样周期 T，即令 $\Delta t = T$。为了简

化，我们可用$x(k)$来表示在$t=kT$时刻的输入信号的取样值，其中k为整数(对因果或有始序列，$k=0,1,2,\cdots$)，而T可略去不写，即令$T=1$(相当于上一节中令$\Delta x=1$)。同样，我们也可把在$t=kT$时刻的输出写成$y(k)$。

把$t=kT$时刻的输入和输出写成$x(k)$和$y(k)$，而不写成x_k和y_k，有以下几点好处：

第一，可保留与连续时间函数$x(t)$和$y(t)$相似的表述形式；

第二，便于推广，从而用以表示状态参量，如：$x_1(k)$、$x_2(k)$、…，其中下标1、2表示状态；

第三，便于构成象$x(N-\frac{1}{2})$这样一类较为复杂的表述形式。

采用上述表述方式，我们可将(1.9)式改写成如下形式

$$y(k)=a_ox(k)+b_1y(k-1) \qquad (1.10)$$

显然，这是一个一阶差分方程。

根据(1.10)式，我们可将图1.1所示的一阶RC滤波电路画成如图1.3所示的离散时间等效框图。

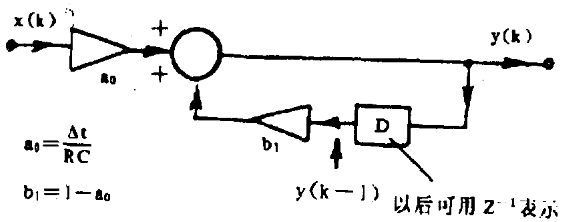

图1.3　一阶RC滤波电路的离散时间等效框图

在图1.3中：圆圈代表加法器，三角形代表标量乘法器，