常微分方程定性理论

王辉丰　余澍祥 著

广东高等教育出版社

常微分方程定性理论

王辉丰　余澍祥　著

广东高等教育出版社
1996

图书在版编目(CIP)数据

常微分方程定性理论/王辉丰　余澍祥 著．—广州：广东高等教育出版社，1996．3
ISBN7—5361—1834—1/O·60

Ⅰ．常…　Ⅱ．①王…　②余…　Ⅲ．①平面定性理论②环面上动力系统　Ⅳ．0175．13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(96)第 03857 号

广东高等教育出版社出版发行
(广州市广州体育学院 20 幢　邮码：510076)
海南农垦报社印刷厂印刷　广东省新华书店经销
850×1168 毫米　32 开本　13.75 印张　34 5 千字
1996 年 3 月第 1 版　1996 年 3 月第 1 次印刷
印数：0001—2000 册　定价：精装 18.90 元，平装 16.80 元

前　　言

本书是根据王辉丰在海南师范学院数学系开设的常微分方程定性理论课所写的讲义《平面定性理论基础》修改、扩充而成的，它可供高等院校有关专业的高年级学生、研究生以及科研人员参考．也可作为研究生教材．

本书前三章的基本内容是平面定性理论的基础．第一章介绍常微分方程组解的存在性、唯一性、延拓性和解对初值的连续依赖性、可微性以及平面自治系统的极限集理论．第二章介绍平面奇点、无穷远奇点和奇点指数等问题．第三章介绍极限环的存在性、唯一性、稳定性以及某些类型非线性方程的极限环等问题．第四章介绍孤立块理论的一些基本概念以及它在连结奇点轨线的存在性问题上的应用，这些是微分方程定性理论中比较新的课题，后面附的参考文献为进一步了解这一有重要意义的主题提供了线索．第五章介绍环面上动力系统（连续流）的古典理论和若干较新的研究课题，这一章的主题在微分方程定性理论中是重要的．

本书第一章到第三章（除个别内容外）由王辉丰执笔，第四章和第五章由余澍祥执笔，限于我们的学识水平，书中难免有错误及不妥之处，恳切希望读者批评指正．

在本书写作和出版的过程中，得到吴葵光、王东清、李业安、陈洪清、符积文、肖家兴、严昌学、詹尊楷和郑作环等先生的关怀和支持，在此谨致以衷心的谢意．

作　者

1995 年 3 月 18 日

目　录

第一章　微分方程组解的基本定理

§1　存在唯一性定理

我们将讨论常微分方程组

$$\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t} = f_i(t, x_1, \cdots, x_n) \qquad (i = 1, \cdots, n), \qquad (E)$$

其中$(t, x_1, \cdots, x_n)$为实欧几里得空间R^{n+1}的点，$f_1, \cdots, f_n$为定义在某一区域$G \subset R^{n+1}$中的实连续函数.（在下面，说到空间中的区域均指开的连通集合. 区域加上它的边界叫做闭区域.）

如果存在t的区间I以及定义在I上的n个可微函数$\varphi_1(t)$，$\cdots$，$\varphi_n(t)$使得满足如下两个条件：

(1)　$(t, \varphi_1(t), \cdots, \varphi_n(t)) \in G$　　当$t \in I$；

(2)　$\dfrac{\mathrm{d}\varphi_i(t)}{\mathrm{d}t} = f_i(t, \varphi_1(t), \cdots, \varphi_n(t))$　$(i = 1, \cdots, n)$当$t \in I$，

则函数组$(\varphi_1(t), \cdots, \varphi_n(t))$叫做方程组$(E)$在$I$上的一个解.

设$P_0 = (t_0, x_1^0, \cdots, x_n^0)$为$G$中一个给定的点. 所谓$(E)$的初值问题就是找到包含$t_0$的$t$区间$I$上的一个解$(\varphi_1, \cdots, \varphi_n)$使得$\varphi_i(t_0) = x_i^0$　$(i = 1, \cdots, n)$.

为了方便，我们考虑$n \times 1$矩阵(或向量)

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix}, \qquad \dot{x} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \begin{pmatrix} \dfrac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \dfrac{\mathrm{d}x_n}{\mathrm{d}t} \end{pmatrix},$$

$$f(t,x)=\begin{pmatrix}f_1(t,x)\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ f_n(t,x)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}f_1(t,x_1,\cdots,x_n)\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ f_n(t,x_1,\cdots,x_n)\end{pmatrix},$$

于是方程组(E)可写为

$$\dot{x}=f(t,x). \tag{E}$$

(E)在区间I上的一个解就成为定义在I上的具有分量$\varphi_1,\cdots,\varphi_n$的向量函数$\varphi$,并满足

1) $(t,\varphi(t))=(t,\varphi_1(t),\cdots,\varphi_n(t))\in G$ 当$t\in I$;

2) $\dot{\varphi}(t)=f(t,\varphi(t))$ 当$t\in I$.

为了方便,向量x的模通常定义为

$$|x|=\sum_{i=1}^{n}|x_i| \text{ 或 } |x|=\max_{1\leqslant i\leqslant n}(|x_i|),$$

其中$x_1,\cdots,x_n$是x的分量.

定义1.1 方程组(E)在区间I上的一个**ε近似解**是指满足如下三个条件的连续向量函数φ:

(i) $(t,\varphi(t))\in G$ 当$t\in I$;

(ii) φ在I上C^1光滑,可能除了I的有限个点的集合S之外;

(iii) $|\dot{\varphi}(t)-f(t,\varphi(t))|\leqslant\varepsilon$ 当$t\in I-S$.

记$P_0=(t_0,x^0)=(t_0,x_1^0,\cdots,x_n^0)$附近的一个长方体为

$$R:|t-t_0|\leqslant a,|x-x^0|\leqslant b,(a,b>0) \tag{1.1}$$

并设$R\subset G$. 令

$$M=\max_{(t,x)\in R}|f(t,x)|,\quad h=\min\left(a,\frac{b}{M}\right). \tag{1.2}$$

于是成立下面的引理.

引理1.1 设f在R上连续. 于是对于任意给定的一个$\varepsilon>0$,存在(E)的定义在$|t-t_0|\leqslant h$上的ε近似解φ使得$\varphi(t_0)=x^0$.

证 设给定$\varepsilon>0$. 我们来作出在区间$[t_0,t_0+h]$上的ε近似解,对于区间$[t_0-h,t_0]$上的ε近似解可类似地作出.

由于f在R上连续，故它在R上一致连续．因此，对给定的ε，存在$\delta > 0$使得当$(t',x') \in R$，$(t'',x'') \in R$和$|t' - t''| \leqslant \delta$，$|x' - x''| \leqslant \delta$时有

$$|f(t',x') - f(t'',x'')| \leqslant \varepsilon \tag{1.3}$$

现在把区间$[t_0, t_0 + h]$分为n个部分

$$t_0 < t_1 < \cdots < t_n = t_0 + h$$

使得

$$\max|t_k - t_{k-1}| \leqslant \min(\delta, \frac{\delta}{M}). \tag{1.4}$$

通过$A_0 = (t_0, x^0)$作直线$x - x^0 = f(t_0, x^0)(t - t_0)$（写成分量形式为$x_i = x_i^0 + f_i(t_0, x_1^0, \cdots, x_n^0)(t - t_0)$，$i = 1, 2, \cdots, n$）．沿$t$增加的方向，它与超平面$t = t_1$相交于一点$(t_1, x^1)$，即

$$x^1 = x^0 + f(t_0, x^0)(t_1 - t_0), t_0 < t_1.$$

通过点(t_1, x^1)作直线$x - x^1 = f(t_1, x^1)(t - t_1)$，沿$t > t_1$的方向，它与超平面$t = t_2$相交于一点$(t_2, x^2)$，即

$$x^2 = x^1 + f(t_1, x^1)(t_2 - t_1), t_1 < t_2.$$

继续这个过程，经过有限步可得到一条折线，用φ表示，它从(t_0, x^0)出发直到与超平面$t = t_0 + h$相交．这就是所要求的ε近似解．易见，φ可表示为

$$\begin{aligned} &\varphi(t_0) = x^0, \\ &\varphi(t) = \varphi(t_{k-1}) + f(t_{k-1}, \varphi(t_{k-1}))(t - t_{k-1}), \\ &\qquad t_{k-1} < t \leqslant t_k, k = 1, \cdots, n. \end{aligned} \tag{1.5}$$

从φ的作法显然，φ在$[t_0, t_0 + h]$上有分段连续的导数．并且易见，对任意两个$t', t'' \in [t_0, t_0 + h]$成立如下估计式

$$|\varphi(t') - \varphi(t'')| \leqslant M|t' - t''|. \tag{1.6}$$

事实上，设$x(t') = x^i + f(t_i, x^i)(t' - t_i)\quad(t' > t_i)$，$x(t'') = x^j + f(t_j, x^j)(t'' - t_j)\quad(t'' > t_j, j > i)$，于是$x(t'') - x(t') = x^j - x^i + f(t_j, x^j)(t'' - t_j) - f(t_i, x^i)(t' - t_i) = x^j - x^{j-1} + x^{j-1} - \cdots$

$- x^{i+1} + x^{i+1} - x^i + f(t_j,x^j)(t'' - t_j) + f(t_i,x^i)(t_i - t') = f(t_{j-1},x^{j-1})(t_j - t_{j-1}) + \cdots + f(t_i,x^i)(t_{i+1} - t_i) + f(t_j,x^j)(t'' - t_j) + f(t_i,x^i)(t_i - t')$，故 $|x(t'') - x(t')| \leqslant M|t_j - t_{j-1} + \cdots + t_{i+1} - t' + t'' - t_j| = M|t'' - t'|$. 这就证明了(1.6). 当 t 满足 $t_{k-1} < t < t_k$ 时，由(1.6)和(1.4)推出

$$|\varphi(t) - \varphi(t_{k-1})| \leqslant \delta,$$

但这时，由(1.5)和(1.3)得到

$$|\dot{\varphi}(t) - f(t,\varphi(t))| = |f(t_{k-1},\varphi(t_{k-1})) - f(t,\varphi(t))| \leqslant \varepsilon.$$

如果令定义 1.1 中的 $S = \{t_0,t_1,\cdots,t_n\}$，$I = [t_0,t_0+h]$，则上式表明当 $t \in I - S$ 时，$|\dot{\varphi}(t) - f(t,\varphi(t))| \leqslant \varepsilon$，即 φ 满足定义 1.1 中的条件(iii). 如上所说，由 φ 的作法知条件(ii)显然满足. 再者，若在(1.6)中令 $t' = t, t'' = t_0$，则得 $|\varphi(t) - x^0| = |\varphi(t) - \varphi(t_0)| \leqslant M|t - t_0| \leqslant Mh \leqslant b$，从而当 $t \in I$ 时有 $(t,\varphi(t)) \in R$，因而条件(i)也满足. 所以 $\varphi(t)$ 就是要求的 ε 近似解. 证毕.

定理 1.1　设 $f(t,x)$ 在长方体 R 上连续，于是存在方程组 (E) 的定义在 $|t - t_0| \leqslant h$ 上的 C^1 光滑解 φ 使得 $\varphi(t_0) = x^0$.

证　我们取一个单调减少的正数序列 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_k,\cdots$，当 $k \to \infty$ 时它趋于零. 由引理 1.1，对于每个 ε_k 存在 (E) 的 ε_k 近似解 $\varphi^k(t)$ 定义在 $|t - t_0| \leqslant h$ 上并满足 $\varphi^k(t_0) = x^0$. 对每个 ε_k，我们选定一个这样的解 $\varphi^k(t)$. 从(1.6)推知，每个 $\varphi^k(t)$ 都满足下式

$$|\varphi^k(t') - \varphi^k(t'')| \leqslant M|t' - t''|, \tag{1.7}$$

其中 M 是与 ε_k 无关的常数，$t', t'' \in [t_0 - h, t_0 + h]$. 在(1.7)中令 $t' = t, t'' = t_0$，并注意到 $|t - t_0| \leqslant \dfrac{b}{M}$，故由(1.7)得到

$$|\varphi^k(t)| \leqslant |\varphi^k(t_0)| + b = |x^0| + b,$$

因而序列 $\{\varphi^k(t)\}$ 在区间 $[t_0 - h, t_0 + h]$ 上是一致有界的. 而且，从(1.7)可见，对任意给定的 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta = \dfrac{\varepsilon}{M}$（$\delta$ 与 $\varphi^k(t)$ 无关），只要 $|t' - t''| < \delta$ 就有 $|\varphi^k(t') - \varphi^k(t'')| \leqslant M|t' - t''| < M\delta =$

ε,其中 $t',t'' \in [t_0-h,t_0+h]$. 因此,$\{\varphi^k(t)\}$ 是等度连续的 . 由 Arzela 定理(这个这理是说,在一有界区间上一致有界和等度连续的无穷函数族 $F=\{f\}$ 必包含一致收敛的函数序列 $\{f_n\}$. 证明可见[1,2]. 对于向量函数的情形,易见,这个定理也成立),在我们的情形,这时只须对 n 个分量函数族 $\{\varphi_i^k(t)\}(i=1,\cdots,n)$ 逐个应用这个定理,从而选出 $\{\varepsilon_k\}$ 的一个子序列 $\{\varepsilon_{n_k}\}$ 使得对应的 ε_{n_k} 近似解的 n 个序列 $\{\varphi_i^{n_k}(t)\}(i=1,\cdots,n)$ 在区间 $[t_0-h,t_0+h]$ 上一致收敛到函数 $\varphi(t)=(\varphi_1(t),\cdots,\varphi_n(t))$. 由于每个 $\varphi^k(t)$ 是连续的,故 φ 也是连续的(实际上,由(1.7)可得 $|\varphi(t')-\varphi(t'')|\leqslant M|t'-t''|$,从而导出 φ 的连续性).

现在来证明,极限函数 $\varphi(t)$ 是(E)的一个解 . 为此,把 ε_k 近似解 $\varphi^k(t)$ 写为下形

$$\varphi^k(t)=x^0+\int_{t_0}^{t}[f(s,\varphi^k(s))+\triangle_k(s)]\mathrm{d}s, \quad (1.8)$$

其中 $\triangle_k(t)=\dot{\varphi}^k(t)-f(t,\varphi^k(t))$,对于 $\dot{\varphi}^k(t)$ 不存在的 t,则令 $\triangle_k(t)=0$. 由 ε 近似解的定义可得 $|\triangle_k(t)|\leqslant\varepsilon_k$. 由于 $f(t,x)$ 在 R 上一致连续,并且当 $k\to\infty$ 时在区间 I 上一致地有 $\varphi^{n_k}(t)\to\varphi(t)$,故当 $k\to\infty$ 时在 $[t_0-h,t_0+h]$ 上一致地有 $f(t,\varphi^{n_k}(t))\to f(t,\varphi(t))$. 在(1.8)中用 n_k 代替 k,并令 $k\to\infty$,得到

$$\varphi(t)=x^0+\int_{t_0}^{t}f(s,\varphi(s))\mathrm{d}s. \quad (1.9)$$

从(1.9)可见,$\varphi(t_0)=x^0$,并且对 t 求导数,注意到 $f(t,\varphi(t))$ 是连续函数,故得 $\dot{\varphi}(t)=f(t,\varphi(t))$. 这就证明了 φ 是(E)在 $|t-t_0|\leqslant h$ 上的 C^1 光滑解 . 证毕 .

定理 1.1 通常叫做 Peano 存在定理,它的特点是,在某种意义上说条件最少,只要 $f(t,x)$ 连续就可证得初始值问题解的存在性 . 如果要保证唯一性还要再加其他条件 . 为了讨论解的唯一性,我们先证下面的引理 .

引理 1.2 设φ,ψ和χ是区间$\alpha\leqslant t\leqslant\beta$上的连续(或分段连续)实函数,且$\chi(t)>0$. 则由不等式

$$\varphi(t)\leqslant\psi(t)+\int_\alpha^t\chi(s)\varphi(s)\mathrm{d}s \tag{1.10}$$

可以推出不等式

$$\varphi(t)\leqslant\psi(t)+\int_\alpha^t\chi(s)\psi(s)e^{\int_s^t\chi(u)\mathrm{d}u}\mathrm{d}s. \tag{1.11}$$

证 令$R(t)=\int_\alpha^t\chi(s)\varphi(s)\mathrm{d}s$,并且用$\chi(t)$乘(1.10)两边,即得不等式

$$\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t}-\chi(t)R(t)\leqslant\chi(t)\psi(t),$$

再用$e^{\int_t^\alpha\chi(u)\mathrm{d}u}$乘上式两边,得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(R(t)e^{\int_t^\alpha\chi(u)\mathrm{d}u}\right)\leqslant\chi(t)\psi(t)e^{\int_t^\alpha\chi(u)\mathrm{d}u}.$$

将上式从α到t积分,并注意$R(\alpha)=0$,得到

$$R(t)e^{\int_t^\alpha\chi(u)\mathrm{d}u}\leqslant\int_\alpha^t\chi(s)\psi(s)e^{\int_s^\alpha\chi(u)\mathrm{d}u}\mathrm{d}s,$$

或

$$\begin{aligned}R(t)&\leqslant e^{\int_\alpha^t\chi(u)\mathrm{d}u}\int_\alpha^t\chi(s)\psi(s)e^{\int_s^\alpha\chi(u)\mathrm{d}u}\mathrm{d}s\\&=\int_\alpha^t\chi(s)\psi(s)e^{\int_s^t\chi(u)\mathrm{d}u}\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

上式与(1.10)式一起即导出(1.11). 证毕.

设向量函数$f(t,x)$定义在(t,x)空间的区域G中. 如果存在常数$L>0$使得对G中每一对(t,x)和$(t,\widetilde{x})$有

$$|f(t,x)-f(t,\widetilde{x})|\leqslant L|x-\widetilde{x}|, \tag{1.12}$$

则我们说$f(t,x)$在G中(关于x)满足Lipschitz条件,L叫做(f在G中的)Lipschitz常数.

引理 1.3 设$f(t,x)$在区域G中连续且满足Lipschitz条件,$\varphi_1(t)$与$\varphi_2(t)$分别是方程组(E)在区间(a,b)上的ε_1与ε_2近似解,且对某个$\tau(a<\tau<b)$成立不等式

$$|\varphi_1(\tau)-\varphi_2(\tau)|\leqslant\delta, \tag{1.13}$$

其中 $\delta\geqslant 0$. 于是对所有 $t\in(a,b)$ 成立不等式

$$|\varphi_1(t)-\varphi_2(t)|\leqslant\delta e^{L|t-\tau|}+\frac{\varepsilon}{L}(e^{L|t-\tau|}-1), \tag{1.14}$$

这里 $\varepsilon=\varepsilon_1+\varepsilon_2$,$L$ 是 Lipschitz 常数.

证 我们将对 $\tau\leqslant t<b$ 的 t 值来证明引理;对于 $a<t\leqslant\tau$ 的情形,证明是类似的. 根据 ε 近似解的定义,对于 $\tau\leqslant s<b$ 中的一切 s,最多除了有限个点之外,有

$$|\dot{\varphi}_i(s)-f(s,\varphi_i(s))|\leqslant\varepsilon_i. \qquad (i=1,2) \tag{1.15}$$

将上式从 τ 到 t 积分,得到

$$|\varphi_i(t)-\varphi_i(\tau)-\int_\tau^t f(s,\varphi_i(s))\mathrm{d}s|\leqslant\varepsilon_i(t-\tau)\quad(i=1,2).$$

把指标 $i=1$ 和 $i=2$ 的两不等式相加,得到

$$\sum_{i=1}^{2}|\varphi_i(t)-\varphi_i(\tau)-\int_\tau^t f(s,\varphi_i(s))\mathrm{d}s|\leqslant\sum_{i=1}^{2}\varepsilon_i(t-\tau)=\varepsilon(t-\tau).$$

再在上式左边应用不等式 $|x-y|\leqslant|x|+|y|$,得到

$$|(\varphi_1(t)-\varphi_2(t))-(\varphi_1(\tau)-\varphi_2(\tau))-\int_\tau^t[f(s,\varphi_1(s)) - f(s,\varphi_2(s))]\mathrm{d}s|\leqslant\varepsilon(t-\tau) \tag{1.16}$$

令 $r(t)=|\varphi_1(t)-\varphi_2(t)|$,并应用 $|x-y|\geqslant|x|-|y|$ 等不等式,从(1.16) 得到

$$r(t)\leqslant r(\tau)+\int_\tau^t|f(s,\varphi_1(s))-f(s,\varphi_2(s))|\mathrm{d}s+\varepsilon(t-\tau),$$

再在上式中应用 Lipschitz 条件,得到

$$r(t)\leqslant r(\tau)+L\int_\tau^t r(s)\mathrm{d}s+\varepsilon(t-\tau). \tag{1.17}$$

对(1.17) 应用引理 1.2,其中的 $\varphi(t)$ 取为 $r(t)$,$\psi(t)=r(\tau)+\varepsilon(t-\tau)$,$\chi(t)=L$,$\alpha=\tau$,于是得到

$$r(t)\leqslant\delta e^{L(t-\tau)}+\frac{\varepsilon}{L}(e^{L(t-\tau)}-1).$$

这就是在区间$[\tau,b)$ 上的结果. 对区间$(a,\tau]$ 也有类似式子. 从而

得到(1.14). 证毕.

从引理 1.3 立即得到如下的唯一性定理.

定理 1.2 设 $f(t,x)$ 在区域 G 中连续且满足 Lipschitz 条件. 如果 φ_1 和 φ_2 是方程组(E)在(a,b)上的满足条件 $\varphi_1(t_0)=\varphi_2(t_0)=x^0(a<t_0<b,(t_0,x^0)\in G)$ 的任意两个解,则 $\varphi_1(t)=\varphi_2(t)$ 当 $t\in(a,b)$.

证 对于 φ_1 和 φ_2 应用引理 1.3,注意到 $\delta=\varepsilon=0$,从而由(1.14)推出 $\varphi_1=\varphi_2$. 证毕.

下面是用 Picard 的逐次逼近法证明的存在唯一性定理. 设 t_0, x^0,R,M,h 如(1.1)和(1.2)所表示的意义. 所谓方程组(E)的逐次逼近序列就是由下列公式逐次给出的函数 $\varphi_0,\varphi_1,\cdots$:

$$\varphi_0(t)=x^0$$

$$\varphi_{k+1}(t)=x^0+\int_{t_0}^{t}f(s,\varphi_k(s))\mathrm{d}s \tag{1.18}$$

$$(k=0,1,2,\cdots,|t-t_0|\leqslant h).$$

定理 1.3 设 f 在 R 上连续并满足 Lipschitz 条件. 于是,逐次近似 φ_k 在 $|t-t_0|\leqslant h$ 上存在且连续,并且在这区间上一致收敛于方程组(E)的唯一解 φ 使得 $\varphi(t_0)=x^0$.

证 我们将对$[t_0,t_0+h]$上的 t 值来证明定理;对于$[t_0-h,t_0]$上的情形证明类似.

我们先来证明每一个 φ_k 在$[t_0,t_0+h]$上存在且 $\varphi_k\in C^1$,并有估计式

$$|\varphi_k(t)-x^0|\leqslant M(t-t_0),\text{当 } t\in[t_0,t_0+h]. \tag{1.19}$$

事实上,$\varphi_0=x^0$ 显然满足上述条件. 现在设 φ_k 满足,则由(1.19)知,当 $t\in[t_0,t_0+h]$时有 $|\varphi_k(t)-x^0|\leqslant M(t-t_0)\leqslant Mh\leqslant M\cdot\dfrac{b}{M}=b$,这表示 $\varphi_k(t)$ 位于长方体 R 中. 于是 $f(t,\varphi_k(t))$ 在$[t_0,t_0+h]$上定义且连续. 因此,从(1.18)知 φ_{k+1} 在$[t_0,t_0+h]$上存在且 $\varphi_{k+1}\in C^1$,并有估计 $|\varphi_{k+1}(t)-x^0|\leqslant M(t-t_0)$. 从而由归纳

法推出所有的 φ_k 也满足上述条件.

现在来证明 φ_k 的收敛性. 令

$$\Delta_k(t) = |\varphi_{k+1}(t) - \varphi_k(t)| \qquad 当 t \in [t_0, t_0 + h].$$

于是从(1.18),将对应于 $k+1$ 和 k 的两式相减,得到

$$\varphi_{k+1}(t) - \varphi_k(t) = \int_{t_0}^{t} [f(s, \varphi_k(s)) - f(s, \varphi_{k-1}(s))] \mathrm{d}s,$$

再应用 $f(t,x)$ 在 R 上满足Lipschitz条件的假设(记Lipschitz常数为 L),得到

$$\Delta_k(t) \leqslant L \int_{t_0}^{t} \Delta_{k-1}(s) \mathrm{d}s. \tag{1.20}$$

在(1.19) 中令 $k=1$,得到

$$\Delta_0(t) = |\varphi_1(t) - \varphi_0(t)| = |\varphi_1(t) - x^0| \leqslant M(t - t_0),$$

从而由(1.20) 得到如下估计式

$$\Delta_1(t) \leqslant L \int_{t_0}^{t} \Delta_0(s) \mathrm{d}s \leqslant LM \int_{t_0}^{t} (s - t_0) \mathrm{d}s = ML \cdot \frac{(t - t_0)^2}{2}.$$

反复应用(1.20),由归纳法可得

$$\Delta_k(t) \leqslant \frac{M}{L} \cdot \frac{L^{k+1}(t - t_0)^{k+1}}{(k+1)!}, \qquad 当 t \in [t_0, t_0 + h].$$

这就表示,级数 $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \Delta_k(t)$ 的每一项都小于或等于函数 $\frac{M}{L}(e^{Lh} - 1)$ 的幂级数展开的相应项,因此,级数 $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \Delta_k(t)$ 在 $[t_0, t_0 + h]$ 上一致收敛. 从而级数

$$\varphi_0(t) + \sum_{k=0}^{\infty} (\varphi_{k+1}(t) - \varphi_k(t))$$

在 $[t_0, t_0 + h]$ 上绝对且一致收敛,故它的部分和

$$\varphi_0(t) + \sum_{k=0}^{n-1} (\varphi_{k+1}(t) - \varphi_k(t)) = \varphi_n(t)$$

在 $[t_0, t_0 + h]$ 上一致趋于连续的极限函数 φ.

现在来证明,这个极限函数 φ 是方程组(E) 的解. 事实上,因

为所有 $\varphi_k(t)$ 都在长方体 R 内，故 φ 也是．因此 $f(s,\varphi(s))$ 在 $s\in[t_0,t_0+h]$ 上存在．由于 f 在 R 上满足 Lipschitz 条件，故有

$$
\begin{aligned}
&\left|\int_{t_0}^{t}[f(s,\varphi(s))-f(s,\varphi_k(s))]\mathrm{d}s\right| \\
\leqslant &\int_{t_0}^{t}|f(s,\varphi(s))-f(s,\varphi_k(s))|\mathrm{d}s \\
\leqslant &L\int_{t_0}^{t}|\varphi(s)-\varphi_k(s)|\mathrm{d}s.
\end{aligned}
$$

由于在 $[t_0,t_0+h]$ 上当 $k\to\infty$ 时一致地有 $|\varphi(s)-\varphi_k(s)|\to 0$，因而，上面不等式表明，在(1.18)中令 $k\to\infty$ 时得到

$$
\varphi(t)=x^0+\int_{t_0}^{t}f(s,\varphi(s))\mathrm{d}s \qquad 当\ |t-t_0|\leqslant h.
$$

这就证明了 $\varphi(t)$ 是方程组(E)的解，它满足条件 $\varphi(t_0)=x^0$. 由定理 1.2 知，解 $\varphi(t)$ 是唯一的．证毕．

§2　解的延拓

仍用 §1 中的记号，设方程组(E)的右边函数 $f(t,x)$ 在某区域 $G\subset R^{n+1}$ 中连续，由存在定理知道，(E) 有解 $\varphi(t)$ 通过给定点 $(t_0,x^0)\in G$. 设 $\varphi(t)$ 在某一有限区间 (t_1,t_2) 上存在，$t_1<t_0<t_2$. 又设 $f(t,x)$ 在 G 上是有界的，即存在 $0<M<\infty$ 使得 $|f|<M$. 于是成立如下的定理．

定理 2.1　设 $f(t,x)$ 在区域 G 中连续，并设 f 在 G 上是有界的．如果 φ 是方程组(E)在区间 (t_1,t_2) 上的解，则极限 $\varphi(t_1+0)$ 和 $\varphi(t_2-0)$ 存在．如果 $(t_2,\varphi(t_2-0))$（或 $(t_1,\varphi(t_1+0))$）在 G 中，则解 φ 可以延拓到 t_2 的右边（或 t_1 的左边）.

证　由于 $\varphi(t)$ 可表为

$$
\varphi(t)=x^0+\int_{t_0}^{t}f(s,\varphi(s))\mathrm{d}s \qquad 当\ t\in(t_1,t_2),
$$

故如果 $t_1<t'<t''<t_2$，则有

$$|\varphi(t') - \varphi(t'')| \leqslant \int_{t'}^{t''} |f(s,\varphi(s))|\mathrm{d}s \leqslant M|t'' - t'|.$$

因此,当 t' 和 t'' 趋于 $t_1 + 0$ 时,$\varphi(t') - \varphi(t'') \to 0$. 由 Cauchy 收敛性准则,这就推出 $\varphi(t_1 + 0)$ 存在;同理可证,$\varphi(t_2 - 0)$ 也存在.

假定点 $(t_2,\varphi(t_2 - 0))$ 位于 G 中. 这时我们定义函数 $\tilde{\varphi}(t)$ 使得

$$\tilde{\varphi}(t) = \varphi(t) \qquad \text{当 } t \in (t_1,t_2),$$

$$\tilde{\varphi}(t) = \varphi(t_2 - 0) \qquad \text{当 } t = t_2,$$

于是 $\tilde{\varphi}(t)$ 是 (E) 在 $(t_1,t_2]$ 上的 C^1 光滑解. 事实上,由定义 $\tilde{\varphi}$ 可表为

$$\tilde{\varphi}(t) = x^0 + \int_{t_0}^{t} f(s,\tilde{\varphi}(s))\mathrm{d}s \qquad \text{当 } t \in (t_1,t_2],$$

由此推出 $\tilde{\varphi}$ 在 $t = t_2$ 的左导数 $\dot{\tilde{\varphi}}_-$ 存在,且

$$\dot{\tilde{\varphi}}_-(t_2) = \dot{\tilde{\varphi}}(t_2 - 0) = f(t_2,\tilde{\varphi}(t_2)).$$

函数 $\tilde{\varphi}(t)$ 叫做解 φ 到 $(t_1,t_2]$ 的一个延拓. 由于 $(t_2,\varphi(t_2 - 0))$ 位于 G 中,由存在定理可知,通过这个点方程组 (E) 有解 $\psi \in C^1$ 定义在某区间 $[t_2,t_2 + \beta](\beta > 0)$ 上. 用类似上面的方法可证,这时存在解 φ 到区间 $(t_1,t_2 + \beta]$ 的一个延拓,或者说,φ 能延拓到 t_2 的右边. 对左边情形可类似证明. 证毕.

附注 1 定理 2.1 主要是讨论方程组 (E) 的一个在有限开区间 (t_1,t_2) 上定义的解向左右方延拓的问题. 定理的条件是这个解必须位于 G 中并且 $f(t,x)$ 在 G 上有界. 简单的例子表明,若这个条件不满足,则定理的结论可能不成立. 例如 $n = 1$ 时的方程 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = x^2$,它有一个解 $\varphi(t) = -\frac{1}{t}$ 通过点 $(t_0,x^0) = (-1,1)$,在区间 $(-1,0)$ 上定义,但它不能延拓到 $(-1,0]$. 这是因为解曲线不能被包含在使得 $f(t,x)$ 是有界的区域 G 中.

附注 2 在定理 2.1 条件下,假定 (t_1,t_2) 是 $\varphi(t)$ 的最大存在区间,则显然,点 $(t_2,\varphi(t_2 - 0))$ 和 $(t_1,\varphi(t_1 + 0))$ 必为 G 的边界点.