

● 王 仁  
● 熊祝华 著  
● 黄文彬

# 塑性力学基础

科学出版社

# 塑性数学理论

R. 希尔 著

王 仁 等译

科学出版社

1966

## 内 容 简 介

本书系统地论述塑性力学中的一些基本概念和基本知识，其重点在于从物理概念上说明材料进入塑性阶段以后的特点和从数学上处理此类问题时的一些基本方法，为建筑结构、机械设计、金属压力加工以及地应力场分析等方面处理有关塑性问题打基础。本书也介绍一些新成就，例如：结构的动力响应和有限单元方法。

本书可供高等院校力学专业师生以及有关的科研、工程设计人员参考。

2294/13

## 塑性力学基础

王 仁 熊祝华 黄文彬 著

责任编辑 魏茂乐

科学出版社出版

北京朝阳门内大街137号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

\*

1982年3月第一版 开本：850×1168 1/32  
1982年3月第一次印刷 印张：19  
精 1—3,650 插页：精 2  
印数：平 1—4,220 字数：502,000

统一书号：13031·1821

本社书号：2479·13—2

定价：布脊精装 4.10 元  
平 装 3.50 元

## 序 言

1965—1966年，我们原已准备将几年来给固体力学专业五年级学生用的讲义修改整理后出书，后因种种原因而作罢。现在，为了适应力学专业高年级学生和研究生的教学需要，以及有关研究工作者自学的要求，经过一年多的努力，我们在原有稿件的基础上，做了几次修改和增订，写成本书。

本书偏重于基本理论的阐述，特别注意到先从建立物理概念入手。因此，在第一、二章先讨论一维问题，通过简单的情况介绍塑性力学问题的特点，建立有关的物理概念。它们将帮助读者对后面二、三维问题的理解，达到不为复杂的数学运算而丢失物理本质的目的。在第三、四章中，我们应用张量符号的缩写法则，讨论了一般情况下的应力、应变及本构关系（应力-应变关系的更一般情况）。这固然是因为近代塑性力学文献经常使用它，同时也是为了简化数学方程的书写，突出物理内容。书中适当举了一些计算例题以阐明理论的应用；章末附有习题，书末给出答案，帮助读者自学。

近年来，塑性力学在结构分析，金属压力加工以及其他一些方面有更广泛的应用，在基本理论方面则着重于宏观和微观的结合，从热力学的角度探讨塑性本构关系，以及探讨大变形、动力问题等。本书适当介绍了一些新成就，特别是列入了结构的塑性动力响应和有限单元方法等两章。不过，本书重点仍放在为从事塑性力学的近代工作打好基础之上。章末均给出参考文献供进一步学习之用。

书稿经过殷有泉、王志良、杨桂通及其他一些同志帮助审核，提出了不少宝贵意见，特此致谢。但书中仍难免有不妥和错误的

2012

(虽然数量很少),也用了这个关系. 这些部分在其它书中较少介绍. 虽然这种强化模型已被公认在应力分量的比值变化较大时与实验结果不符,特别是它不能包括 Bauschinger 效应,因而近年来又提出了不少其它强化模型,但是,在常遇到的具体问题的加载过程中(稳定性问题除外),各应力分量的比值实际上变化不大,基本上是合乎这种模型的使用范围的\*. 另外,这种模型迄今还是最便于计算的,在广泛使用了电子计算机以后,现在用这种模型解问题的情形又多起来了.

(4) 作者担任主编的“固体的力学与物理学杂志”(Journal of the Mechanics and Physics of Solids)从 1952 年创刊以来,经常发表塑性力学方面的新工作,它们经常以本书为基础,因而将本书译出也会对参阅这些资料有所帮助.

我们最后附译了作者在 1956 年发表的一篇总结性论文,把本书的内容补充到 1954 年底.

当然,本书也有不足之处,就总结当时的学科发展而言,本书没有提及用全量理论解具体问题的方面,也没有讨论当时已取得一定进展的板壳结构的塑性分析问题(参看[2]). 而从近代发展的结果来看,书中有些提法是不够全面的,值得读者注意. 我们将在以下结合近年来塑性力学的概况介绍加以讨论.

本书在讨论一般原理时采用了张量符号的缩写法则,有些读者可能会觉得不习惯. 其实,这里只采用了张量符号而没有应用什么张量运算,只要先把附录一熟悉一下,看书时就不会有多大困难. 熟悉一下这种符号也有好处,因为关于塑性理论基础的文献目前也都用这种符号. 至于在解具体问题时书中仍回复到通常的符号,只须注意这里的剪应变分量  $\gamma_{xy}$ ,  $\gamma_{yz}$ ,  $\gamma_{zx}$  是按张量的分量定义的,因而是通常工程书籍中同一符号的一半即可.

\* 近年来,实验表明,如果将比例极限看作为塑性的开始,则等向强化的模型较差, Bauschinger 效应很显著;但如果允许少量的永久应变(例如 0.05% 或 0.10%)作为塑性的开始,则这模型就能较接近于实验结果. 在工程应用中,通常是把永久应变为 0.2% 作为塑性的开始,这种模型和实验结果就更接近. 这时,这种模型的使用范围可以相当大.

# 目 录

序言	i
译名对照表	viii
<b>第一章 简单应力状态下的弹塑性力学问题</b>	<b>1</b>
§ 1.1 简单拉伸的实验结果	2
§ 1.2 基本假设和简化模型	9
§ 1.3 一个简单桁架的弹塑性平衡	16
§ 1.4 三杆桁架的弹塑性迭代解	21
§ 1.5 三杆桁架在卸载后的残余应力和残余应变	23
§ 1.6 不同加载路径对桁架变形的影响	25
§ 1.7 自然应变,轴向拉伸的塑性失稳	29
§ 1.8 三杆桁架的大变形分析	31
附录 塑性变形的物理基础	34
参考文献	43
第一章习题	44
<b>第二章 梁的弹塑性弯曲及梁和刚架的极限分析</b>	<b>46</b>
§ 2.1 矩形截面梁的理想弹塑性纯弯曲	46
§ 2.2 梁和刚架的极限载荷和极限分析	57
§ 2.3 极限载荷的上下限定理	62
§ 2.4 变值加载下结构的塑性破坏	68
§ 2.5 安定状态和安定定理	73
§ 2.6 最轻结构的极限设计	79
§ 2.7 等截面强化直梁的平面弯曲	85
参考文献	89
第二章习题	90
<b>第三章 应力状态和应变状态的分析</b>	<b>92</b>
§ 3.1 应力张量及其不变量	92
§ 3.2 应力偏张量及其不变量,八面体面上的应力	97

§ 3.3 应力空间, $\pi$ 平面 .....	102
§ 3.4 应变张量及其不变量 .....	107
§ 3.5 应变速率张量, 应变增量张量 .....	113
§*3.6 有限变形 .....	115
§ 3.7 运动方程式, 应力增量张量 .....	119
参考文献 .....	122
第三章习题 .....	122
<b>第四章 塑性状态下的基本方程</b> .....	<b>124</b>
§ 4.1 广义虎克定律, 弹性应变能 .....	125
§ 4.2 屈服条件, 屈服曲面 .....	129
§ 4.3 两个常用的屈服条件 .....	134
§ 4.4 加载条件, 加载和卸载准则 .....	140
§ 4.5 几种简化加载曲面 .....	143
§ 4.6 杜拉克(Drucker)强化公设 .....	149
§ 4.7 塑性位势理论, 理想塑性材料的本构关系——增量理论 ..	153
§ 4.8 光滑加载面的塑性增量本构关系 .....	160
§ 4.9 逐段线性加载面的塑性增量本构关系 .....	165
§ 4.10 简单加载时的全量理论 .....	174
§ 4.11 全量理论的适用范围 .....	178
§*4.12 依留辛塑性公设 .....	184
参考文献 .....	187
第四章习题 .....	188
<b>第五章 在复合应力状态下的简单弹塑性问题</b> .....	<b>190</b>
§ 5.1 弹塑性力学的边值问题 .....	190
§ 5.2 薄壁圆筒的拉伸和扭转 .....	192
§ 5.3 平面应变条件下理想刚塑性梁弯曲的一般理论 .....	196
§ 5.4 理想弹塑性厚壁筒的轴对称变形 .....	202
§ 5.5 弹塑性强化厚壁筒的轴对称变形 .....	213
§ 5.6 等厚旋转圆盘的弹塑性变形 .....	220
§ 5.7 柱体的弹塑性自由扭转 .....	224
参考文献 .....	240
第五章习题 .....	241
<b>第六章 理想刚塑性平面应变问题</b> .....	<b>244</b>

§ 6.1	刚塑性平面应变问题的基本特点和基本方程	244
§ 6.2	应力方程式的特征线	249
§ 6.3	特征线(滑移线)的基本性质	251
§ 6.4	简单应力状态	257
§ 6.5	速度场	259
§ 6.6	边界条件	263
§ 6.7	基本的边值问题	268
§ 6.8	数值解方法(差分法)	274
§ 6.9	理想刚塑性平面应变问题的完全解	279
§ 6.10	单面受均匀压力的楔体	279
§ 6.11	半无限刚塑性体上的刚性冲模	285
§ 6.12	具有对称深切口板条的拉伸	288
§ 6.13	具有圆底切口板条的弯曲	291
§ 6.14	定常塑性流动问题——板条的拉薄	296
§ 6.15	速度图	300
§ 6.16	光滑刚性楔体的压入问题——拟定常塑性流动	304
§ 6.17	粗糙刚性平行板间材料的挤压	309
附录	特征线	313
	参考文献	315
	第六章习题	316
<b>第七章</b>	<b>理想刚塑性平面应力问题</b>	<b>320</b>
§ 7.1	刚塑性平面应力情况下的基本方程及其性质	322
§ 7.2	平面应力基本方程的特征线及其性质	326
§ 7.3	特征线上的速度规律及间断解	332
§ 7.4	简单应力状态	339
§ 7.5	有圆孔的无限大板的刚塑性平衡	343
§ 7.6	具有圆孔的无限大板受轴对称的拉伸	348
§ 7.7	考虑到平板厚度变化时,无限平板圆孔内边受均压 $p$ 的问题	352
	参考文献	355
	第七章习题	355
<b>第八章</b>	<b>轴对称问题</b>	<b>356</b>
§ 8.1	基本方程式	357



§ 8.2 圆柱试件的拉伸	365
§ 8.3 通过锥形阴模的拔丝	372
§ 8.4 广义应变和广义应力	381
§ 8.5 圆板的轴对称塑性弯曲(极限分析)	383
§ 8.6 简支圆板的极限载荷	389
§ 8.7 周边固定圆板的极限载荷	392
参考文献	395
第八章习题	396
<b>第九章 弹塑性问题的普遍定理</b>	<b>398</b>
§ 9.1 弹塑性全量理论的最小余能原理	399
§ 9.2 应力空间中的极值路径。极值路径下的最小余能原理	400
§ 9.3 应用全量最小余能原理的简例	408
§ 9.4 全量理论的最小势能原理	412
§ 9.5 应用全量最小势能原理的简例	416
§ 9.6 增量理论的最小余能原理和最小势能原理	422
§ 9.7 增量理论的最小余能原理和最小势能原理的应用	430
§ 9.8 解的唯一性问题	437
参考文献	439
第九章习题	439
<b>第十章 极限平衡理论</b>	<b>441</b>
§ 10.1 极限状态下应力和应变率的特点	442
§ 10.2 塑性极限定理(上下限定理)	444
§ 10.3 上下限定理的推论	446
§ 10.4 多组独立外载的情况	448
§ 10.5 存在有间断场时载荷因子的计算	451
§ 10.6 上下限定理的应用	454
§ 10.7 带有中心圆孔方板的拉伸	461
§ 10.8 方板的极限载荷	466
§ 10.9 理想弹塑性体的安定定理	472
§ 10.10 其它问题,最轻设计,大变形的影响	477
参考文献	479
第十章习题	480
<b>第十一章 结构的塑性动力响应</b>	<b>484</b>

§ 11.1	自由梁在中点冲击力作用下的刚塑性分析 .....	485
§ 11.2	简支梁在冲击载荷作用下的刚塑性分析 .....	493
§ 11.3	圆板在冲击载荷作用下的刚塑性分析 .....	506
§ 11.4	圆板的大挠度刚塑性动力分析 .....	517
§ 11.5	圆板受冲击载荷的其它问题 .....	524
§ 11.6	冲击型载荷作用下刚塑性结构的挠度的上下限定理 .....	528
§ 11.7	结构塑性动力分析的模态法和差分法 .....	537
	参考文献 .....	538
<b>第十二章</b>	<b>塑性力学问题中的有限单元方法</b> .....	<b>540</b>
§ 12.1	线性弹性问题中有限单元方法的概述 .....	540
§ 12.2	非线性方程的解法 .....	544
§ 12.3	简例 .....	552
§ 12.4	弹塑性全量理论的有限单元解法 .....	556
§ 12.5	米塞斯材料增量理论的有限单元解法 .....	558
§ 12.6	屈瑞斯加材料增量理论的有限单元解法 .....	566
§ 12.7	岩土力学中的库伦-摩尔屈服条件和流动法则 .....	572
§ 12.8	能代表岩石节理面的层状材料 .....	581
	参考文献 .....	585
	习题解答 .....	587

## 第一章 简单应力状态下的弹塑性力学问题

在通常的弹性力学中，我们考虑应力和应变服从线性关系的虎克材料。对于实际材料，这个关系只在一定范围内适用，它总是有一个限度的。由这些材料构成的受力物体中，在一般情形下应力分布是不均匀的，有的地方应力很大，很早就达到弹性极限，而在其他地点应力还很低。如果单凭弹性分析来进行设计，那么材料的利用率就可能较低。事实上，在超过弹性极限以后，大多数材料还是能够继续承担应力的，只是对应的应变要大些而且其中有一部分应变不会随应力的消失而恢复，这部分非弹性的变形改变了物体内的应力分配，使物体的其他部分更多地参加到承担外载中去，从而提高整个物体的承载能力。这就是我们为什么要研究材料进入塑性变形状态的第一个原因，也即，要更好地发挥材料的效能和更准确地估计物体的承载能力。这里也包括一类问题本质上就要求研究塑性的，例如，在集中力作用点附近，在裂缝端点附近，按弹性分析应力为无穷大，一开始就有一个塑性变形区域。在抗爆和抗震结构中也有类似情况。另一方面有许多机械加工和成形的工序正是利用变形的不可恢复性，这里特意要使材料超出弹性极限，要求在加工以后达到所要的形状，要探讨怎样的加力方式最省力，能够最好地发挥其变形特性而又不致破裂或按某种方式断裂，对于某些问题还要求知道变形后物体内部的残余应力状态。

为了要进行这些分析，必须首先研究材料在超出虎克定律以后的力学性质和变形规律，以及如何应用这些规律进行分析。在这一章里我们将从最简单的单向应力状态入手，先复习一下常温、静载条件下的圆柱试件拉伸试验，再通过对一个简单桁架的分析说明允许塑性变形时的求解方法，重点在建立有关的物理概念和说明塑性力学问题的特点。

## § 1.1 简单拉伸的实验结果

在材料力学试验中用圆柱形试件可以保证试验段处于均匀应力状态，图 1-1 表示在常温静载下的一条典型拉伸应力-应变曲线。其中  $A$  点是材料的比例极限  $\sigma_p$ ， $B$  点是材料的弹性极限  $\sigma_e$ ，

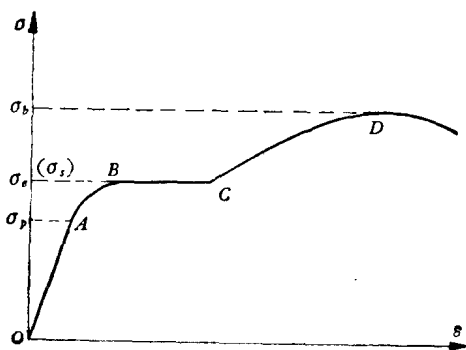


图 1-1

对某些材料如低碳钢，这时出现一段应力不变而应变<sup>1)</sup>可以增长的屈服阶段，故又称为屈服应力  $\sigma_s$ 。在比例极限以前，应力与应变成比例关系，可以严格用虎克定律表示，在  $A$  点以后应力与应变不再成比例，进入了非线性阶段。不过在  $\sigma_e$  以前如果卸除载荷，变形将完全恢复，这正是**弹性**的基本特征。而在应力超过  $\sigma_e$  以后，应力与应变之间也是非线性关系，如果不卸载，尚不能与前一阶段的非线性弹性相区别；但如果卸除载荷，试件将保持一段永久伸长，这一部分变形称为**塑性**变形。因此弹性和塑性的基本区别不在于它们的应力-应变关系是否线性，而在于卸载时，是否保留一个永久变形，以及在卸载过程中应力与应变之间是否仍按照原来的弹性规律变化。变形的不可恢复性是**塑性**的基本特征。弹性极限的确定随着应变测量仪器精度的不同而异，因而一般工程上还约定在永久塑性应变  $=0.2\%$  时的应力为弹性极限  $\sigma_e$  或屈服应力  $\sigma_s$ ，这

1) 在未加特别声明的情况下，应力指条件应力，即载荷被初始截面积除，而应变是指技术应变，即伸长量被初始长度除。

两者在以后将不再区分。

在超过弹性极限以后,如果在任一点  $C$  处卸载,应力与应变之间将不再沿原有曲线退回原点,而是沿一条接近平行于  $OA$  线的  $CFG$  线(图 1-2a)变化,直到应力下降为零,这时应变并不退回到零,  $OG$  是保留下来的永久应变,称为塑性应变,将以  $\epsilon^p$  代表。如果从  $G$  点重新开始拉伸,应力与应变将沿一条很接近于  $CFG$  的线  $GF'C'$  变化,直至应力超过  $C$  点的应力以后才会发生新的塑性变形。看起来在经过前次塑性变形以后,弹性极限提高了,新的弹性极限以  $\sigma_t^+$  代表,为了与初始的屈服应力相区别,也称之为加载应力 ( $\sigma_t^+ > \sigma_s$ ),这种现象称为强化(或硬化)现象。对于低碳钢一类材料,在屈服阶段中,  $\sigma-\epsilon$  曲线在这里是水平的,卸载后重新加载并没有上述强化现象,被称为理想塑性或塑性流动阶段。

线段  $CFG$  和  $GF'C'$  严格讲并不重合,它们组成一个滞后回线,其平均斜率和初始弹性阶段的杨氏模量  $E$  相近。对于一般金属来说,这两条线的差别很小,往往可以忽略不计,从而可将加载卸载的过程理想化为图 1-2b 的形式,并取  $CG$  的斜率  $=E^D$ 。在

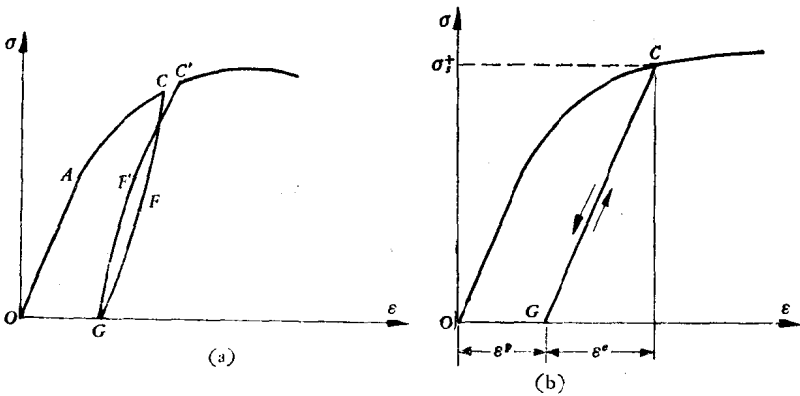


图 1-2

- 1) 如果变形较大,特别是在岩石的情形,这个斜率随着塑性变形的大小而改变,称为弹性和塑性的耦合,这种问题是近几年内研究塑性理论的一个问题,见 [1.1].

CG 段中变形处于弹性阶段,它和 OA 段的区别是多了一个初始应变  $\varepsilon^p$ ,总的应变现在是

$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^p \quad (1)^b$$

其中

$$\varepsilon^e = \sigma/E = \varepsilon - \varepsilon^p \quad (2)$$

所以又有

$$\varepsilon^p = \varepsilon - \sigma/E \quad (3)$$

在 CG 段中  $\varepsilon^p$  不变,在 BCD 曲线上(图 1-1)  $\varepsilon^p$  随着应力而改变,

$$\varepsilon^p = \varepsilon^p(\sigma),$$

D 点是载荷达到最高点时的应力,称为强度极限  $\sigma_b$ 。在 D 点以后条件应力开始下降,不过,实际上由于试件出现颈缩,承载面积减小了,在颈部的真实应力仍在增加,直到最后形成一个杯-锥形的破坏为止。如果材料试验机能够及时降低载荷,我们可以得到 D 点以后的  $\sigma$ - $\varepsilon$  曲线,从而得出最大的真实应力,这一点我们将在 § 1.7 节继续讨论。

以上描述的是简单拉伸实验的过程,在单向压缩的情况下,只要保证试件不失稳,也有类似的现象,压缩时的弹性极限和拉伸时的弹性极限接近相等(图 1-3b 中的 B 与 B' 两点)。

如果在试验中,不单是全部卸去拉伸载荷,而且逐渐在相反方向加上压缩载荷,则从  $\sigma$ - $\varepsilon$  图上可以看到(图 1-3a),在  $\sigma$  轴的负方向,继续有一直线段 GH,以对应于 H 点的应力为  $\sigma_r$ ,当压应力再增长时,将出现压缩的塑性变形。一般地说,  $|\sigma_r| < \sigma_s$ ,这是由于经过拉伸塑性变形后改变了材料内部的微观结构,使得在压缩时的屈服应力有所降低;同样,在压缩时经过压缩塑性变形提高压缩的屈服应力后,拉伸的屈服应力也会有所降低,这种现象叫做包兴格效应,以后简称包氏效应(见图 1-3b)。对某些材料并没有包氏效应,相反,由于拉伸而提高其加载应力时,在压缩时的加载应

1) 在同一章内的方程,我们将按顺序编号,在引用另一章的方程时,在编号前将增加章号,例如引用第八章第 2 式时,则写(8.2)式。

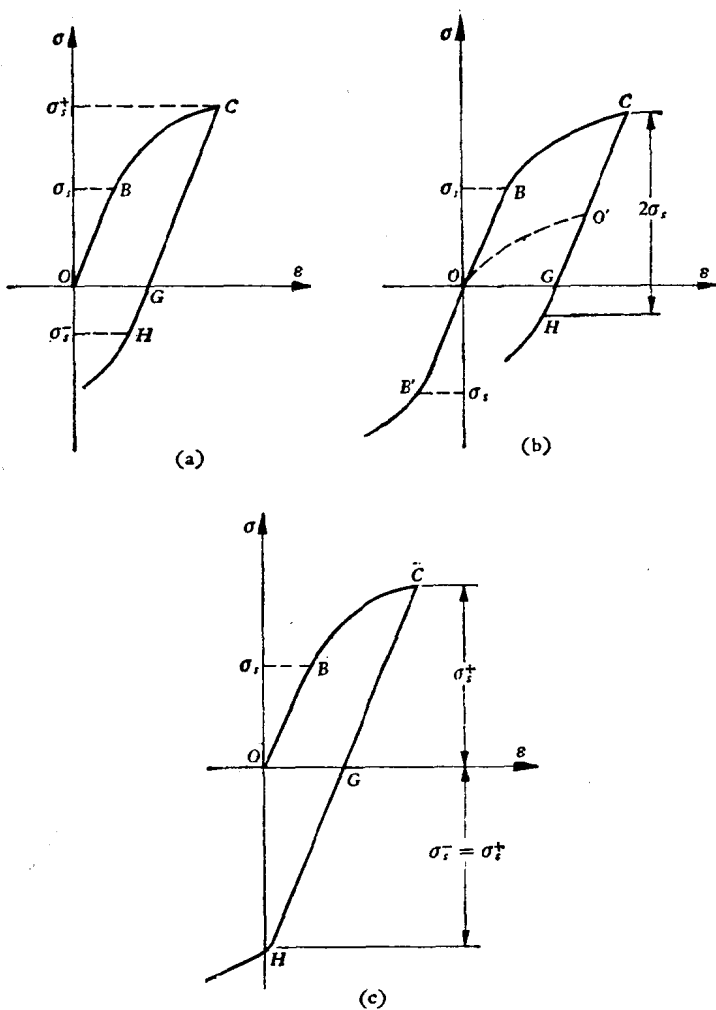


图 1-3

力也同样得到提高,如图 1-3c 所示。这种强化特性叫做等向强化(或各向同性强化),它和单晶体的塑性变形性质有关。

从以上关于单向应力下的变形过程,可以看到材料进入塑性变形状态后的一些特点。

1 要描述材料在塑性变形阶段的应力-应变关系需要知道:

a. 屈服应力或加载应力。它是用来区别材料是处于弹性阶段还是已进入塑性阶段,比它小的应力将不引起新的塑性变形,这时应力增量与应变增量之间完全服从虎克定律,微分(2)式得

$$\frac{d\sigma}{d\varepsilon} = E \quad (4)$$

b. 加载规律。在应力等于屈服应力或加载应力时,应力的变化还有两个可能,如果  $\sigma > 0$ ,  $d\sigma > 0$ , 则为拉伸加载,如果  $\sigma < 0$ ,  $d\sigma < 0$ , 则为压缩加载,总起来可写成  $\sigma d\sigma > 0$  就是加载,将有新的塑性变形,这时需要给出一个  $d\varepsilon$  与  $d\sigma$  之间的关系。若将  $\sigma$ - $\varepsilon$  曲线写成

$$\sigma = f(\varepsilon) \quad (5)$$

那么当  $\sigma = \sigma_i$  (或  $\sigma_r$ ) 时,而且  $\sigma d\sigma > 0$ , 则应该有

$$d\sigma = f'(\varepsilon)d\varepsilon \quad (6)$$

我们将在下一节中写出几种简化模型的  $f(\varepsilon)$  形式。

c. 卸载规律。在应力等于屈服应力或加载应力时,应力变化的另一可能是  $\sigma d\sigma < 0$ , 这就是卸载,这时按照前面的假设,应力与应变之间服从初始时刻的虎克定律关系,仍为(1.4)式。

2 应力与应变之间不再是单值关系。由于在进入塑性阶段以后,加载和卸载的规律不同,对应于同一个应力状态,如果加载的历史不同,所对应的应变就不同。如图 1-4 所示,对应于  $\sigma_M$  若

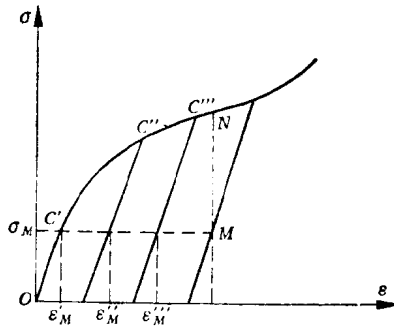


图 1-4



未经过卸载,其应变为  $\epsilon'_M$ ,若先到过  $C''$ ,再从那里卸载,则应变为  $\epsilon''_M$ ,若先到过  $C'''$  再卸载的,则应变为  $\epsilon'''_M \cdots \cdots$ . 同样,对应于一个应变,也可以有许多个应力,如图中的  $M, N$ . 但是这并不是说塑性应力和应变状态就不能唯一确定了. 如果已知从某个初始状态到某瞬时的全部变形(或加载)历史,就可以跟踪求出该瞬时材料中的应力和应变. 对于某瞬时来说,所能知道的是应力增量和应变增量之间的关系如(1.4)与(1.6)式所示. 明确了变形或加载历史,就可以对增量积分求得应力全量与应变全量之间的关系.

3 在塑性变形过程中所做的塑性功也是不可逆的. 我们看到只有在加载时才能够改变塑性变形. 设材料从某个应力状态  $\sigma^0$  开始加载,在到达加载应力后,再增加一个  $d\sigma$ ,它将引起一个新的塑性应变增量  $d\epsilon^p$ . 在这样一个变形过程中,应力做了功,如果现在将应力重新降回到  $\sigma^0$ ,弹性应变将得到恢复,弹性应变能得到释放,然而塑性应变能部分则是不可逆的,在这样一个应力循环过程中,所作的功恒大于零,也即消耗了功. 这个功是消耗于塑性变形的,叫做塑性功<sup>1)</sup>,参看图 1-5,可表示如下:

$$(\sigma - \sigma^0)d\epsilon^p > 0 \quad (7)$$

$$d\sigma d\epsilon^p \geq 0 \quad (8)$$

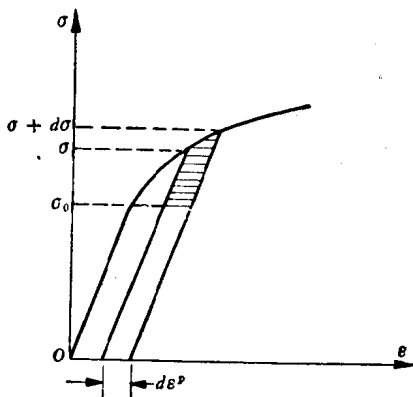


图 1-5

1) 塑性功应为  $\sigma d\epsilon^p$ , 这里指的是附加外力作的塑性功,参考 §4.6.