LITIJIEXIYUXITIJINGXUAN

上册

高等数学例题解析与习题精选

GAO DENG SHU XUE

吉林大学出版社

高等数学例题解析与习题精选

（上册）

主　　编　张国良　赵鸣霖

吉林大学出版社

高等数学例题解析与习题精选

（上册）

主编 张国良 赵鸣霖

责任编辑、责任校对：崔晓光　　封面设计：孙 群

吉林大学出版社出版　　吉林大学出版社发行
（长春市东中华路 37 号）　　吉林农业大学印刷厂印刷

开本：787×1092 毫米 1/16　　1997 年 10 月第 1 版
印张：37　　1997 年 10 月第 1 次印刷
字数：941 千字　　印数：1—5000 册

ISBN 7—5601—2061—S/O·226　　全套共两册：总 定 价：66.00 元
本册定价：37.00 元

高等数学例题解析与习题精选(上册)

编委会(按姓氏笔画排序)

主　　审:李懋和　赵振全
主　　编:张国良　赵鸣霖
副 主 编:李延忠　赵洪波
参编人员:马瑞洁　刘光清　李忠范
李国相　杨　荣　张　衡

前　言

这是献给读者的一套最新版本的工科高等数学复习、考研的辅导用书，并可兼做教师参考用书。

本书系遵照国家教委的高等学校工科数学课程教学指导委员会发布的“高等数学课程教学基本要求”而编写的，且符合硕士研究生入学考试数学Ⅰ的大纲之规定。全书分为上、下两册，在内容上分别覆盖微积分学（亦称高等数学）、线性代数、概率统计三门课程。

近十几年来，高等数学各门课程的参考书、习题集屡见不鲜，但是缺少一部兼容基本概念、基本理论、基本技能、基本训练为一炉且科目齐全的综合性参考书。针对这种情况，本书作者适应广大工科大学生复习、考研的迫切要求，并兼顾数学教师的需要，在内容、结构、体例、题型等方面作了一系列新颖的设计和独特的编排。

全书按上述三门课程依次分章排列，每章由**内容提要**、**例题解析**、**习题精选**三部分组成。其中，“内容提要”包含重要的定义、性质、定理、公式等，是对各章教学内容的高度概括和浓缩；“例题解析”采取全面覆盖和循序递进式，通过大量的精心设计的例题，使读者牢固地掌握基本概念和基本理论，并达到融会贯通，运用自如；“习题精选”汇集了类型广泛，层次各异的习题，供读者动手演练（注意书末附有略解与答案），着重培养分析问题与解决问题的能力，并使读者在巩固基础知识之后，还能继续“拔高”，以便最大限度地增强应试能力。

本书作者来自多所工科高等院校的教学第一线，他们彼此相互

熟悉，在十数年乃至数十年的教学生涯中，特别是在长期组织与辅导考研的过程中，共同切磋，相互借鉴，积累了丰富的经验和巨量的资料，不仅为本书的组稿准备了宝贵而充足的素材，而且为合作编撰打下了全面而坚实的基础。

在酝酿和筹划此书时，正值国家教委发布关于面向21世纪教学内容和课程体系改革的文件，这使每个作者备感如虎添翼。在编写过程中，我们得到吉林大学出版社卓有成效的支持，也得到所在院校有关部门的支持和许多青年教师、大学生的热情鼓励。我们运用集体智慧，通力合作，历时近三年，终于使这部功能齐全，容量浩大，设计别致，结构分明的新著问世了。在此，我们谨向上述各单位、部门和人员表示诚挚的谢意。

最后，我们恳切地欢迎专家和教师同仁以及广大读者对此书提出宝贵的意见。

编委会

1998年1月　于长春

目　　录

第一章　函数　极限　连续

内　容　提　要

1. 函　　数

1）函数的概念

定义 1　设 x 和 y 是两个变量，D 是一个给定的数集. 如果对于每个数 $x\in D$，变量 y 按照一定法则总有确定的数值和它对应，则称 y 是 x 的**函数**，记作 $y=f(x)$. 数集 D 叫做这个函数的**定义域**，x 叫做**自变量**，y 叫做**因变量**.

2）几类特殊的函数

定义 2　设函数 $f(x)$ 在数集 D 上有定义，若存在常数 $M>0$，使得对任意的 $x\in D$，恒有

$$|f(x)|\leqslant M$$

则称函数 $f(x)$ 在 D 上**有界**.

定义 3　设函数 $f(x)$ 在数集 D 上有定义，若对任意的 $x_1<x_2\in D$，恒有

$$f(x_1)\leqslant f(x_2)\text{（或 }f(x_1)\geqslant f(x_2)\text{）}$$

则称函数 $f(x)$ 在 D 上**单调增加**（或**单调减少**）.

单调增加函数与单调减少函数统称单调函数.

定义 4　设函数 $f(x)$ 在某个对称于原点的数集 D 上有定义，若对任意的 $x\in D$，恒有

$$f(-x)=f(x)\text{（或 }f(-x)=-f(x)\text{）}$$

则称函数 $f(x)$ 在 D 上为**偶函数**（或**奇函数**）.

定义 5　设函数 $f(x)$ 在某个数集 D 上有定义，若存在正数 T，使得对任意的 $x\in D$，且 $x+T\in D$，恒有

$$f(x+T)=f(x) \tag{*}$$

则称 $f(x)$ 为**周期函数**，满足（*）式的最小的 T 称作 $f(x)$ 的**周期**.

3）复合函数

定义 6　设 y 是 x 的函数 $y=f(x)$，x 又是 t 的函数 $x=g(t)$，且后者的值域包含在前者的定义域内，这时 y 也就构成 t 的函数，记作 $y=f[g(t)]$，称 y 为 t 的**复合函数**.

4）反函数

定义 7　设 y 是 x 的函数 $y=f(x)$，若将 y 作为自变量，x 作为因变量，则由 $y=f(x)$ 可确定 x 也是 y 的函数，称为 $y=f(x)$ 的**反函数**，记作 $x=f^{-1}(y)$.

我们习惯于用 x 表示自变量，y 表示因变量，因此 $y=f(x)$ 的反函数也记作 $y=f^{-1}(x)$.

5）初等函数

定义 8　常数函数、幂函数、三角函数、反三角函数、指数函数、对数函数统称为**基本初等函数**.

定义 9　由基本初等函数经过有限次四则运算和有限次的函数的复合步骤所构成并可用

一个式子表示的函数，称为**初等函数**.

2. 极　　限

1)数列的极限定义

定义 1　给定数列$\{x_n\}$，如果对于任意给定的正数ε，总存在正整数N，使得对于$n>N$时的一切x_n，不等式

$$|x_n - a| < \varepsilon$$

都成立，那么就称常数a是数列$\{x_n\}$的**极限**，或者称数列$\{x_n\}$**收敛于**a，记为

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \text{ 或 } x_n \to a(n\to\infty)$$

如果数列没有极限，就称数列是**发散**的.

2)收敛数列的性质

(1)收敛数列其极限是唯一的；

(2)收敛数列必有界.

3)数列收敛的准则

准则 1　如果数列$\{x_n\}$、$\{y_n\}$及$\{z_n\}$满足下列条件：

(i)$y_n\leqslant x_n\leqslant z_n(n=1,2,3\cdots)$，

(ii)$\lim\limits_{n\to\infty} y_n=a$，$\lim\limits_{n\to\infty} z_n=a$，

那么数列$\{x_n\}$的极限存在，且$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$.

准则 2　单调有界数列必有极限.

4)函数极限的概念

定义 2　给定函数$f(x)$，$x\in D$，x_0是一个定点，如果对于任意给定的正数ε，总存在正数δ，使得对于D内适合不等式$0<|x-x_0|<\delta$的一切x，对应的函数值$f(x)$都满足不等式

$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

那么常数A就叫做函数$f(x)$当$x\to x_0$时的**极限**，记作

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A \text{ 或 } f(x)\to A(x\to x_0).$$

定义 3　给定函数$f(x)$，如果对于任意给定的正数ε，总存在正数δ，使得对于D内适合不等式$0<x_0-x<\delta(0<x-x_0<\delta)$的一切$x$，对应的函数值$f(x)$都满足不等式

$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

那么常数A就叫做函数$f(x)$当$x\to x_0$时的**左(右)极限**，记作

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x)=A\ (\lim_{x\to x_0+0} f(x)=A) \text{ 或 } f(x_0-0)=A\ (f(x_0+0)=A).$$

函数$y=f(x)$在x_0处极限存在的充分必要条件是它在x_0处左、右极限都存在并且相等.

定义 4　给定函数$f(x)$，如果对于任意给定的正数ε，总存在正数X，使得对于D内适合不等式$|x|>X$的一切x，对应的函数值都满足不等式

$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

那么常数A就叫做函数$f(x)$当$x\to\infty$时的**极限**，记作

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = A \text{ 或 } f(x)\to A(x\to\infty).$$

如果在定义 4 中，将不等式$|x|>X$换成$x>X$，其余的叙述不变，我们就得到

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = A$$

的定义. 同样,把不等式$|x|>X$换成$x<-X$,我们就得到

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=A$$

的定义.

5)无穷小与无穷大

定义 5 如果函数(或数列)以零为极限,则称此函数(或此数列)为**无穷小量**.

定义 6 给定函数$f(x)$,如果对于任意给定的正数M,总存在正数δ(或X),使得对于适合不等式$0<|x-x_0|<\delta$(或$|x|>X$)的一切x,对应的函数值都满足不等式

$$|f(x)|>M$$

那么称$f(x)$当$x\to x_0$(或$x\to\infty$)时为**无穷大(量)**,记作

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\infty \text{(或}\lim_{x\to\infty}(f(x))=\infty)$$

定理 1(无穷大与无穷小的关系) 在自变量的同一变化过程中,如果$f(x)$为无穷大,则$\frac{1}{f(x)}$为无穷小;反之,如果$f(x)$为无穷小,且$f(x)\neq0$,则$\frac{1}{f(x)}$为无穷大.

6)关于极限的几个定理

定理 2 如果$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$,而且$A>0$(或$A<0$),那么必存在点$x_0$的某一去心邻域,当$x$在该邻域内时,就有$f(x)>0$(或$f(x)<0$).

定理 3 如果在x_0某一去心邻域内$f(x)\geqslant0$(或$f(x)\leqslant0$),而且$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$,那么$A\geqslant0$(或$A\leqslant0$).

定理 4 在自变量的同一变化过程中,具有极限的变量等于它的极限与一个无穷小之和;反之,如果变量可表示为常数与无穷小之和,那么该常数就是这变量的极限.

定理 5 如果函数$f(x)$、$g(x)$、$h(x)$在点x_0的某个邻域内(点x_0可除外)满足下列条件:

(i) $f(x)\leqslant g(x)\leqslant h(x)$,

(ii) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$, $\lim\limits_{x\to x_0} h(x)=A$,

则当$x\to x_0$时,$g(x)$的极限存在,且$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=A$.

上面四个定理对于左、右极限及$x\to\infty$的情形也成立.

7)无穷小的比较

定义 7 设α和β是在同一个自变量的变化过程中的无穷小,在同一变化过程中

如果$\lim\frac{\beta}{\alpha}=0$,称$\beta$是比$\alpha$高阶的无穷小,记作$\beta=o(\alpha)$;

如果$\lim\frac{\beta}{\alpha}=\infty$,称$\beta$是比$\alpha$低阶的无穷小;

如果$\lim\frac{\beta}{\alpha}=C(\neq0)$,称$\beta$与$\alpha$是同阶无穷小;

如果$\lim\frac{\beta}{\alpha}=1$,称$\beta$与$\alpha$是等价无穷小,记作$\alpha\sim\beta$.

8)两个重要极限与常见的等价无穷小

(1)$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$, $\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}$,

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}$.

(2)$\sin x\sim x(x\to0)$,

$\mathrm{tg}x \sim x(x \to 0)$,

$1-\cos x \sim \frac{1}{2}x^2(x \to 0)$,

$\ln(1+x) \sim x(x \to 0)$,

$e^x - 1 \sim x(x \to 0)$.

3. 函数的连续性

1)连续与间断的概念

定义 1 设函数 $f(x)$在点 x_0 的某个邻域内有定义,若

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

则称函数 $f(x)$**在点** x_0 **处连续**.

与定义 1 等价的定义是:

定义 1′ 设函数 $f(x)$在点 x_0 的某个邻域内有定义,若对任意给定的正数 ε,总存在正数 δ,使得对于满足不等式$|x-x_0|<\delta$ 的一切 x,都有

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

则称函数 $f(x)$**在点** x_0 **处连续**.

定义 2 若 $f(x_0-0)=f(x_0)$(或 $f(x_0+0)=f(x_0)$),则称函数 $f(x)$在点 x_0 处**左**(或**右**)**连续**.

函数 $f(x)$在点 x_0 处连续的充分必要条件是函数 $f(x)$在点 x_0 处既左连续又右连续.

定义 3 若函数 $f(x)$在(a,b)内每一点处都连续,则称**函数 $f(x)$在(a,b)内连续**. 若函数 $f(x)$在(a,b)内连续,且在点 a 处右连续,在点 b 处左连续,则称函数 **$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续**.

定义 4 若函数 $f(x)$在点 x_0 处不连续,则称点 x_0 为函数 $f(x)$的**间断点**.

函数 $f(x)$在一点 x_0 处产生间断的原因必定属于下面四条之一:

(1)$f(x_0-0)$、$f(x_0+0)$至少之一不存在;

(2)$f(x_0-0)$、$f(x_0+0)$虽都存在,但它们不相等;

(3)$f(x_0-0)$、$f(x_0+0)$都存在并且相等(即$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$存在),但 $f(x)$在 x_0 处没有定义;

(4)$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$存在,$f(x)$在 x_0 处也有定义,但它们不相等.

定义 5 若 $f(x_0-0)$、$f(x_0+0)$至少之一不存在,则称点 x_0 为 $f(x)$的**第二类间断点**;若 $f(x_0-0)$、$f(x_0+0)$都存在,但函数 $f(x)$在该点处间断,则称 x_0 为 $f(x)$的**第一类间断点**. 若 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$存在,但 $f(x)$在 x_0 处间断,则称 x_0 为 $f(x)$的**可去间断点**.

显然,可去间断点属于第一类间断点.

2)闭区间上连续函数的性质

定理 1(最大值、最小值定理) 在闭区间上连续的函数一定达到最大值和最小值.

定理 2(零点定理) 设函数 $f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续,且 $f(a) \cdot f(b)<0$,那么在区间(a,b)内至少存在一点 ξ,使

$$f(\xi) = 0$$

定理 3(介值定理) 设函数 $y=f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续,m 和 M 分别是函数 $f(x)$在闭区间$[a,b]$上的最小值和最大值,μ 是 m 和 M 间的任意一个数,那么在开区间(a,b)内至少

存在一点 ξ，使

$$f(\xi)=\mu$$

典 型 例 题

[1] 已知 $y=f(x)$ 的定义域为 $[0,1]$，试求：

(1) $f(\sin x)$ 的定义域；

(2) $f(x+a)+f(x-a)\ (a>0)$ 的定义域.

解 (1)为使 $f(\sin x)$ 有意义，必须 $0\leqslant\sin x\leqslant 1$，解此不等式得 $x\in[2K\pi,(2K+1)\pi]$（K 为整数），此即 $f(\sin x)$ 的定义域.

(2)为使 $f(x+a)+f(x-a)$ 有意义，必须使 x 满足 $0\leqslant x+a\leqslant 1$，又 $0\leqslant x-a\leqslant 1$，即使 x 同时满足 $-a\leqslant x\leqslant 1-a$ 与 $a\leqslant x\leqslant 1+a$. 可见，$x$ 应满足 $a\leqslant x\leqslant 1-a$，其中 a 应满足 $a\leqslant 1-a$，于是：

当 $0<a\leqslant\dfrac{1}{2}$ 时，所求定义域为 $[a,1-a]$；

当 $a>\dfrac{1}{2}$ 时，所求定义域为空集.

[2] 已知 $f(x)=\dfrac{1-2x}{1+x}$，求 $f[f(x)]$ 的定义域.

解 $f(x)$ 的定义域为 $x\neq-1$. 所以 $f(x)\neq-1$. $f(x)=-1$，根据 $f(x)$ 表达式可算出 $x=0$，故 $f[f(x)]$ 要求 $x\neq 0$. 即 $f[f(x)]$ 的定义域为 $x\neq 0, x\neq -1$ 的一切实数.

[3] 设 $f(x)=a^{x-\frac{1}{2}}\ (a>1)$，且 $f(\lg a)=\sqrt{10}$，求 $f\left(\dfrac{3}{2}\right)$.

解 这里给出了 $f(x)$ 的具体表达式，所以 $f\left(\dfrac{3}{2}\right)=a^{\frac{3}{2}-\frac{1}{2}}=a$.

又由条件 $f(\lg a)=\sqrt{10}$，即 $a^{\lg a-\frac{1}{2}}=\sqrt{10}$，变形得方程 $2\lg^2 a-\lg a-1=0$，解此方程 $\lg a=-\dfrac{1}{2}$，$\lg a=1$，由于 $a>1$，$\lg a>0$，所以只能是 $\lg a=1$，即 $a=10$，故 $f\left(\dfrac{3}{2}\right)=10$.

[4] 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有定义，$f(x)\neq 0$，$f(x\cdot y)=f(x)\cdot f(y)$，试求 $f(1995)$.

解 令 $x=1995$，$y=0$，则

$$f(0)=f(1995)\cdot f(0)$$

因为 $f(0)\neq 0$，所以 $f(1995)=1$.

[5] 设 $f(x)$ 是连续函数，且 $\int_0^{x^3-1}f(t)\mathrm{d}t=x$，求 $f(7)$.

解 已知式是一个变上限积分，由于 $f(x)$ 连续，故其两端都可导，求导得

$$f(x^3-1)\cdot 3x^2=1$$

在上式中令 $x=2$，便有 $f(7)=\dfrac{1}{12}$.

[6] 若已知 $2f(x)+f(1-x)=x^2$，试求 $f(x)$ 的表达式.

解法1 由已知式，启示我们猜测 $f(x)$ 的函数类型，设

$$f(x)=ax^2+bx+C$$

由已知式我们有

$$2ax^2+2bx+2C+a(1-x)^2+b(1-x)+C=x^2$$

比较两边的系数得

$$\begin{cases}3a=1\\2b-2a-b=0\\3C+b+a=0\end{cases}$$

解得 $a=C=\frac{1}{3}$，$b=\frac{2}{3}$. 故所求函数为

$$f(x)=\frac{1}{3}x^2+\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}$$

解法2 由已知式易见，作换元 $x=1-t$，得 $2f(1-t)+f(t)=(1-t)^2$，由于函数与自变量选用的字母无关，上式即为

$$2f(1-x)+f(x)=(1-x)^2$$

将此式与已知式联立，消去 $f(1-x)$，即得

$$f(x)=\frac{1}{3}x^2+\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}$$

[7] 设 $f\left(x+\frac{1}{x}\right)=x^2+\frac{1}{x^2}$，求 $f(x)$.

解 将右端凑成 $x+\frac{1}{x}$ 的表达式，$f(x)$ 的表达式便一目了然. 由于

$$f\left(x+\frac{1}{x}\right)=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2$$

所以

$$f(x)=x^2-2$$

[8] 设 $f(x)=\frac{x}{x-1}$，求(1)$\{f[f(x)]\}$；(2)$f\left[\frac{1}{f(x)-1}\right]$的表达式和定义域.

解 (1)$f[f(x)]=\frac{f(x)}{f(x)-1}=\frac{\frac{x}{x-1}}{\frac{x}{x-1}-1}=x$. 因为 $f(x)$ 要求 $x\neq1$，这里也要求 $f(x)\neq1$，并且 x 为任意值 $f(x)\neq1$，所以，

$$f\{f[f(x)]\}=f(x)=\frac{x}{x-1}$$

定义域为 $x\neq1$ 的一切实数.

(2)先计算 $f(x)-1=\frac{x}{x-1}-1=\frac{1}{x-1}$. 所以，

$$f\left[\frac{1}{f(x)-1}\right]=f(x-1)=\frac{x-1}{(x-1)-1}=\frac{x-1}{x-2}$$

它的定义域为 $x\neq1$，$x\neq2$ 的一切实数.

[9] 设 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|\leqslant1\\0, & |x|>1,\end{cases}$ 求 $f[f(x)]$.

解 $f[f(x)]=\begin{cases}1, & |f(x)|\leqslant1\\0, & |f(x)|>1,\end{cases}$ 由 $f(x)$ 的定义可知，对一切 x，$|f(x)|\leqslant1$，故对一切 x，$f[f(x)]\equiv1$.

[10] 设

$$f(x)=\begin{cases}1, & |x|<1\\ 0, & |x|=1,\\ -1, & |x|>1\end{cases}\quad g(x)=e^x$$

求 $f[g(x)]$,$g[f(x)]$.

解

$$f[g(x)]=f(e^x)=\begin{cases}1, & |e^x|<1\\ 0, & |e^x|=1\\ -1 & |e^x|>1\end{cases}$$

$$=\begin{cases}1, e^x<1\\ 0, e^x=1\\ -1, e^x>1\end{cases}$$

$$=\begin{cases}1, & x<0\\ 0, & x=0\\ -1, & x>0\end{cases}$$

$$g[f(x)]=e^{f(x)}=\begin{cases}e^1, & |x|<1\\ e^0, & |x|=1\\ e^{-1}, & |x|>1\end{cases}$$

$$=\begin{cases}e, & |x|<1\\ 1, & |x|=1\\ e^{-1}, & |x|>1\end{cases}$$

[11] 设

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{x}, & 0\leqslant x<4\\ x-2, & 4\leqslant x\leqslant 6\end{cases}$$

$$g(x)=\begin{cases}x^2, & 0\leqslant x<2\\ x+2, & 2\leqslant x\leqslant 4\end{cases}$$

求 $f[g(x)]$.

解

$$f[g(x)]=\begin{cases}\sqrt{g(x)}, & 0\leqslant g(x)<4\\ g(x)-2, & 4\leqslant g(x)\leqslant 6\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\sqrt{x^2}, & 0\leqslant x<2\\ (x+2)-2, & 2\leqslant x\leqslant 4\end{cases}$$

$$=x,\quad 0\leqslant x\leqslant 4$$

[12] 设 $x_n=\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$,求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

解 对一切 n,显然成立下面的不等式,

$$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}\leqslant x_n\leqslant\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$$

而 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}=1$,根据准则 I ,$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1$.

注 准则 I 适合于给出不等式或者容易估出不等式的极限问题.

[13] 设 $a_i>0, i=1,2,\cdots,n(n\geqslant 2)$，求 $\lim\limits_{x\to+\infty}(a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x)^{\frac{1}{x}}$.

解 记 $A=\max(a_1,a_2,\cdots,a_n)$，则

$$A^x\leqslant a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x\leqslant nA^x$$

于是

$$A\leqslant(a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x)^{\frac{1}{x}}\leqslant n^{\frac{1}{x}}\cdot A$$

由于 $\lim\limits_{x\to+\infty}n^{\frac{1}{x}}=1$，根据准则Ⅰ，

$$\lim_{x\to+\infty}(a_2^x+a_2^x+\cdots+a_n^x)^{\frac{1}{x}}=A=\max(a_1,a_2,\cdots,a_n)$$

[14] 设 $x_1=\sqrt{2}, x_2=\sqrt{2+\sqrt{2}},\cdots,x_n=\sqrt{2+x_{n-1}},\cdots$，证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，并求出此极限.

证：先证明 $\{x_n\}$ 的单调性. 显然 $x_2>x_1$. 假设 $x_n>x_{n-1}$，则

$$x_{n+1}-x_n=\sqrt{2+x_n}-\sqrt{2+x_{n-1}}$$

$$=\frac{x_n-x_{n-1}}{\sqrt{2+x_n}+\sqrt{2+x_{n-1}}}>0,$$

根据数学归纳法可知，$\{x_n\}$ 单调增加.

下面证明 $\{x_n\}$ 的有界性. 显然 $x_1<\sqrt{2}+1$，假设 $x_n<\sqrt{2}+1$，则

$$x_{n+1}=\sqrt{2+x_n}<\sqrt{1+\sqrt{2}+1}<\sqrt{2+2\sqrt{2}+1}=\sqrt{2}+1$$

仍根据数学归纳法可知，$\{x_n\}$ 是有界的，依准则Ⅱ，极限 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在.

设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$，令 $n\to\infty$，对一般式 $x_n=\sqrt{2+x_{n-1}}$ 取极限，得

$$A=\sqrt{2+A}$$

即 $A^2-A-2=0$，解得 $A_1=2, A_2=-1$（舍去）. 故

$$\lim_{n\to\infty}x_n=2$$

证：准则Ⅱ通常限于数列，题中常出现"证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在"字样的.

[15] 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{15}+\frac{1}{35}+\cdots+\frac{1}{4n^2-1}\right)$.

解

$$\text{原式}=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}\right]$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left[\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)\right]$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{1}{2}.$$

[16] 求 $\lim\limits_{n\to\infty}[(1+r)(1+r^2)\cdots(1+r^{2^n})]$ $(|r|<1)$.

解

$$\text{原式}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1-r}[(1-r)(1+r)(1+r^2)\cdots(1+r^{2^n})]$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1-r^{2^{n+1}}}{1-r}=\frac{1}{1-r}$$

[17] 求$\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2-n}-n)$.

解

$$
\begin{aligned}
\text{原式} &= \lim_{n\to\infty}\frac{n^2-n-n^2}{\sqrt{n^2-n}+n} \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{-n}{\sqrt{n^2-n}+n} \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{-1}{\sqrt{1-\dfrac{1}{n}}+1} = -\frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

[18] 求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{1+x}}{x}$.

解

$$
\text{原式} = \lim_{x\to 0}\frac{1-(1+x)}{x(1+\sqrt{1+x})} = \lim_{x\to 0}\frac{-1}{1+\sqrt{1+x}} = -\frac{1}{2}
$$

注 含有根号的$\dfrac{0}{0}$型常用有理化的方法，再约去零因子求得极限值.

[19] 求$\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{12}{x^3-8}\right)$

解

$$
\begin{aligned}
\text{原式} &= \lim_{x\to 2}\frac{x^2+2x+4-12}{x^3-8} \\
&= \lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+4)}{(x-2)(x^2+2x+4)} = \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

[20] 求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x\sin x}-\sqrt{\cos x}}{x^2}$.

解

$$
\begin{aligned}
\text{原式} &= \lim_{x\to 0}\frac{1+x\sin x-\cos x}{x^2(\sqrt{1+x\sin x}+\sqrt{\cos x})} \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1-\cos x}{x^2}+\dfrac{\sin x}{x}}{\sqrt{1+x\sin x}+\sqrt{\cos x}} \\
&= \frac{\dfrac{1}{2}+1}{2} = \frac{3}{4}
\end{aligned}
$$

[21] 求$\lim\limits_{x\to+\infty}[\sqrt{(x+1)(x+2)}-x]$.

解

$$
\begin{aligned}
\text{原式} &= \lim_{x\to+\infty}\frac{(x+1)(x+2)-x^2}{\sqrt{(x+1)(x+2)}+x} \\
&= \lim_{x\to+\infty}\frac{3x+2}{\sqrt{(x+1)(x+2)}+x} \\
&= \lim_{x\to+\infty}\frac{3+\dfrac{2}{x}}{\sqrt{\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\left(1+\dfrac{2}{x}\right)}+1} = \frac{3}{2}
\end{aligned}
$$