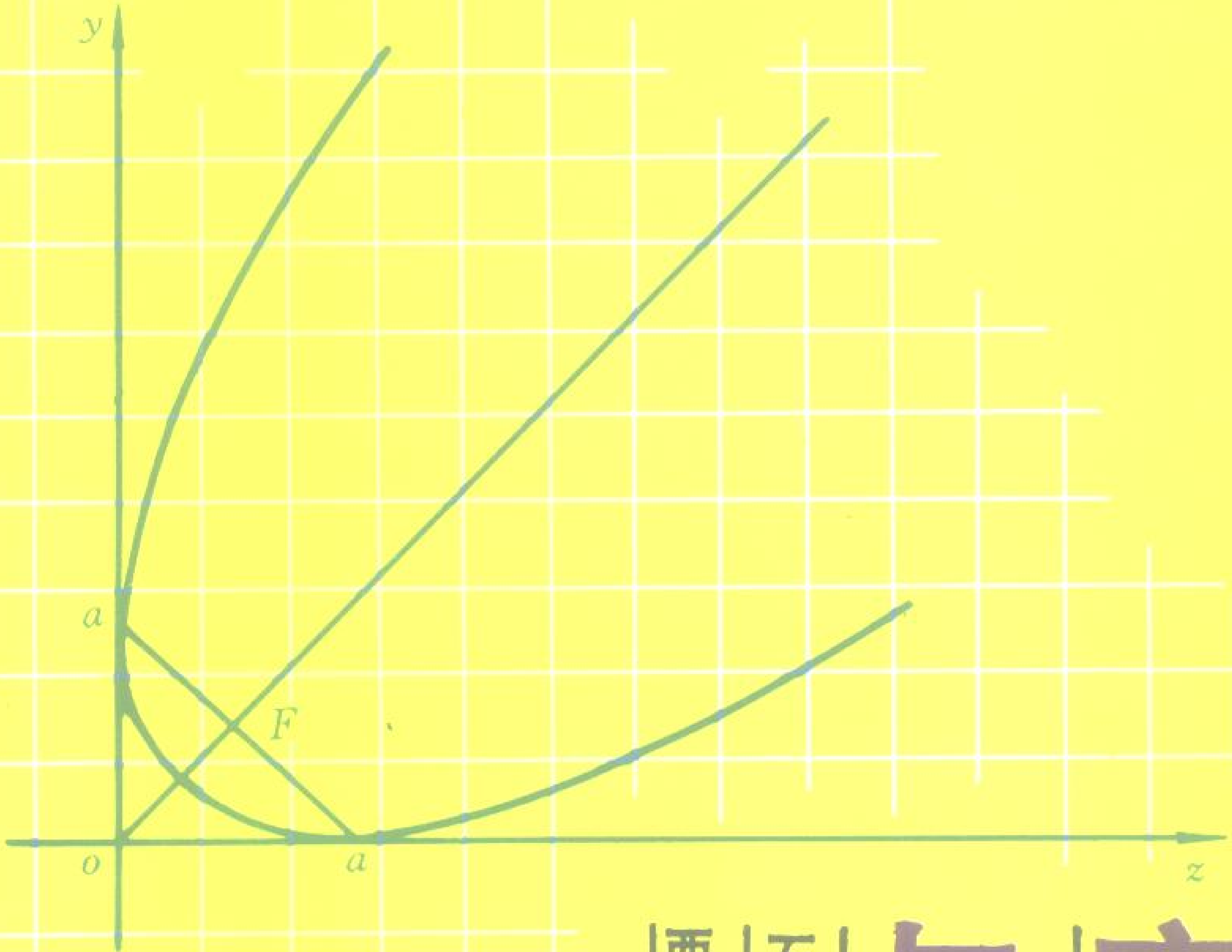
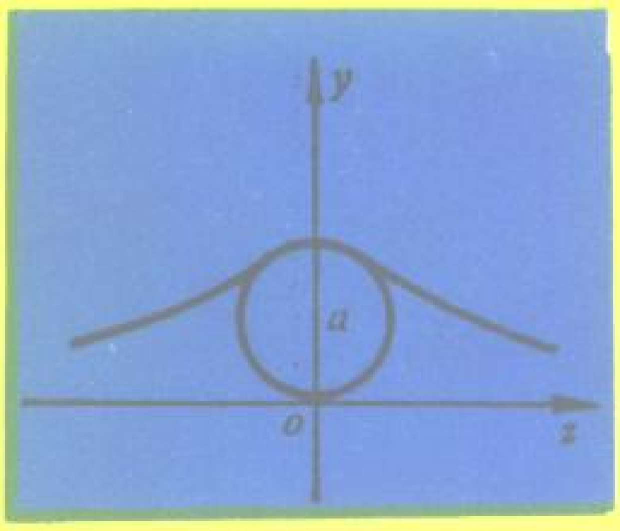
高等数学例题与习题集



石建城　李佩芝　徐文雄

西安交通大学出版社



高等数学例题与习题集

石建城　李佩芝　徐文雄

西安交通大学出版社

内 容 简 介

本书是根据教学基本要求的深广度编写的高等数学例题与习题集，按教学内容分章，每章又包含基本内容提要，例题分析及各种解法，相当分量的练习题、复习题和测验题等五部分。另外每三章后有期中或期末测试题，书后附有答案或提示，还附有数届研究生入学高数试题内容分析表。因此本书非常适合各类工科及工科成人高校师生教学使用，可作习题课教材，还可作报考工科院校研究生读者的复习指导。

(陕)新登字 007 号

高等数学例题与习题集

石建城　李佩芝　徐文雄

责任编辑　刘　彰

*

西安交通大学出版社出版发行

(西安市咸宁西路 28 号　邮政编码:710049　电话:(029)2668316)

西安电子科技大学印刷厂印装

各地新华书店经销

*

开本:787mm×1092mm　1/16　印张:22　插页:2　字数:546 千字

1992 年 12 月第 1 版　　1999 年 10 月第 6 次印刷

印数:30 001～33 000

ISBN 7-5605-0504-X/O・87　　定价:19.00 元

序　言

高等数学是工科院校最重要的基础课之一，学生们对它掌握得好坏，不仅直接影响到后继课程的学习，而且对今后工作将产生重要的影响，读者在《高等数学》的学习中，不仅要注意获取必要的数学知识，更为重要的是，在获取数学知识的同时，要努力提高自己的抽象思维、逻辑推理、运算技能、综合应用等方面的能力，一本好的例题与习题集，对内容的消化、巩固以及上述各种能力的培养与训练，都将有重要的作用。

石建城教授从事高等数学教学工作近 40 年，具有丰富的教学经验，并积累了大量的教学资料，这本《例题与习题集》是他与李佩芝、徐文雄两位副教授根据多年的教学经验编写的。该书内容的深广度，紧扣国家教委 1987 年颁发的"高等工业学校高等数学课程教学基本要求"，对少量超过基本要求的内容及过难的题目，均以"*"号标明，以供学有余力的读者使用。

本书共分十一章，每章开始有简明的内容提要，便于读者对该章内容的复习和归纳，例题与习题作了精心的挑选与分类，以确保基本概念、基本理论、基本方法为重点，遵循由浅入深、循序渐进的学习规律，将习题分成练习题与复习题两类，以体现基本题与提高题、综合题两个不同的教学阶梯，每章末尾附有测验题，并在适当阶段附有期中测试题或期末模拟试题，便于读者在阶段复习后自我测试。所有习题与测试题的答案都按其次序编写在书末的附页中，对部分难题还附注提示。最后还附有从 1989 年至 1992 年历届工科研究生招考试题高等数学部分的内容分布表。

本书初稿曾多次在西安交通大学的部分工科专业的学生中结合教学使用，受到广大学生的欢迎，对提高高等数学课程的教学质量，培养学生的自学能力，起了积极的作用。相信本书的出版不仅会对工科院校广大学生学习高等数学课程大有帮助，而且也将有助于成人自学及工科研究生入学前的考前复习。

马知恩

1992 年 5 月 30 日

编 者 的 话

《高等数学例题与习题集》共分十一章，每章由“基本内容”、“举例”、“练习题”、“复习题”与“测验题”五部分组成。其中练习题侧重基本概念，主要适于作课后练习，而复习题侧重于提高和综合能力，适于作一章学完后练习。此外，在第三章及第九章之后有期中测试题，在第六章及第十一章之后有两套期末试题，在本书末尾的附页部分有每章的练习题、复习题、测验题以及期中、期末测试题的答案或提示，并且还附有(从 1989 届到 1992 届)四届的研究生高等数学入学试题及其内容分布。

本书内容的深广度是按照 1987 年国家教委颁发的“高等工业学校高等数学课程教学的基本要求”而确定的。对超要求或过难的内容与题目都用“*”号标出。

第一、二、六、九、十、十一章以及期中、期末测试题由石建城编写，第三、七、八章由李佩芝编写，第四、五章由徐文雄编写，全书由石建城统稿。

本书由前高等学校工科数学课程教学指导委员会主任陆庆乐教授悉心审阅，并给予很多建设性的建议，这对本书质量的提高有莫大的帮助，深为感谢。

本书出版过程中，自始至终得到龚冬保教授的大力帮助与支持，特此表示衷心的谢意。

由于时间仓促及限于编者的水平难免尚有错误与不当之处，诚请读者指正。

1992. 5.

重印说明

本书问世两年以来，承蒙广大读者踊跃赐顾，首批印的一万余册已告罄脱销。兹利用再印机会，除了对部分错误进行勘正外，还在书末增加 1993 年至 1995 年三届研究生统一招考数学(一)试题内容分布表，以满足报考研究生的读者们的需要。

编者

1995. 11.

目　　录

第一章　函数、极限与连续

I　基本内容

§1.1　函　数

1.　**函数定义**　设变量 x 在某实数集 X 中任意取定一个数时，另一变量 y 按一定法则总有确定的实数与它对应，则称 y 为 x 的函数，x 称作自变量，y 称作因变量，实数集 X 称为函数的定义域，记作 $y=f(x)$，　$x\in X$.

2.　**复合函数**　设 $u=\varphi(x)$. $x\in X$，u 的值域为 U，又 $y=f(u)$，$u\in U$，则称 y 为 x（在 X 域上）的复合函数，记作 $y=f[\varphi(x)]$，$x\in X$，其中 x 称作自变量，y 称作因变量，$u=\varphi(x)$ 称作中间变量.

3.　**函数的有界性**　设 $y=f(x)$ 在实数域 X 有定义，若存在正数 M，对于 $x\in X$，使 $|f(x)|\leqslant M$ 成立，则称 $f(x)$ 在 X 有界；否则，称 $f(x)$ 在 X 无界.

4.　**函数的单调性**　设 $f(x)$ 在区间 I 有定义，若对于 I 上的任意不同两点 x 及 $x+\Delta x$（$\Delta x\neq 0$），恒有

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}>0$$

则称 $f(x)$ 在 I 上单调增；若对于 I 上的任意不同两点 x 及 $x+\Delta x$（$\Delta x\neq 0$），恒有

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}<0$$

则称 $f(x)$ 在 I 上单调减.

5.　**函数的奇偶性**　设 $f(x)$ 的定义域 X 对称于原点 O，若对于任意 $x\in X$，恒有 $f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为偶函数；若对于任意 $x\in X$，恒有 $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$ 为奇函数.

6.　**函数的周期性**　若存在非零实数 τ，任意实数 x 使等式 $f(x+\tau)=f(x)$ 成立，则称 $f(x)$ 为以 τ 为周期的周期函数. 通常情况下，周期函数的周期是指最小的正周期.

7.　**反函数**　设 $y=f(x)$ 的定义域为 A，y 的值域为 B. 若以 y 为自变量，x 为因变量，则得另一种函数关系 $x=f^{-1}(y)$，$y\in B$，则称 $f(x)$ 与 $f^{-1}(y)$［或 $f^{-1}(x)$］互为反函数.

8.　**初等函数**　幂函数 x^a、指数函数 $a^x(a>0,a\neq 1)$、正弦函数 $\sin x$ 及它们的反函数都称为基本初等函数。基本初等函数与常数经过有限次的四则运算与复合运算所形成并可用一个式子表示的函数称为初等函数.

§1.2 极 限

1. 极限定义

1) 设数列 x_n 与常数 a 有如下关系：

对于任意给定的正数 ε，总存在正整数 N，当 $n>N$ 时，使 $|x_n-a|<\varepsilon$ 成立，则称数列 x_n 收敛于 a，记作 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

2) 对于任意给定的正数 ε，总存在正数 X，当 $|x|>X$ 时使 $f(x)$ 值存在且满足 $|f(x)-A|<\varepsilon$，则称 $f(x)$ 当 $x\to\infty$ 时的极限为 A，记作 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$.

3) 对于任意给定的正数 ε，总存在正数 δ，在 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，使 $f(x)$ 值存在且满足 $|f(x)-A|<\varepsilon$，则称 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的极限为 A，记作 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$.

2. 极限的四则运算 设 $\lim f(x)=A$，$\lim g(x)=B$，则有 $\lim[f(x)\pm g(x)]=A\pm B$；$\lim[f(x)\cdot g(x)]=AB$；$\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{A}{B}$ $(B\neq 0)$.

3. 极限存在准则

1) 设数列 x_n 单调增（或单调减）且有界，则 x_n 必收敛，即 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

2) 设当 $0<|x-x_0|<\delta$（或 $|x|>X$）时有 $g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x)$ 且 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}g(x)=\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}h(x)=A$，则必有 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}f(x)=A$，此定理称作夹逼定理，同样也适用于数列极限.

4. 两个重要极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$； $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{1}{x})^x=e$.

5. 当 $x\to 0$ 时的等价无穷小量 $\sin x\sim x$，$\mathrm{tg}x\sim x$，$\mathrm{sh}x\sim x$，$\mathrm{th}x\sim x$，$\arcsin x\sim x$，$\mathrm{arctg}x\sim x$，$\mathrm{arsh}x\sim x$，$\mathrm{arth}x\sim x$，$e^x-1\sim x$，$\ln(1+x)\sim x$，$(1+x)^a-1\sim ax$，$1-\cos x\sim\dfrac{x^2}{2}$.

§1.3 连 续

1. 函数在一点处的连续性

设 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$，则称 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 点处连续.

2. 函数的间断点的四种名称

1) 设 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，但 $f(x_0)$ 不存在或 $f(x_0)\neq A$，则称 $x=x_0$ 为 $f(x)$ 的可去间断点.

2) 设 $f(x_0-0)$ 与 $f(x_0+0)$ 都存在，但 $f(x_0-0)\neq f(x_0+0)$，则称 $x=x_0$ 为 $f(x)$ 的跳跃间断点.

3) 设 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$，则称 $x=x_0$ 为 $f(x)$ 的无穷间断点.

4) 设 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 因振荡而不存在，则称 $x=x_0$ 为 $f(x)$ 的振荡间断点.

3. 函数的间断点的两种类型

设 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 间断，但 $f(x_0-0)$ 与 $f(x_0+0)$ 都存在，则称 $x=x_0$ 为 $f(x)$ 的第一类间断点；设 $f(x_0-0)$ 与 $f(x_0+0)$ 中至少有一个不存在，则称 $x=x_0$ 为 $f(x)$ 的第二类间断点.

4. 初等函数的连续性 设 $f(x)$ 在区间 I 有定义且是初等函数，则 $f(x)$ 在 I 连续.

5. **连续函数在闭区间上的性质** 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,则有:

1) 最大值与最小值定理 在 $[a,b]$ 上必有 ξ_1 与 ξ_2,使 $f(\xi_1)=m, f(\xi_2)=M$ 其中 m 与 M 分别是 $f(x)$ 的最小值与最大值,$x\in[a,b]$.

2) 介值定理 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最小值与最大值为 m 与 M,μ 是介于 m 与 M 间的任意确定的值,则在 (a,b) 内至少有一点 ξ,使 $f(\xi)=\mu$.

Ⅱ 举 例

例 1 求 $f(x)$ 的定义域:

(1) $f(x)=\sqrt{\dfrac{x^2(1-x^2)}{6-x-x^2}}$ (2) $f(x)=\arcsin(x^2-x-1)+\sqrt{\lg x}$

解 (1) 欲使 $f(x)$ 有意义,必须

$$u=\frac{1-x^2}{6-x-x^2}=\frac{(1-x)(1+x)}{(3+x)(2-x)}\geqslant 0$$

显然,u 值在 $x=-3$、$x=-1$、$x=1$ 及 $x=2$ 四个点的每点的左邻区与右邻区的正负号相异,又当 x 值是适当大的正数($x>2$)时,u 为正值,据此得到右图(见图 1-1).

从此图可以看出,当 $x\in(-\infty,-3)\cup[-1,1]\cup(2,+\infty)$ 时 $u\geqslant 0$,所以,$f(x)$ 的定义域是:

$(-\infty,-3)\cup[-1,1]\cup(2,+\infty)$

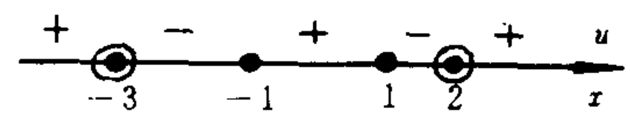


图 1-1

(2) 欲使 $f(x)$ 有意义,x 须满足

$$\begin{cases}-1\leqslant x^2-x-1\leqslant 1\\ \lg x\geqslant 0\end{cases}\quad 即\quad \begin{cases}x^2-x\geqslant 0\\ x^2-x-2\leqslant 0\\ x\geqslant 1\end{cases}$$

即 $\begin{cases}x(x-1)\geqslant 0\\ (x-2)(x+1)\leqslant 0\\ x\geqslant 1\end{cases}$

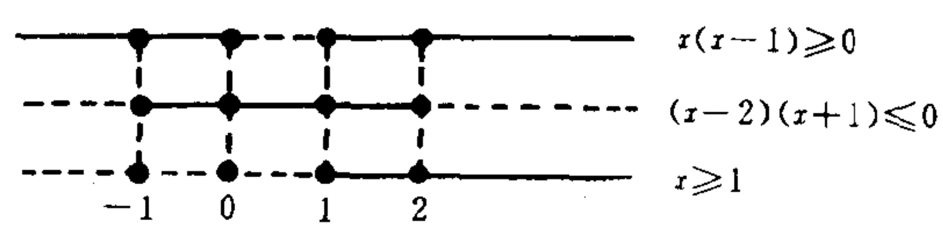


图 1-2

从图 1-2 可以看出 $f(x)$ 的定义域是 $1\leqslant x\leqslant 2$.

例 2 确定函数 $f(x)$ 的单调区间:

(1) $f(x)=x-\dfrac{1}{x}$ (2) $f(x)=\cos\dfrac{x}{2}$

解 为了确定 $f(x)$ 的单调增(或减)区间,在 $f(x)$ 的定义区间上取任意不同的相邻两点 x 及 $x+\Delta x$,不妨令 $\Delta x>0$,即 $x<x+\Delta x$,那么,使 $\Delta f=f(x+\Delta x)-f(x)$ 为正的区间就是 $f(x)$ 的单调增区间;同样,使 Δf 为负的区间就是 $f(x)$ 的单调减区间.

(1) $\Delta f=\left(x+\Delta x-\dfrac{1}{x+\Delta x}\right)-\left(x-\dfrac{1}{x}\right)=\left[1+\dfrac{1}{x(x+\Delta x)}\right]\Delta x$

当 x 及 $x+\Delta x$ 都是 $(-\infty,0)$ 或 $(0,+\infty)$ 的点时,$\Delta f>0$. 所以,$f(x)$ 在 $(-\infty,0)$、$(0,+\infty)$ 上单调增.

(2) $\Delta f=\cos\dfrac{x+\Delta x}{2}-\cos\dfrac{x}{2}=-2\sin\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\Delta x}{4}\right)\sin\dfrac{\Delta x}{4}$

当 $4n\pi\leqslant x<x+\Delta x\leqslant(4n+2)\pi$ 时,$\Delta f<0$;当 $(4n+2)\pi\leqslant x<x+\Delta x\leqslant 4(n+1)\pi$ 时,$\Delta f>0$. 所以,$f(x)$ 在 $[4n\pi,(4n+2)\pi]$ 单调减;在 $[(4n+2)\pi,4(n+1)\pi]$ 单调增,其中 $n=0,\pm1,\pm2,\cdots$

例 3 设 $f(x)$ 在 $(-a,a)$ 有定义($a>0$),证明:在 $(-a,a)$ 上必有奇函 $g(x)$ 及偶函数 $h(x)$,使

$f(x)=g(x)+h(x)$.

证 我们只要确定 $g(x)$ 及 $h(x)$ 使以下三等式成立：

$$g(-x)=-g(x), h(-x)=h(x), f(x)=g(x)+h(x), x\in(-a,a).$$

即得联立式

$$\begin{cases} f(x)=g(x)+h(x) \\ f(-x)=-g(x)+h(x) \end{cases}$$

从而解得

$$g(x)=\frac{1}{2}[f(x)-f(-x)], h(x)=\frac{1}{2}[f(x)+f(-x)].$$

显然，所确定的 $g(x)$ 是奇函数，$h(x)$ 是偶函数，$x\in(-a,a)$，从等式 $f(x)=\frac{1}{2}[f(x)-f(-x)]+\frac{1}{2}[f(x)+f(-x)]$，$x\in(-a,a)$ 就证得本题成立.

例 4 设 $f(x)$ 是以正数 a 为周期的周期函数，且已知当 $0<x\leqslant a$ 时，$f(x)=x^3$，试求周期函数 $f(x)$.

解 设 $x=\bar{x}+na$，其中 $\bar{x}\in(0,a]$，$x\in(na,(n+1)a]$，$n=0,\pm1,\pm2,\cdots$

按周期函数的定义得：$f(x)=f(\bar{x})$，其中 $\bar{x}=x-na$，且 $f(\bar{x})=\bar{x}^3$ 于是求得

$$f(x)=(x-na)^3, x\in(na,(n+1)a], n=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

例 5 设 $f(x)=\begin{cases} x^2, & x\leqslant 0 \\ \lg x, & x>0 \end{cases}$ $\quad g(x)=\begin{cases} 2-\cos x, & x\leqslant 0 \\ 1-\sqrt{x}, & x>0 \end{cases}$

求 $f[g(x)]$ 及 $g[f(x)]$

解

$$f[g(x)]=\begin{cases} [g(x)]^2, & g(x)\leqslant 0 \\ \lg[g(x)], & g(x)>0 \end{cases}$$

其中

$$g(x)=\begin{cases} 2-\cos x>0, & x\leqslant 0 \\ 1-\sqrt{x}>0, & 0<x<1 \\ 1-\sqrt{x}\leqslant 0, & x\geqslant 1 \end{cases}$$

所以

$$f[g(x)]=\begin{cases} \lg(2-\cos x), & x\leqslant 0 \\ \lg(1-\sqrt{x}), & 0<x<1 \\ (1-\sqrt{x})^2, & x\geqslant 1 \end{cases}$$

又

$$g[f(x)]=\begin{cases} 2-\cos f(x), & f(x)\leqslant 0 \\ 1-\sqrt{f(x)}, & f(x)>0 \end{cases}$$

其中

$$f(x)=\begin{cases} x^2\geqslant 0, & x\leqslant 0 \\ \lg x\leqslant 0, & 0<x\leqslant 1 \\ \lg x>0, & x>1 \end{cases}$$

所以

$$g[f(x)]=\begin{cases} 1-|x|, & x\leqslant 0 \\ 2-\cos(\lg x), & 0<x\leqslant 1 \\ 1-\sqrt{\lg x}, & x>1 \end{cases}$$

例 6 设

$$f(x)=\begin{cases} x\sin x-x^3, & x<0 \\ 5x^3, & x\geqslant 0 \end{cases}$$

问 $f(x)$ 是否为初等函数？为什么？

解 首先考虑以下两个函数：

$$g(x)=\begin{cases} x\sin x, & x<0 \\ 0, & x\geqslant 0 \end{cases} \quad \text{可以化成 } g(x)=\frac{1}{2}(x-\sqrt{x^2})\sin x$$

$$h(x)=\begin{cases} -x^3, & x<0 \\ 5x^3, & x\geqslant 0 \end{cases} \quad \text{可以化成 } h(x)=2x^3+3(\sqrt{x^2})^3$$

所以 $g(x)$ 与 $h(x)$ 都是在 $(-\infty,+\infty)$ 上的初等函数，故

$f(x)=g(x)+h(x)=\frac{1}{2}(x-|x|)\sin x+2x^3+3|x|^3$，$x\in(-\infty,+\infty)$ 是初等函数.

例 7 试用 ε-N 的数列极限定义证明下列等式成立：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}(n-\sqrt{n^2-n})=\frac{1}{2}$ (2) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$

证 (1) 由于 $\left|(n-\sqrt{n^2-n})-\frac{1}{2}\right|=\left|\frac{n}{n+\sqrt{n^2-n}}-\frac{1}{2}\right|=\frac{n}{2(n+\sqrt{n^2-n})^2}$

即得 $\left|(n-\sqrt{n^2-n})-\frac{1}{2}\right|\leqslant\frac{n}{2n^2}=\frac{1}{2n}<\varepsilon$，只要当 $n>\frac{1}{2\varepsilon}$ 时，于是得如下结论：

任给定 $\varepsilon>0$，有 $N=\left[\frac{1}{2\varepsilon}\right]$，当 $n>N$ 时，$\left|(n-\sqrt{n^2-n})-\frac{1}{2}\right|<\varepsilon$ 成立.

按数列极限定义得 $\lim\limits_{n\to\infty}(n-\sqrt{n^2-n})=\frac{1}{2}$

(2) 由 $|n^{1/n}-1|=\frac{n-1}{1+\sqrt[n]{n}+(\sqrt[n]{n})^2+\cdots+(\sqrt[n]{n})^{n-1}}<\frac{n-1}{\frac{1}{2}(n-1)\sqrt{n}}=\frac{2}{\sqrt{n}}$

得 $|\sqrt[n]{n}-1|<\frac{2}{\sqrt{n}}<\varepsilon$，只要当 $n>\frac{4}{\varepsilon^2}$ 时.

于是得如下结论：

任给定 $\varepsilon>0$，有 $N=[\frac{4}{\varepsilon^2}]$，当 $n>N$ 时，$|\sqrt[n]{n}-1|>\varepsilon$ 成立.

按数列限定义得等式 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$

例 8 求下列数列 a_n 的极限值 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$：

(1) $a_n=\frac{1}{n^3+1}+\frac{4}{n^3+2}+\cdots+\frac{n^2}{n^3+n}$

(2) $a_n=\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}=\frac{1\times3\times5\times\cdots\times(2n-1)}{2\times4\times6\times\cdots\times(2n)}$

(3) $a_n=\frac{1}{p}+\frac{2}{p^2}+\cdots+\frac{n}{P^n}$，其中 $P>1$

(4) $a_1=\sqrt{6}$，$a_2=\sqrt{6+\sqrt{6}}$，$a_3=\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6}}}$，$\cdots$，$a_n=\sqrt{6+a_{n-1}}$

解 (1) 由于 a_n 是 n 项之和，所以当 $n\to\infty$ 时，它不是有限项之和，因而不能用四则运算法则解本题. 本题的难点在于每项的分母(第 k 项) n^3+k 是随 k 而变化的，故 a_n 不能合并成一项，但由于

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^3+1}+\frac{4}{n^3+1}+\cdots+\frac{n^2}{n^3+1}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6(n^3+1)}=\frac{1}{3}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+n}+\frac{4}{n^3+n}+\cdots+\frac{n^2}{n^3+n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6(n^3+n)}=\frac{1}{3}$$

又 $$\frac{1}{n^3+n}+\frac{4}{n^3+n}+\cdots+\frac{n^2}{n^2+n}\leqslant a_n\leqslant\frac{1}{n^3+1}+\frac{4}{n^3+1}+\cdots+\frac{n^2}{n^3+1}$$

根据夹逼定理求得 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\frac{1}{3}$

(2)　由于 $\dfrac{(2k-1)(2k+1)}{(2k)^2}=\dfrac{4k^2-1}{4k^2}<1,\qquad k=1,2,3,\cdots$

得 $$a_n^2=\left(\frac{1\times 3}{2^2}\right)\left(\frac{3\times 5}{4^2}\right)\left(\frac{5\times 7}{6^2}\right)\cdots\left(\frac{(2n-1)(2n+1)}{(2n)^2}\right)\cdot\frac{1}{2n+1}<\frac{1}{2n+1}$$

从而有 $$0<a_n<\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$$

因 $$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2n+1}}=0$$

故按夹逼定理得 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$

(3)　a_n 是 n 项之和，本题的难点在于每项的分子或分母都不相同，倘若每项的分子相同，则任两项之比为常数 $\dfrac{1}{p}<1$，n 项和的极限值就容易求得. 为此，作如下运算：

由于

$$a_n=\frac{1}{p}+\frac{2}{p^2}+\frac{3}{p^3}+\cdots+\frac{n}{p^n}\quad(p>1)$$

$$pa_n=1+\frac{2}{p}+\frac{3}{p^2}+\cdots+\frac{n}{p^{n-1}}$$

两式相减得 $$(p-1)a_n=1+\frac{1}{p}+\frac{1}{p^2}+\cdots+\frac{1}{p^{n-1}}+\frac{n}{p^n}$$

即得 $$a_n=\frac{1}{p-1}\left(\frac{1-\frac{1}{p^n}}{1-\frac{1}{p}}+\frac{n}{p^n}\right)$$

所以 $$\lim_{n\to\infty}a_n=\frac{p}{(p-1)^2}\qquad(\text{其中 } p>1)$$

(4)　由于 $0<a_n=\sqrt{6+a_{n-1}}$，即 $a_n^2=6+a_{n-1}$. 倘若 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}a_{n-1}=a$，且 $a^2-a-6=0$. 由此得 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a=3$，　$a\neq-2$，现在还须证明 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 存在.

因为 $a_1=\sqrt{6}<3$，若设 $a_{n-1}<3$，则 $a_n=\sqrt{6+a_{n-1}}<3$，由数学归纳法证得　$0<a_n<3$，$n=1,2,3,\cdots$，又

$$a_{n+1}-a_n=\sqrt{6+a_n}-a_n=\frac{(2+a_n)(3-a_n)}{\sqrt{6+a_n}+a_n}>0$$

因此，证得 a_n 是单调增的有界数列，即证得 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，所以，$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=3$

例 9　试用 ε-X 或 ε-δ 的函数极限定义证明：

(1)　$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+5}{x+1}=1$　　(2)　$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+5}{x+1}=3$

证　(1)　$\left|\dfrac{x+5}{x+1}-1\right|=\dfrac{4}{|x+1|}\leqslant\dfrac{4}{|x|-1}<\varepsilon$

从最后不等式解得 $|x|>\dfrac{4}{\varepsilon}+1$. 于是得结论：任给定 $\varepsilon>0$，有 $X=\dfrac{4}{\varepsilon}+1>0$，当 $|x|>X$ 时 $\left|\dfrac{x+5}{x+1}-1\right|<\varepsilon$. 按极限定义得　$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+5}{x+1}=1$.

(2)　$\left|\dfrac{x+5}{x+1}-3\right|=2\dfrac{|x-1|}{|x+1|}<\dfrac{2|x-1|}{\left|\frac{1}{2}+1\right|}=\dfrac{3}{4}|x-1|<\varepsilon$

欲使以上不等式成立，只要有 $x\in\left\{|x-1|<\frac{1}{2}\cap|x-1|<\frac{3}{4}\varepsilon\right\}$，于是得结论：任给定 $\varepsilon>0$，有 $\delta=\min\left(\frac{1}{2},\frac{3}{4}\varepsilon\right)>0$，当 $0<|x-1|<\delta$ 时，使 $\left|\frac{x+5}{x+1}-3\right|<\varepsilon$ 成立. 按极限定义得 $\lim\limits_{x\to1}\frac{x+5}{x+1}=3$.

例 10 用 ε-X 的函数极限定义证明：

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}(x^2-\sqrt{x^4-4x^2+1})=2$；　　(2) $\lim\limits_{x\to\infty}(x^2-\sqrt{x^4-4x^2+1})\neq0$

证 (1) $\left|x^2-\sqrt{x^4-4x^2+1}-2\right|=\dfrac{3}{(x^2-2)+\sqrt{x^4-4x^2+1}}<\dfrac{3}{x^2-2}<\varepsilon$

欲使以上不等式成立，只要有 $x\in\left\{|x|>2\cap|x|>\sqrt{\frac{3}{\varepsilon}+2}\right\}$，因此，得结论：任给定 $\varepsilon>0$，有 $X=\max(\sqrt{\frac{3}{\varepsilon}+2},2)>0$，当 $|x|>X$ 时有 $\left|x^2-\sqrt{x^4-4x^2+1}-2\right|<\varepsilon$，按极限定义得 $\lim\limits_{x\to\infty}(x^2-\sqrt{x^4-4x^2+1})=2$.

(2) $\left|x^2-\sqrt{x^4-4x^2+1}\right|=\dfrac{4x^2-1}{x^2+\sqrt{x^4-4x^2+1}}>\dfrac{4x^2-1}{x^2+|x^2-2|}>1$

欲使上式成立，只要有 $|x|>2$. 于是得结论：给定 $\varepsilon=1$，有 $X=2$，当 $|x|>X$ 时 $\left|x^2-\sqrt{x^4-4x+1}-0\right|>\varepsilon$. 不满足极限定义，所以有 $\lim\limits_{x\to\infty}(x^2-\sqrt{x^4-4x^2+1})\neq0$.

例 11 用极限的四则运算求下列极限值：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}[n(\sqrt{n^2+3}-n)]$　　(2) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-1}{2-x-x^2}$

(3) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{4-2x}-\sqrt{4+x}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{1-x}}$　　(4) $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{2}{x^2-1}-\dfrac{3}{x^2+x-2}\right)$

解 (1) $\lim\limits_{x\to\infty}[n(\sqrt{n^2+3}-n)]=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3n}{\sqrt{n^2+3}+n}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3}{\sqrt{1+\frac{3}{n^2}}+1}=\dfrac{3}{2}$

(2) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-1}{2-x-x^2}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{-(1-x)(1+x)}{(1-x)(2+x)}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{-(1+x)}{2+x}=-\dfrac{2}{3}$

(3) 原式 $=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{[(4-2x)-(4+x)][\sqrt{x+1}+\sqrt{1-x}]}{[(x+1)-(1-x)][\sqrt{4-2x}+\sqrt{4+x}]}$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{-3(\sqrt{x+1}+\sqrt{1-x})}{2(\sqrt{4-2x}+\sqrt{4+x})}=-\dfrac{3}{4}$

(4) 原式 $=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1-x}{(x-1)(x+1)(x+2)}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{-1}{(x+1)(x+2)}=-\dfrac{1}{6}$

例 12 求下列极限值：

(1) $\lim\limits_{x\to1}(x-1)\mathrm{tg}\,\dfrac{\pi x}{2}$　　(2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}\cos2x}{x^2}$

(3) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1-2x}{1+x}\right)^{\frac{1}{x}}$　　(4) $\lim\limits_{x\to1}x^{\frac{2}{1-x}}$

解 (1) $\lim\limits_{x\to1}(x-1)\mathrm{tg}\,\dfrac{\pi x}{2}\overset{x-1=t}{=\!=\!=}\lim\limits_{t\to0}t\,\mathrm{tg}\,\dfrac{\pi}{2}(t+1)$

$=-\lim\limits_{t\to0}t\,\mathrm{ctg}\,\dfrac{\pi t}{2}=-\lim\limits_{t\to0}\dfrac{t}{\sin\frac{\pi t}{2}}\cos\dfrac{\pi t}{2}=-\dfrac{2}{\pi}$

(2) 原式 $=\lim\limits_{x\to0}\left[\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{x^2}+\dfrac{\sqrt{\cos x}(1-\cos2x)}{x^2}\right]$

$$=\lim_{x\to 0}\left[\frac{1-\cos x}{x^2(1+\sqrt{\cos x})}+\sqrt{\cos x}\frac{2\sin^2 x}{x^2}\right]$$

$$=\lim_{x\to 0}\left[\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2\frac{1}{2(1+\sqrt{\cos x})}+2\sqrt{\cos x}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\right]=\frac{9}{4}$$

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1-2x}{1+x}\right)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\frac{-3x}{1+x}\right)^{\frac{1}{x}}$

令 $\frac{-3x}{1+x}=\frac{1}{t}$，$\frac{1}{x}=-3t-1$，

原式$=\lim\limits_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{-3t-1}=\lim\limits_{t\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{t}\right)^t\right]^{-3}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{-1}=e^{-3}$

(4) $\lim\limits_{x\to 1}x^{\frac{2}{1-x}}=\lim\limits_{x\to 1}[1+(x-1)]^{\frac{2}{1-x}}\xlongequal{x-1=\frac{1}{t}}\lim\limits_{t\to\infty}[(1+\frac{1}{t})^t]^{-2}=e^{-2}$

在一般情况下，凡是不定式“$\frac{0}{0}$”且含有三角函数时，可考虑用$\lim\limits_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=1$ 来求极限；凡遇到不定式“1^∞”，可考虑用$\lim\limits_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t=e$ 来求极限.

例 13 设 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\neq 0$，$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$不存在，试证明：$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)g(x)$不存在.

证 用反证法当 $f(x)\neq 0$ 时，有

$$g(x)=\frac{f(x)g(x)}{f(x)}$$

若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)g(x)$存在，又因$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\neq 0$，则必有$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$存在，这与本题假设矛盾，所以$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)g(x)$不存在，现在再须证明在 x_0 的某邻域内，$f(x)\neq 0$.

因已知$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\neq 0$，按极限定义，取 $\varepsilon=\frac{|A|}{2}>0$，必有 $\delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时

$$A-\frac{|A|}{2}<f(x)<A+\frac{|A|}{2}$$

从以上不等式可知 $f(x)$与 A 同符号，即当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，$f(x)\neq 0$. 由此证得本题.

例 14 利用等价无穷小量求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+2x)}{\sin 3x}$　　(2) $\lim\limits_{x\to 0}(\mathrm{ctg}x-\frac{e^{2x}}{\sin x})$

(3) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{(\ln x)\ln(2x-1)}{1+\cos\pi x}$　　(4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\arcsin(3x)}{3^x+2^x-6^x-1}$

(5) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\lg(1-3x^2)}{1-\mathrm{ch}x}$　　(6) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{2x}-\sqrt[3]{1+x}}{x+\sin^2 x}$

解 在解本题时，必须熟悉以下的等价无穷小量，当 $t\to 0$ 时，有

$\sin t\sim t$，$\arcsin t\sim t$，$e^t-1\sim t$，$\ln(1+t)\sim t$，$\mathrm{tg}t\sim t$，$\mathrm{arctg}t\sim t$，$\mathrm{sh}t\sim t$，$\mathrm{arsh}t\sim t$，$(1+t)^a-1\sim at$，$1-\cos t\sim\frac{t^2}{2}$.

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+2x)}{\sin 3x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x}{3x}=\frac{2}{3}$

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\mathrm{ctg}x-\frac{e^{2x}}{\sin x}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\cos x-1}{\sin x}+\frac{1-e^{2x}}{\sin x}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{-\frac{x^2}{2}}{x}-\frac{2x}{x}\right)=-2$

(3) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(\ln x)\ln(2x-1)}{1+\cos\pi x}\xlongequal{x=1-t}\lim\limits_{t\to0}\dfrac{\ln(1-t)\ln(1-2t)}{1-\cos\pi t}=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{(-t)(-2t)}{\dfrac{1}{2}\pi^2t^2}=\dfrac{4}{\pi^2}$

(4) 原式$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3x^2}{(1-2^x)(3^x-1)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{-3x^2}{(e^{x\ln2}-1)(e^{x\ln3}-1)}$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{-3x^2}{(\ln2)(\ln3)x^2}=-\dfrac{3}{(\ln2)(\ln3)}$

(5) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\lg(1-3x^2)}{1-\mathrm{ch}x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1-3x^2)}{(\ln10)(-2\mathrm{sh}^2\dfrac{x}{2})}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{-3x^2}{-(2\ln10)(\dfrac{x}{2})^2}=\dfrac{6}{\ln10}$

(6) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{2x}-\sqrt[3]{1+x}}{x+\sin^2x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(e^{2x}-1)-(\sqrt[3]{1+x}-1)}{x}=\lim\limits_{x\to0}(\dfrac{2x}{x}-\dfrac{\dfrac{1}{3}x}{x})=\dfrac{5}{3}$

例 15 讨论下列函数的极限$\lim\limits_{x\to0}f(x)$是否存在：

(1) $f(x)=\mathrm{arctg}\,\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{1+2^{1/x}}$ (2) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, & x<0\\ (1+x)^{1/x} & x>0\end{cases}$

解 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 的充分必要条件是

$\lim\limits_{x\to x_0-0}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0+0}f(x)=A$，即 $f(x_0-0)=f(x_0+0)=A$

本题主要是利用以上定理来确定$\lim\limits_{x\to0}f(x)$是否存在.

(1) $f(0-0)=-\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{1}{1+0}=1-\dfrac{\pi}{2}$； $f(0+0)=\dfrac{\pi}{2}+0=\dfrac{\pi}{2}$

由于 $f(0-0)\neq f(0+0)$，所以$\lim\limits_{x\to0}f(x)$不存在.

(2) $f(0-0)=\lim\limits_{x\to-0}\dfrac{\sin x}{x}=1$； $f(0+0)=\lim\limits_{x\to+0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$

由于 $f(0-0)\neq f(0+0)$，所以$\lim\limits_{x\to0}f(x)$不存在.

例 16 利用函数的连续性求极限：

(1) $\lim\limits_{x\to0}(\cos x)^{1/x^2}$ (2) $\lim\limits_{x\to\infty}\mathrm{tg}[\ln(4x^2+1)-\ln(x^2+4x)]$

解 本题求极限是利用以下定理：

设 $f(t)$在 $t=l$ 连续，且$\lim\varphi(x)=l$，则有

$$\lim f[\varphi(x)]=f[\lim\varphi(x)]=f(l)$$

(1) $\lim\limits_{x\to0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to0}e^{\frac{1}{x^2}\ln[1-(1-\cos x)]}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln[1-(1-\cos x)]}{x^2}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{-x^2}{2x^2}}=e^{-\frac{1}{2}}$；

(2) 原式$=\lim\limits_{x\to\infty}\mathrm{tg}\,\ln(\dfrac{4x^2+1}{x^2+4x})=\mathrm{tg}\,\ln(\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^2+1}{x^2+4x})=\mathrm{tg}\,\ln4$

例 17 讨论下列函数 $f(x)$的连续性，并对间断点确定其类型：

$$f(x)=\begin{cases}\sin\dfrac{1}{x^2-1}, & x<0\\ \dfrac{x^2-1}{\cos(\dfrac{\pi}{2}x)}, & x\geqslant0\end{cases}$$

解 在$(-\infty,0)$上 $f(x)=\sin\dfrac{1}{x^2-1}$是初等函数，因 $f(x)$在 $x=-1$ 无定义，又$\lim\limits_{x\to-1}f(x)$不存在且振荡；在$(0,+\infty)$上 $f(x)=\dfrac{x^2-1}{\cos(\dfrac{\pi}{2}x)}$是初等函数，$f(x)$在 $x=2n-1$ $(n=1,2,3,\cdots)$无定义

且 $\lim\limits_{x\to 2n+1} f(x)=\infty,\lim\limits_{x\to 1}f(x)=-\dfrac{4}{\pi}$;在 $x=0$ 处,$f(0-0)=\lim\limits_{x\to -0}\sin\dfrac{1}{x^2-1}=\sin(-1)$

$$f(0+0)=\lim_{x\to +0}\frac{x^2-1}{\cos(\frac{\pi}{2}x)}=-1\neq f(-0)$$

综合以上分析,便得以下结论:

$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上除 $x=0$ 及 $x=2n-1,n=0,1,2,\cdots$为间断外处处连续. $x=0$ 是 $f(x)$ 的跳跃间断点(第一类),$x=-1$ 是振荡间断点(第二类),$x=1$ 是可去间断点(第一类),$x=3,5,7,\cdots$都是无穷间断点(第二类).

例 18 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi}\text{arctg}\,\dfrac{1}{x}+\dfrac{a+be^{1/x}}{1+e^{1/x}}, & x\neq 0\\ 1 & x=0\end{cases}$ 试确定 a 与 b 的值,使 $f(x)$在$(-\infty+\infty)$处处连续.

解 $f(x)$在$(-\infty,0)\cup(0,\infty)$是初等函数,所以,$f(x)$在$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$连续. 只要确定 a 与 b,使 $f(x)$在 $x=0$ 处连续即可. 由于

$$f(0-0)=-\frac{1}{2}+a,\quad f(0+0)=\frac{1}{2}+b,\quad f(0)=1$$

当 $a-\dfrac{1}{2}=b+\dfrac{1}{2}=1$ 时,$f(x)$在 $x=0$ 连续,所以,当 $a=\dfrac{3}{2},b=\dfrac{1}{2}$时,$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$连续.

例 19 证明方程 $x^3-3x^2+6x-7=0$ 有唯一实根在 1 与 2 之间.

证 设 $f(x)=x^3-3x^2+6x-7$,令$-\infty<x<x+\Delta x<+\infty$,其中 Δx 是充分小的正数,则有

$$\begin{aligned}\Delta f&=[(x+\Delta x)^3-3(x+\Delta x)^2+6(x+\Delta x)-7]-[x^3-3x^2+6x-7]\\&=3[(x+1)^2+1]\Delta x+3(x-1)\Delta x^2+\Delta x^3\end{aligned}$$

当 Δx是充分小的正数,$x\in(-\infty,+\infty)$时,$\Delta f>0$,所以,$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$单调增. 又$f(x)=x^3-3x^2+6x-7$ 是初等函数,在$[1,2]$连续,且 $f(1)=-3,f(2)=1$,按介值定理知:在$(1,2)$内必有 ξ,使 $f(\xi)=\xi^3-3\xi^2+6\xi-7=0$,又由于$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上单调增,倘若存在 ξ_1 与 ξ_2(设$\xi_1<\xi_2$)使$f(\xi_1)=f(\xi_2)=0$,这与$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$单调增相矛盾. 由此证得:方程 $x^3-3x^2+6x-7=0$ 有唯一实根,此实根在$(1,2)$内.

例 20 $f(x)$在(a,b)连续,$x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是(a,b)内两两不等的任意点,证明:在这 n 个点所处的区间内必有 ξ 点,使 $f(\xi)=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}f(x_k)$

证 不妨设 $a<x_1<x_2<\cdots<x_n<b$,则 $f(x)$在$[x_1,x_n]$连续,由最大最小值定理知:必有 m 与 M 使 $m\leqslant f(x)\leqslant M\quad x\in[x_1,x_2]$,即得 $m\leqslant f(x_k)\leqslant M\quad k=1,2,3,\cdots,n$.

即
$$nm\leqslant\sum_{k=1}^{m}f(x_k)\leqslant nM$$
$$m\leqslant\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f(x_k)\leqslant M$$

按介值定理知:在(x_1,x_n)内必有 ξ 点,使

$$f(\xi)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f(x_k)$$

例 21 一片森林,现有木材 $a\times 10^4\text{m}^3$,若以 1.2%的年增长率均匀地增长,问经过 t(年)时