1982
全国高考试题解法分析
（数学·物理·化学·生物）

陈云烽　谢贤群　龙宝泉　林浩然

广东科技出版社

出版说明

本书是一九八二年全国高等学校统一招生数学（包括理工农医类和文史类）、物理、化学、生物试题的解答和解题分析，分别由中山大学数力系讲师陈云烽、华南师范大学物理系讲师谢贤群、广州市第三中学老师龙宝泉、中山大学生物系副教授林浩然等同志撰写。

本书内容的重点是解题方法的分析。对数学、物理、化学、生物四科试题的概况和特点，撰写者都作了比较系统的评价介绍。在给出每一道试题的详细答案（包括不同解法答案）的同时，着重地阐述解题的思路、解题时应注意的问题和易犯的错误及原因，力图从思路分析和错误分析 两 个 方面，向读者提供解题方法技巧的有益启发。

我们希望本书有助于青年学生掌握正确的解题方法和学习方法，有助于促进提高中学教学质量水平。本书适合高中学生和青年阅读，也可供中学教师教学时参考。

目　录

数　学

〔陈云烽撰写〕

（一）试题概况

1982年全国高考数学试题，仍按理工农医类和文史类分别命题，两类试题都是由九道题目组成，题目的类型十分相似，只是深度和难度不同。

今年数学试题与去年相比，题目的综合性有明显的加强，解题所需的知识面扩大了，解题技巧的要求也有所提高。

总的说来，理工农医类试题偏深偏难了一些，文史类试题比较适中。

下面具体地分析今年理工农医类数学试题的特点。

第一个特点，综合性题目多，难度大。

九道试题中属基本题的只有三道，仅占24分，而去年的基本题占了40分。今年的一般综合题和难题占分多，难度也大，仅举下列几个方面予以说明。

1．数学归纳法方面

这方面内容，去年只要求运用数学归纳法论证恒等式

$$\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cos\frac{x}{2^3}\cdots\cos\frac{x}{2^n}$$

$$= \frac{\sin x}{2^n \sin \frac{x}{2^n}}$$

对一切自然数n都成立。这个式子是如何得到的，可完全不管；作对了，就可得10分。而今年的第九题，则必须先用“不完全归纳法”找出b_n的表达式，然后运用数学归纳法去论证。要是表达式没有正确作答，考生虽懂数学归纳法，也无用武之地。这两项都作对了，得分大致不超过13分（即20分中的三分之二）。

2．对数运算方面

去年对数运算的题目属于传统题目，仅限于常用对数的应用。而今年第五题是对数加上绝对值符号之后比较其大小，而且对数式的底数a和真数N（分别取$1-x$和$1+x$的形式）都是在一定的实数范围中变化的。这就要求考生必须较好地掌握对数函数的性质才能够着手解答。而且解题时必须先把带绝对值的式子归结为不带绝对值的式子，否则，对数的性质虽然已经掌握，但不一定能把题目答对。

3．无穷数列方面

去年的数列问题是已知通项u_n的表达式，表达式中的常数a, b满足一定的几何条件，要求证明关系式$u_n = u_{n-1} + u_{n+1}$，证对了可得20分。而今年的第九道题，比去年的要求要高得多，既涉及到两个数列的关系问题，还要求计算数列的极限；既有计算，又有命题证明。这几项都作对了，合起来也才得20分。

4．几何方面

去年的平面几何问题是证明课本中的一个定理（余弦定理）。今年却没有纯粹的平面几何命题，而是把平面几何内

容寓于立体几何问题之中．立体几何题目以“空间四边形”的面貌出现，而统编教材并没有把这一论题列为重点。去年的立体几何题目是属于传统一类的，仅仅讨论直线与直线间的夹角以及直线与平面间的夹角。

5．解析几何方面

这方面的题目，数量上比去年增多，难度也加深了，这是十分明显的。

第二个特点，几何形式的题目居多，考查的知识面宽。

在九道试题中，立体几何题两道占28分（去年只有一题，占17分），解析几何题三道占42分（去年只有一题占18分）。今年几何形式的题目，所考查的绝非只局限于几何知识，例如解第六题要用到三角知识，解第八题要用到一定的代数运算技巧，解第四题要求三次函数的极值，解第三题需要计算三阶行列式．如果掌握的知识不扎实，而且不会融汇贯通，对这些题目是不可能正确作答的。

第三个特点，传统性的题目减少了，添进一些与高等数学有较密切关系的题目。

在今年的试题中，没有排列组合方面的应用题和证明题，也没有解代数方程或方程组的试题，常见的平面几何证明题、普通的三角函数题、解不等式等问题也都没有出现．然而，却出现求复合函数的导数、求三次函数的极值、讨论二次曲线的切线、求无穷数列的极限等与高等数学有关的问题，而且占有不少的比分．这类试题虽然比例大了一些，但与今后高中教材的提高和更新是相适应的．重视这些内容的学习，对于下一步学习高等数学是很有益处的。

第四个特点，重视对分析和解决问题的基本能力的考查。

这次命题不仅着眼于基本知识的考查，而且十分注意考

查灵活和综合运用基本知识去分析和解决问题的实际能力。第五、第八、第九等试题，表现得尤其突出。

试题的这些特点，表明了对应试考生的要求较去年有了很大的提高，从当前中学数学教育的情况来看，多数考生的能力同这些要求的差距还是比较大的，因此说试题偏深偏难了一些。从评卷的结果看，合格率虽比去年略有降低，但考生水平的高低大体上还是能够得到区分，因此对高校新生录取工作还不至于产生不良的影响。

相比之下，文史类数学试题虽然也比去年有所加深，但就其难易程度和知识面的广度而言，还是比较适中的。在九道题中，第一至三题属基本题，第九题属难题，其余五道题属一般综合题。对于这些题目，只要熟悉中学数学课本的内容，一般都可以顺利作答。第四、八两题是常见的典型计算题，第七题作为轨迹问题也属常见之列，第五题较之课本中的“窗框问题”还要简单一些，第六题也属传统性的立体几何题。因此，这份数学试题比较切合当前的实际，合格率较高。

最后必需指出的是，在理工农医类试题中，有两道题出于某一书籍，可能属于用现成题目命题的情况。这是今后命题时应当避免的。

（二）理工农医类试题解答与分析

一、（本题满分6分）

填表

	函　　数	使函数有意义的x的实数范围
（1）	$y=\sqrt{-x^2}$	
（2）	$y=\sqrt{(-x)^2}$	
（3）	$y=\arcsin(\sin x)$	
（4）	$y=\sin(\arcsin x)$	
（5）	$y=10^{\lg x}$	
（6）	$y=\lg 10^x$	

【题意的理解和思考】

本题各小题都是用解析式表示函数，要求找出在实数范围内所有使解析式有意义的x值，不得遗漏，也不能扩充。

（1）根据根式的定义，在实数范围内，被开方数是非负的实数才能使根式有意义。故函数$y=\sqrt{-x^2}$的定义域是使不等式$-x^2\geqslant 0$成立的一切x值。

（2）根据根式的定义，使不等式$(-x)^2\geqslant 0$成立的一切x值的集合，就是函数$y=\sqrt{(-x)^2}$的定义域。

（3）$y=\arcsin(\sin x)$，因为反正弦函数的定义域

为〔-1，1〕，所以x应满足不等式$-1\leqslant\sin x\leqslant 1$。根据正弦函数的性质，对任意实数$x$，$\sin x$均满足上述不等式。

（4）$y=\sin(\arcsin x)$。正弦函数的定义域是所有实数，而反正弦函数的值域$[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$是实数域中的一部分，故只要$x$属于反正弦函数的定义域，函数$y$就有意义。由于反正弦函数的定义域是$[-1, 1]$，故使函数$y$有意义的$x$应满足不等式$-1\leqslant x\leqslant 1$。

（5）$y=10^{\lg x}$因为指数函数的定义域是所有实数，对数函数的值域也是所有实数，故只要x使得$\lg x$有意义，则函数y也有意义。为了使$\lg x$有意义，根据对数函数的性质，x应满足$x>0$。

（6）$y=\lg 10^x$。根据对数函数的性质，x应满足不等式$10^x>0$。因为对任意实数x，此不等式都成立，故使y有意义的x为任意实数。

【解答】

（1）$x=0$

或用集合表示，写成$\{0\}$

（2）x为任意实数

或R；或$x\in(-\infty, +\infty)$；或$-\infty<x<+\infty$

（3）与（2）相同

（4）$|x|\leqslant 1$

或$x\in[-1, 1]$；或$-1\leqslant x\leqslant 1$；或x的绝对值不超过1；或$\{x: -1\leqslant x\leqslant 1\}$；或$\{x|-1\leqslant x\leqslant 1\}$

（5）$x>0$

或$x\in(0, +\infty)$；或$0<x<+\infty$；或x为大于零的所有实数；或x是正实数；或$\{x: x>0\}$；或$\{x|x>0\}$

（6）与（2）相同

【说明】

填表时，每小题只填解答中的一种形式。

【容易出现的错误】（按小题顺序）

（1）答成“x不存在”，或“无实数”，或“空集”等。原因：把“在实数范围内，负数不能开平方”误为“在实数范围内，正数才能开平方”。

有的答成“$x=ki$，k为实数”。这里，除$k=0$时，有$x=0$是实数外，对其余的k值，x已不是实数了，答非所问。

（2）误认$(-x)^2$与$-x^2$相同，得出与（1）相同的答案。

（3）答成“$-1\leqslant x\leqslant 1$”，或“$x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$”，或“$x\in[0,\pi]$”等等。这里，$-1\leqslant x\leqslant 1$是反正弦函数的定义域，$x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$是反正弦函数主值的值域，$x\in[0,\pi]$是反余弦函数主值的值域。须知，本题给出的是复合函数，如果对复合函数的定义域不理解，或者对反三角函数的定义域、值域理解混乱，就会产生诸如上述的错误。

（4）答成“$|x|<1$”，即漏掉了等号，丢掉了端点（-1）和（$+1$）。

（5）答成“$x>0$，$x\neq 1$”。原因是把对数运算中真数和底数的取值范围搅乱了。

（6）答成“$x\neq 0$”。这可能是误认$10^0=0$所造成的。

二、（本题满分9分）

（1）求$(-1+i)^{20}$展开式中第15项的数值；

（2）求 $y=\cos^2\frac{x}{3}$ 的导数。

【题意的理解和思考】

（1）题中所指的展开式是二项式定理所陈述的展开式

$$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k a^{n-k}b^k,$$

从 $k=0$ 算起，$k=14$ 的那一项就是第15项，用 T_{15} 表示，即 $T_{15}=C_n^{14}a^{n-14}b^{14}$。对本题，式中 $n=20, a=-1$，$b=i$。

（2）题要求计算复合函数 $y=\cos^2\frac{x}{3}$ 的导数，因此必须弄清函数的复合关系.可以把 y 看成下列简单函数的复合：

$$y=u^2,\quad u=\cos v,\quad v=\frac{x}{3}.$$

于是，根据复合函数求导数的方法，应有

$$y_x'=y_u'\cdot u_x'=y_u'\cdot u_v'\cdot v_x'.$$

另一个方法是先对函数作变形，再找复合关系，然后施用复合函数求导的方法。比如，可化函数 y 为

$$y=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos\frac{2x}{3}.$$

这时，可视

$$y=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}u,\qquad u=\cos v,\qquad v=\frac{2x}{3}.$$

从而，同样可按 $y_x'=y_u'\cdot u_v'\cdot v_x'$ 求导。这样便得到解法二。

【解】（1）用 T_{15} 表示展开式的第15项，则有

$$\begin{aligned}T_{15}&=C_{20}^{14}(-1)^{20-14}(i)^{14}\\&=-C_{20}^{14}=-C_{20}^{6}\\&=-\frac{20\times19\times18\times17\times16\times15}{1\times2\times3\times4\times5\times6}\\&=-38760.\end{aligned}$$

（2）解法一

$$y'=2\left(\cos\frac{x}{3}\right)\left(\cos\frac{x}{3}\right)'$$

$$=-2\cos\frac{x}{3}\sin\frac{x}{3}\left(\frac{x}{3}\right)'$$

$$=-\frac{2}{3}\cos\frac{x}{3}\sin\frac{x}{3}$$

$$=-\frac{1}{3}\sin\frac{2x}{3}.$$

解法二

$\because\quad y=\cos^2\frac{x}{2}=\frac{1}{2}\left(1+\cos\frac{2x}{3}\right),$

$\therefore\quad y'=-\frac{1}{2}\sin\frac{2x}{3}\left(\frac{2x}{3}\right)'=-\frac{1}{3}\sin\frac{2x}{3}.$

【说明】

解题（1）时需用到下列计算过程：

$$(-1)^{20-14}(i)^{14}=(-1)^6(i^{14}$$

$$=1\cdot(-1)^7=-1.$$

【容易出现的错误】

（1）错解题意，把第15项的系数C_2^4作为答案。有的只列出T_{15}的计算式，没有算出最后结果。也有因计算不小心而出错的，例如把i^{14}算为1。

（2）计算y'时，因半途中止而漏掉因式 例如算得

$$y'=2\cos\frac{x}{3},$$

漏掉$\left(\cos\frac{x}{3}\right)'$；或者算得

$$y'=2\cos\frac{x}{3}\left(-\sin\frac{x}{3}\right)=-\sin\frac{2x}{3},$$

漏掉$\left(\frac{x}{3}\right)'$。

有的把求导公式记错了，致使结果错误，例如，误认$\left(\cos\frac{x}{3}\right)'=\sin\frac{x}{3}$。

三、（本题满分9分）

在平面直角坐标系内，下列方程表示什么曲线？画出它们的图形。

$$（1）\quad \begin{vmatrix} 2x & 1 & 1 \\ -3y & 2 & 3 \\ 6 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 0;$$

$$（2）\quad \begin{cases} x = 1+\cos\phi, \\ y = 2\sin\phi. \end{cases}$$

【题意的理解和思考】

（1）式中左端是一个三阶行列式，必须展开变成多项式的形式。行列式可根据定义直接展开；也可先进行初等变换，使行列式变成容易展开的形式（例如，使某行元素至少有两个为零），然后再按定义展开。经过整理化简，原方程变为二元一次方程，因此，它表示平面上的一条直线。作图时可先求直线与x轴、y轴的交点，然后过这两交点作直线，这就是所求直线。

（2）曲线方程是参数方程，ϕ是参数。由原方程不易看出它表示什么曲线，因此必须设法消去参数，使其变为直角坐标方程。直角坐标方程标准化后，可看出原方程代表椭圆。求出椭圆的中心坐标、半长轴、半短轴后，便可以作图了。

【解】

（1）先计算行列式

$$\begin{vmatrix} 2x & 1 & 1 \\ -3y & 2 & 3 \\ 6 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 16x + 18 - 9y - 18x + 12y - 12$$

$$= -2x + 3y + 6.$$

故原方程化为 $2x - 3y - 6 = 0$；其图形为直线。作图如图1．

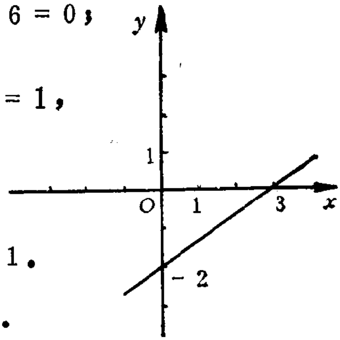

图1

（2）$\because \cos^2\phi + \sin^2\phi = 1$，

而 $x - 1 = \cos\phi$，

$\frac{y}{2} = \sin\phi$；

$\therefore \quad (x-1)^2 + \frac{y^2}{4} = 1.$

它的图形是椭圆，作图如图2．

【说明】

（1）行列式的计算也可利用行列式的性质，将第一行元素加上第二行元素减去第三行元素做为第一行元素，行列式的值不变，得

$$\begin{vmatrix} 2x-3y-6 & 0 & 0 \\ -3y & 2 & 3 \\ 6 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 0,$$

即原方程化为 $2x - 3y - 6 = 0$．

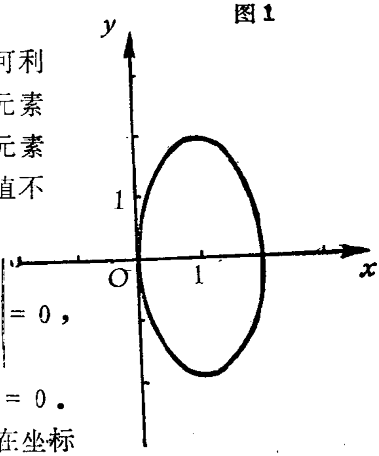

图2

题目没有要求说明图形在坐标轴上的截距，作图时可将它表示出来，坐标轴一定要标明单位和刻度。

（2）作图时，椭圆的中心（1，0），长、短轴等特征量应表示清楚，坐标轴要标明单位和刻度。

【容易出现的错误】

（1）展开行列式时，把某些项的符号搞错；应用行列式性质时，记错性质。例如把"行列式的一行(或列)乘以某数之后加到另一行（或列）上去，行列式值不变"这一法则中的"另"字丢了，而变成乘后加到原来的那一行（或列）上去，造成解答错误。

作图时，把直线的位置弄错。例如，把直线在x轴上的截距3误为（-3）或1/3；把在y轴的截距（-2）误为2或1/2等。

还有把方程化成$\frac{x}{3}-\frac{y}{2}=1$，把它所表示的曲线误认为双曲线，有的把方程化成$y=2\cdot\frac{x-3}{3}$，并说其图形为抛物线。这都说明没有掌握好直线方程和二次曲线方程的标准式。

（2）错把方程式的参数ϕ误作极坐标的幅角，作了如下的错误推演：

$$\because\quad \cos\phi=\frac{x}{\rho},\ \sin\phi=\frac{y}{\rho},$$

$$\therefore\quad \begin{cases} x=1+\dfrac{x}{\rho}, \\ y=2\cdot\dfrac{y}{\rho}. \end{cases}$$

得$\rho=2$，$x=2$；表示一个点（2，0）。

有的把参数ϕ误作常数，并把方程化成

$$y=2\operatorname{tg}\phi\,(x-1),$$

得到“其图形是斜率$k=2\mathrm{tg}\phi$的直线”的错误结果。

有的方程虽然没有化错，但作椭圆图形时，把中心位置或长、短半轴的位置搞错了.

四、（本题满分12分）

已知圆锥体的底面半径为R，高为H。求内接于这个圆锥体并且体积最大的圆柱体的高h（如图3）。

【题意的理解和思考】

这是一道求最大值的应用题。首先应找出内接圆柱体积V与高度h的函数关系，作为解答的基础。为了根据已知的体积公式$V=\pi r^2 h$，找到所需的函数关系，应设法用h来表示r。得到V与h的关系式后，就可利用导数或不等式来求函数的最大值，并回答所提的问题。

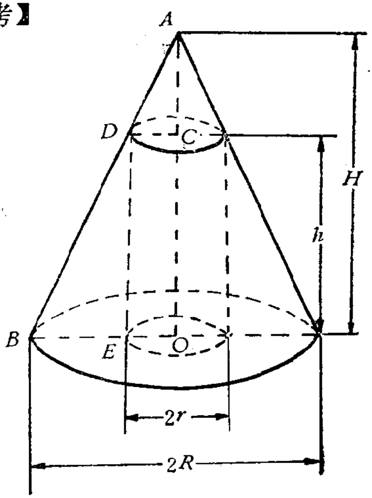

图3

【解】

解法一

如图3，设圆柱体的底面半径为r，高为h，由$\triangle ADC \backsim \triangle ABO$，可得

$$\frac{H-h}{H}=\frac{r}{R},$$

$$r=\frac{R}{H}(H-h).$$

从而，圆柱体体积为

$$V=V(h)=\pi r^2 h=\frac{\pi R^2}{H^2}(H-h)^2 h$$

$$(0<h<H).$$

两边对h求导：

$$V'(h)=\frac{\pi R^2}{H^2}[2(H-h)\cdot(-1)\cdot h+$$

$$+(H-h)^2]$$

$$=\frac{\pi R^2}{H^2}(H-h)(H-3h)$$

$$(0<h<H).$$

由$V'(h)=0$，解得

$h=H$（不合题意，舍去）；

$h=\frac{1}{3}H$.

可见，函数$V(h)$在定义域$(0, H)$内只有一个驻点，同时根据实际问题，在内接圆柱体中必有体积最大者，于是，当$h=\frac{1}{3}H$时，内接圆柱体体积最大。

解法二

同解法一得

$$V(h)=\frac{\pi R^2}{H^2}(H-h)^2 h \quad (0<h<H),$$

根据不等式

$$\sqrt[3]{abc}\leqslant\frac{1}{3}(a+b+c)$$

对任意正数a，b，c均成立，取$a=b=\frac{H-h}{2}>0$，$c=h$，则有