面向21世纪课程教材

面向21世纪课程教材
Textbook Series for 21st Century

大学数学

代数与几何

萧树铁　主编
居余马　李海中　编著

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

面 向 21 世 纪 课 程 教 材
Textbook Series for 21st Century

大学数学

代数与几何

萧树铁 主编
居余马 李海中 编著

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

(京)112 号

内 容 提 要

本书是教育部“高等教育面向21世纪教学内容和课程体系改革计划”的研究成果，是面向21世纪课程教材。本书对非数学专业的“代数与几何”的教学内容进行了更新，把代数与几何更好地结合，互相渗透，互相促进。全书以近代数学的基础知识——集合、关系、运算与映射及群、环、域的基本概念开篇，从线性空间和线性映射入手，按线性空间与内积空间、线性映射、矩阵、行列式、线性方程组、特征值与特征向量、矩阵的标准形及二次型的顺序，展开线性代数的内容，使线性空间和线性映射的概念贯穿始终，起到了统领全局的核心作用。几何部分除了空间解析几何，还增添了仿射与射影几何及非欧几何简介，以加深学生对“形”的理解，更全面地培养学生的理性思维、形象思维能力和审美意识。

本书可作为高等学校理工科各专业的教材，也可供各类专业人员学习参考。

图书在版编目(CIP)数据

大学数学：代数与几何/萧树铁主编．—北京：高等教育出版社，2000

ISBN 7-04-008524-0

Ⅰ．大…　Ⅱ．萧…　Ⅲ．高等数学－高等学校－教学参考资料　Ⅳ．013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2000)第01155号

代数与几何

萧树铁　主编

出版发行	高等教育出版社		
社　　址	北京市东城区沙滩后街55号	邮政编码	100009
电　　话	010-64054588	传　　真	010-64014048
网　　址	http://www.hep.edu.cn		
经　　销	新华书店北京发行所		
印　　刷	国防工业出版社印刷厂		
纸张供应	山东高唐纸业集团总公司		
开　　本	787×960　1/16	版　　次	2000年1月第1版
印　　张	23.5	印　　次	2000年1月第1次印刷
字　　数	420 000	定　　价	24.60元

凡购买高等教育出版社图书，如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请在所购图书销售部门联系调换。

版权所有　侵权必究

序　言

长期以来，我国高等学校各类非数学专业的数学基础课都限于以微积分为主要内容的“高等数学”．面临21世纪各门知识的相互渗透和自身加速更新的形势以及全面提高人才素质的需要，数学的作用将显得日益重要．而作为高等学校数学基础课的作用，除了作为各门学科的重要工具以外，它在提高人才全面素质中起着重要作用的培育理性思维和审美功能方面也应得到充分的重视．这就需要一部与之相适应的教材．

这套“大学数学”教材是在前国家教委“面向21世纪教学内容和课程体系改革”研究课题的支持下完成的．共有五本：《一元微积分》、《多元微积分及其应用》、《代数与几何》、《随机数学》与《数学实验》．我们认为它们是21世纪高级人才应该普遍具备的数学基础．希望学生通过对它们的学习，能使他们在掌握数学工具、提高理性思维和审美素质以及获取新知识的能力诸方面打下一个良好的基础．这种要求应该对任何专业都一样，只是在深度上及侧重的方面可能会有些区别．

在现行的《高等数学》中，微积分和数学分析之间的关系一直是一个难以处理的问题．19世纪以前的微积分，以它的直观性和不断扩展的应用显示了数学的威力，但同时也暴露出其缺乏严格逻辑基础的缺点．诞生于19世纪的数学分析则以其逻辑的完美显示了数学的理性精神．这两个方面在教材中如果结合得好，可以激发初学者对数学的兴趣；但如果结合得不好，则很可能失去两者的活力而形成一堆枯燥的形式推理和繁琐的计算．在本书中我们力图按其本来的面目来编写，把一元微积分分为两部分：前一部分注重直观，着重训练应用和运算，后一部分则着重培育理性思维．

《多元微积分及其应用》的应用内容包括复变函数、微分几何及常微分方程．

《代数与几何》的代数部分基本上是线性代数，其内容也可分为两部分：一部分是以算法为主的求解一般线性方程组的内容；另一部分则主要研究线性空间及其上的线性映射．由于后者是前者的理论框架，而且它已成为近代数学普遍使用的基本语言，因此本书在集合、关系、运算、代数结构之后，较快地进入后者的讨论；并且通过数值表示把两者结合起来．

至于几何，尽管它在古希腊及19世纪有其辉煌的历史，在本世纪后半叶也进入了数学研究的主流行列，但近50年来，在我国高校的数学基础课中，却一直被压

缩到只剩下一点空间解析几何.这对培养学生的形象思维及理性思维的习惯极为不利.本书除了在多元微积分应用中加上古典微分几何基础(曲线和曲面)以外,在几何部分则增加了“仿射及射影几何”及非欧几何的两个初等模型.

本世纪后半叶以来,人们对事物认识演化的表现之一是从单纯的确定性思维模式进入确定—随机性模式.这一趋势还在发展,在高校数学教学中已受到广泛的关注.我们提出把《随机数学》正式列入基础课.本书内容的重点是通过几个典型范例的讨论,使学者学会描述与表达随机性及随机变化的过程,即集中于对随机模式认识的训练.

在这套系列教材中《数学实验》有其独特性.它的知识内容包含数值方法、统计计算和优化计算的基本概念和初等方法,其目的是为学生自已动手解决问题提供必要的数学知识和软件平台.这是一门以学生独立动手,教师起辅导作用的课程,这类课程的教材如何编写,本书只是一种尝试.

以上是这套教材的一个简要介绍.这套教材既是一个统一的整体,各部分之间又有相对的独立性,可以独立讲授.在内容方面,它包含了现行的高等数学、线性代数、复变函数、微分方程、微分几何、数值分析、概率统计、优化计算等课程最基本的内容,而总学时则大为减少.我们在清华大学几个班的试验表明:全部讲完上述内容所需的学时大约为 340 左右.除数学实验外,如果再减掉一些内容,280 学时左右也是可以的,可由教师灵活掌握.

这套教材在有些大段落后面,附有一段“评注”,主要讲述这一段的重要思想和可能的发展,为有兴趣的学生进一步学习数学开一点小小的窗口.

大凡一本可用的教材,往往有两种写法:尽量多写一点,以便于教师选择;或尽量写少一点,以便于教师发挥.这套教材似乎偏于前者.原因是这是一个尝试,对习惯讲授传统“高等数学”的教师来说,对这套教材可能不太适应,也许需要多一些说明.

这套教材原有的基础是清华大学出版社 1995 年出版,萧树铁、居余马、葛严林等主编的三卷本《高等数学》.参与现在这套教材编写的有朱学贤、郑建华、章纪民、居余马、李海中、钱敏平、叶俊、姜启源、高立、何青等人.谭泽光、白峰杉、韩云瑞等同志为本书的编写作了大量的工作.高教出版社对本书的编写和出版始终给予热情的支持.

前面已说过,这套教材的编写是一个尝试.目的在于根据“百家争鸣”的精神,参与探索大学数学基础课在培养下一世纪高素质人才中所应起的作用,以及与之相适应的教材建设.我们衷心欢迎各方人士对这套教材评头论足,指出缺点和错误.如果这套教材能起到抛砖引玉的作用,我们就很满足了.

萧树铁

1999 年 6 月

试读结束:需要全本请在线购买: www.ertongbook.com

前　言

多年来,我国高校非数学专业的数学基础课只有微积分以及为之服务的一点解析几何.80 年代开始,由于计算机解题的需要,一些学校陆续增加了“线性代数”课.它的内容主要是行列式、线性方程组和矩阵运算.而对于线性代数的核心内容——线性空间及其上的线性映射则涉及很少.面对 21 世纪培养高素质人才的需要,这种数学基础课的结构是难以适应的.建立一个包含微积分、代数、几何和随机数学为基本内容的数学基础课新体系的任务随着新世纪的来临就显得急迫了.教育部为此从 1995 年起就开始立项研究.本书就是在此背景下进行的一个尝试.

这本教材包含了代数和几何两部分.关于其内容,有以下几点考虑:

一、把代数与几何合写成一本教材.这种做法可能会削弱几何的训练,但也可使代数与几何更好地结合,互相渗透,互相促进.代数为研究几何问题提供有效的方法;几何为抽象的代数结构和方法提供形象的几何模型和背景,基于这样的考虑,本书大致分为四个部分.

第一部分是第一章中阐述的基础知识——集合、关系、运算与映射及代数结构的基本概念.其重点是关系和运算,特别要让学生了解运算的对象是多种多样的,而不是局限于数的运算.这里讨论了:映射(是一种一元运算)的一般概念;集合运算;命题运算;几何向量的运算;n 元向量的线性运算及高斯消元法中的矩阵初等行运算.它们不仅拓宽了学生对“运算”概念的认识,而且也启发学生以后在探索新问题时要善于把实际问题变为数学问题;同时也是学习本书必备的基础.关于群、环、域,重点是群的概念,这里主要是让学生初步了解从数学结构上区分各种数学问题的异同,知道近世代数主要是讨论各种代数结构的性质.

第二部分是由第二章至第五章所阐述的线性代数的基本内容——线性空间与内积空间、线性映射、矩阵和行列式.

第三部分是由第六章至第八章所组成,它们是线性代数与几何相结合的内容:线性方程组的解的理论与线性图形(平面与空间直线)的位置关系和度量关系;特征值与特征向量、正交变换、二次型与二次曲线、二次曲面的不变量及其分类.

第四部分是由第九章与第十章所介绍的“仿射与射影几何”及“非欧几何”

的两个初等模型.

二、关于线性代数的内容和体系

线性代数的内容大致可分为两部分:一部分是以算法为主的求解线性方程组和矩阵运算(包括特征值与特征向量、矩阵的三种标准形及二次型).另一部分则主要是研究线性空间和内积空间的结构,以及有限维线性空间上的线性映射.由于后者是前者的理论框架,是线性代数的核心内容,而且它也是近代数学普遍使用的基本语言.为使学生较全面深入地掌握和理解线性代数,提高学习现代数学新知识的能力,我们认为必须加强线性空间和线性映射的教学,除了增加必要的课时,还要突出它们的核心地位.为此,我们没有采用国内现行线性代数教材的传统模式,而是直接从讨论线性空间的结构和研究线性映射入手,展开线性代数的内容.通过有限维线性空间的线性映射的数值表示,建立了线性映射与矩阵的对应关系,从而矩阵的基本运算的定义也由相应的线性映射的运算所确定;至于线性方程组的求解问题也对应于已知线性映射的象求完全原象(或核)的问题;矩阵的相似标准形问题也就是从线性映射在不同基下对应的矩阵构成的等价类中找一个最简单的代表元的问题.如此,线性空间和线性映射的概念就贯穿始终,起到了统领全局的核心作用.当然这样的课程体系,初学者在开始学习时会有些困难,感到抽象和不容易理解,但是只要教学得法,按照"从特殊到一般,从具体到抽象"的原则,从具体的模型、背景和实例抽象为一般的概念,学生还是不难接受的.学完整个课程,学生最终会较好和较深入地掌握线性代数的内容,能熟练使用线性空间和线性映射的语言,特别是一开始就接触公理化的定义和方法,对学生以后自学现代数学新知识是大有裨益的.

此外,我们在第六至第八章中还尽量把代数与几何有机地结合起来,例如,特征值的概念是由二次曲线在正交变换下的不变量引出来的,然后再利用特征值与特征向量的概念研究一般的二次型,把二次曲面的一般方程化为标准方程,并对二次曲面作正交分类.

关于行列式,我们也采用了公理化的定义,也就是把 n 阶行列式定义为 n 重反对称线性函数,这样定义不仅方便快捷,而且与全书的风格协调,同时证明行列式的一些重要性质(如:$\det A=\det A^{\mathrm{T}}$、行列式按一列(行)的展开定理、$|AB|=|A||B|$等)时,充分利用了矩阵的工具,使证明更为简明.

三、关于几何,除上述内容外我们还选择了"仿射与射影几何"、"非欧几何简介".目的是加深读者对"形"的理解和认识.

在仿射几何中,研究了仿射变换下的不变性质(如共线性、平行性)和不变量(如简单比),对二次曲线作了更简单的仿射分类.

在射影几何中,我们把欧氏(仿射)平面扩大为射影平面,引进齐次坐标来

研究射影平面上的几何问题,研究了对偶原理和射影变换下的不变量(交比),并对二次曲线作了射影分类.

在非欧几何简介中,我们介绍了非欧几何中两个典型的模型.椭圆几何的球面模型和双曲几何的庞加莱模型.它们除了有重要的应用价值外,还希望能通过对这种人类重要文化遗产的认识,培养学生的理性和审美意识.

使用本教材所需课时大约在 80 左右,如果课时少,可根据实际情况适当取舍内容.

本教材的编写工作是在萧树铁教授领导下进行的,书稿最后经萧教授审定,高教出版社胡乃冋同志对本书的出版作了认真微细的编辑工作,对此我们深表感射.

更新非数学专业的数学基础课的课程体系和教学内容的工作是十分艰巨的,在代数部分我们虽然已经历了九年的教学实践,但探索仍是初步的,缺陷和不妥之处在所难免,恳请同行专家和读者赐教和指正.

编者于清华园

一九九九年九月

目　　录

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

第 1 章　集合 关系 运算 结构

中学数学主要是讨论数的运算、几何图形的性质以及相应的各种数量关系和图形关系，而现代数学的领域非常广阔，客观世界众多的实际问题可以抽象为各种数学问题，并采用不同的数学方法加以解决. 所以就整个数学而言，它是研究各种各样可以表述为数学概念的事物所组成的各类集合，研究同一集合或不同集合中元素间的各种数学关系（运算或变换）和相应的数学结构. 因此，我们将在本章介绍大学数学的一些基础知识，首先简要地叙述"集合"的一些基本概念，然后给出"二元关系"、"运算"和"映射"的概念，其中重点是"关系"（主要是等价关系）、"运算"和"映射"，特别是要列举很多例子让读者了解运算的对象非常广泛，而不只局限于"数". 这里读者不仅要掌握"命题运算"、"几何向量的运算"及"高斯消元法中的 n 元向量或矩阵运算"的一些具体内容，而且要从中得到启发，十分重视如何根据实际问题的需要抽象出数学问题，把某些"操作"定义为运算，并在以后的学习中自觉培养这方面的能力. 本章最后介绍基本的代数结构 —— 群、环、域的基本概念，让读者初步了解从数学结构上区分各种数学问题的异同.

1.1　集合 子集 幂集 直积

集合是数学的最基本的一个概念，它不能用更简单的概念来定义，而只能对它作些解释. 所谓集合（简称集）是指由一些确定的对象（或事物）汇集成的整体，其中每个对象叫集合的元素（简称元）. 通常用大写字母 A,B,X,Y 等表示集合，用小写字母 a,b,x,y 等表示集的元素. 如果元 a 在集 A 中，就说"a 属于 A"，记作"$a \in A$"；否则就说"a 不属于 A"，记作"$a \notin A$".

全体整数、有理数、实数、复数分别组成的集合，依次记作 $\mathbf{Z},\mathbf{Q},\mathbf{R},\mathbf{C}$；全体正整数 $1,2,\cdots,n,\cdots$ 组成的集合记作 $\mathbf{N}^*$.

表述集合的方式：一种是穷举法，即列出集中全部元素；另一种是描述法，即用集中全部元素所具有的特性来表述集合. 例如：

$$A = \{\sqrt{2}, -\sqrt{2}\} = \{x \mid x^2 - 2 = 0, x \in \mathbf{R}\}$$

其中前者是穷举法，后者是描述法.

$$M = \{(x,y) \mid x - 2y = 1; \quad x, y \in \mathbf{R}\}$$

是用描述法表述直线 $x - 2y = 1$ 上的所有点组成的集合.

含有限个元素的集合叫有限集,含无穷多个元素的集合叫无限集,不含任何元素的集合叫空集,记作 $\varnothing$,例如,

$$\{x \mid x^2 + 1 = 0; \ x \in \mathbf{R}\}$$

是一个空集.把空集也看作集合是必要的,正如把 0 也看作数一样.

定义 1.1 设 A, B 是两个集合,如果 A, B 含的元素全相同,就说 A,B 相等,记作 $A = B$;如果对任意的 $a \in A$,均有 $a \in B$,则称 A 是B 的子集,或说 A 含于B,B 包含A,记作 $A \subset B$.

对任意的集合 A,均有 $\varnothing \subset A$,$A \subset A$.

显然,集合 A,B 相等,当且仅当 $A \subset B$ 与$B \subset A$ 同时成立.

定义 1.2 非空集合 A 的所有子集组成的集合称为 A 的幂集,记作:$P(A)$ 或 2^A.

若集 A 含有 n 个不同元素,则其幂集 $P(A)$ 含有 2^n 个不同元素.例如集合 $A = \{a, b, c\}$ 的幂集

$$P(A) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, A\}$$

我们把非空集 A, B 的任一对有次序的元素 $x \in A$,$y \in B$ 叫有序二元组(或称序偶),记作(x, y),并称 x 为第一元素,y 为第二元素.序偶中的两个元素也可属于同一集合(即 $A = B$).两个序偶(x_1, y_1),(x_2, y_2)相等,当且仅当$x_1 = x_2$,$y_1 = y_2$.由集合 A,B 中所有元素作成的序偶组成的集合,叫做集合 A 和B 的笛卡儿乘积(或称直积),即

定义 1.3 设 A,B 是两个非空集,我们把集合

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$$

称为 A 和B 的笛卡儿乘积(或称直积).

特别,当 $B = A$ 时,$A \times A$(也常记作 A^2)是 A 中一切元素所作成的序偶集合.例如,$\mathbf{R}^2 = \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ 可表示平面直角坐标系中全部点的坐标的集合.

定义 1.4 设 A,B 是两个集合,我们把集合

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ 且} x \in B\}$$

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ 或} x \in B\}$$

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ 但} x \notin B\}$$

分别叫做 A 和B 的交集,A 和B 的并集,B 在A 中的余集.余集也可记作 $\complement_A B$ 或 $A - B$,称 $A - B$ 为A 与B 的差集.

如果 $B \in P(X)$,即 $B \subset X$,则 B 在X 中的余集$X \setminus B$ 常记作$\bar{B}$.

1.2 二元关系及其性质

对于集合中的元素,我们要研究它们相互间具有的各种关系.例如:在数集中比较数的大小,有 $\leqslant$、$=$、$<$ 等关系;在直线集中,直线间有平行、垂直、相交等关系;在三角形集中,相似、全等是两种基本关系;在人口集中,人们之间有性别、国籍、肤色相同或不相同的关系;在电路的节点集和支路集中,节点与支路间有关联或不关联的关系.由这些例子可见,一个集合或不同集合中,两个元素间的"关系"是由某种特性或规则来描述的.

定义 1.5 设 X 是一个集合,R 是涉及两个元素的一个规则,如果对于 X 中的任两个元素 a,b 均可确定它们是适合 R(记作 aRb)或不适合 R(记作 $a\bar{R}b$),就称 R 是集 X 中的一个二元关系.

如果把 aRb 用序偶 (a,b) 表示,那末集 X 中所有适合关系 R 的元素组组成的集合是 $X\times X$ 的一个子集.因此,我们也可把 $X\times X$ 的一个子集 R 定义为集 X 中的一个二元关系.更一般,我们把 $X\times Y$ 的一个子集 R 定义为集 X 与 Y 间的一个二元关系.

下面讨论二元关系的一些基本性质.

定义 1.6 设 R 是集 X 中的一个二元关系,如果

(1) 对任意的 $a\in X$,均有 aRa,则称 R 是自反的;

(2) 对任意的 $a,b\in X$,若有 aRb 就有 bRa,则称 R 是对称的;

(3) 对任意的 $a,b\in X$,由 aRb 和 bRa,可推出 $a=b$,则称 R 是反对称的;

(4) 对任意的 $a,b,c\in X$,若有 aRb 和 bRc,就有 aRc,则称 R 是传递的.

关系 R 是自反的、对称的、反对称的和传递的,也常说成 R 具有自反性、对称性、反对称性和传递性.

例 在实数集中,小于($<$)关系具有传递性;小于或等于($\leqslant$)关系具有自反性、反对称性和传递性.

在正整数集中,如果 aRb 表示 $a\mid b$(即 a 整除 b,$b/a\in\mathbf{N}^*$),则 R 具有自反性、反对称性和传递性.

在三角形集中,三角形的相似关系 R 具有自反性、对称性和传递性.在平面直线集中,直线的平行关系 R 也具有自反性、对称性和传递性;而直线的垂直关系 R 只有对称性.在平面的点集中,点在某固定直线上投影相同的关系 R 具有自反性、对称性和传递性.

在集 X 的幂集 $P(X)$ 中,集合的包含关系"$\subset$"是自反的、反对称的和传递的.

在由世界各国组成的集合中,国家间有共同边界的关系是自反和对称的.

在人口集合中,父子关系显然没有自反性、对称性和传递性.

1.3　等价关系 等价类 商集

集合中的等价关系是把集合中元素分类的一种二元关系.要把集合中元素分类,自然会提出一个问题——什么叫做两个元素"相同"(或"相等","一样")呢?事实上天下没有完全不能区别的两个事物,因此,所谓两个元素"相同"通常只是指它们具有某种共性,或者说在某种意义下是"相同"的.例如:在动物世界里从动物的性质来看,"人类"中的每个人都是"相同"的;如果在人类中只考虑人的肤色,则所有黄种人都"相同";如果只考虑人的性别,则男人都"相同".如果对正整数只考虑能否被 2 整除,则偶数都"相同";如果对平面上由直线围成的封闭图形只考虑图形的顶点数,则所有三角形都"相同";如此等等.这样,我们就可把两个元素"相同"也看成一种"关系",这种"关系"当然有别于其它二元关系.下面的定义刻画了表示两个元素"相同"这个关系的特点.

定义 1.7(等价关系)　集合 X 中的一个二元关系 R 称为等价关系,如果 R 是自反的、对称的和传递的.

例如:　数的相等关系、直线的平行关系、三角形的相似关系、多边形的顶点数相等的关系、人口集合中肤色相同或性别相同的关系、平面点集的点在固定直线上投影相同的关系都是等价关系.再看一个例子:

设 $a,b\in\mathbf{Z}$,规定 aRb 为"a,b 模 n 同余"(记作:$a\equiv b\pmod n$),即 a,b 分别被固定的正整数 n 相除后,其余数为相同的非负整数 $r(0\leqslant r<n)$.整数集 $\mathbf{Z}$ 的这个二元关系 R 是 $\mathbf{Z}$ 的一个等价关系.因为:(1) 对任意的 $a\in\mathbf{Z}$,均有 $a\equiv a\pmod n$;(2) 若 $a\equiv b\pmod n$,则 $b\equiv a\pmod n$;(3) 若 $a\equiv b\pmod n$,$b\equiv c\pmod n$,则必有 $a\equiv c\pmod n$.

此例如取 $n=3$,容易看出 $\mathbf{Z}$ 的模 3 同余关系 R 把 $\mathbf{Z}$ 划分为三个互不相交的子集:

$$\bar{0}=\{3k\mid k\in\mathbf{Z}\}$$
$$\bar{1}=\{3k+1\mid k\in\mathbf{Z}\}$$
$$\bar{2}=\{3k+2\mid k\in\mathbf{Z}\}$$

它们分别是 **Z** 中模 3 余 0,模 3 余 1,模 3 余 2 的所有整数组成的子集.显然任一整数都属于且仅属于上述某一子集.这表明模 3 同余关系把全体整数分成上述三类.

要把集合中的元素按某种意义分类,自然要求不漏分任一个元素,也不把任一个元素分在两个不同类之中.下面两个定理表明,集合的等价关系可把集合的元素分类.

定义 1.8 (元素的等价和等价类) 设 R 是集 X 中的一个等价关系,a,$b \in X$,如果 aRb,则称 a,b 关于 R 是等价的,并把所有与 a 等价的元素

$$\bar{a} = \{x \mid xRa, x \in X\}$$

称为 a 关于 R 的等价类(简称 a 的等价类).

定理 1.1 设 R 是集 X 中的一个等价关系,$a,b \in X$,则 $\bar{a} = \bar{b}$ 当且仅当 aRb.

证 若 $\bar{a} = \bar{b}$,则由 $a \in \bar{a} = \bar{b}$ 得 aRb; 反之,若 aRb,则对任意的 $x \in \bar{a}$,即 xRa,由传递性得 xRb,即 $x \in \bar{b}$,故 $\bar{a} \subset \bar{b}$;同理可证 $\bar{b} \subset \bar{a}$,因此 $\bar{a} = \bar{b}$.

通常我们把 a 称为 $\bar{a}$ 的代表元.由定理 1.1 可见,$\bar{a}$ 中任一元素 b 均可作为 $\bar{a}$ 的代表元.

推论 若 R 是集 X 中的等价关系,则对任意的 $a,b \in X$,只能是 $\bar{a} = \bar{b}$ 或 $\bar{a} \cap \bar{b} \neq \varnothing$.

证 设 $\bar{a} \cap \bar{b} \neq \varnothing$,则存在 $x \in \bar{a} \cap \bar{b}$,于是有 xRa 和 xRb,再由 R 的对称性得 aRx,由 R 的传递性得 aRb,从而 $\bar{a} = \bar{b}$.

定理 1.2 若 R 是集 X 中的一个等价关系,则 X 中存在关于 R 的一族互不相交的等价类

$$\{\bar{a}_i : a_i \in X, i \in I\}$$

(其中 I 是所有等价类的代表元 a_i 的下标 i 组成的指标集),使得 $X = \bigcup\limits_{i \in I} \bar{a}_i$.

证 由于对任意的 a,均有 $a \in \bar{a}$,所以显然有 $X = \bigcup\limits_{a \in X} \bar{a}$.根据定理1.1 的推论,这个式子右边的任意两个等价类不是相等就是互不相交,因此,取 $\bar{a}(a \in X)$ 中所有互不相交的 $\bar{a}_i(i \in I)$,其并集就等于 X.

定理1.2表明,集 X 可按等价关系 R 划分为一族等价类,使 X 中任一元素必属于唯一的一个等价类.

例如,正整数集按模 2 同余关系分为奇数和偶数两个等价类;整数集按模 n 同余关系分为 n 个等价类 $\bar{0},\bar{1},\bar{2},\cdots,\overline{n-1}$;人口集合按性别关系分为男女

两个等价类.

定义 1.9 以集 X 的等价关系 R 来划分的所有等价类作为元素所组成的集合,称为 X 关于 R 的商集,记作 X / R.

例 整数集 $\mathbf{Z}$ 关于模 n 同余关系 R 的商集

$$\mathbf{Z}/R = \{\overline{0},\overline{1},\overline{2},\cdots,\overline{n-1}\}$$

平面直线集 L 关于直线平行关系 R 的商集

$$L/R = \{\overline{l} \mid l \text{ 为过某个定点的直线}\}.$$

设 M 为清华大学学生集,规定 aRb 为 a 与 b 是同班学生,则

$$M/R = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$$

其中 x_i 是第 i 班全体学生的集合,n 为清华大学学生班的总数.

1.4 序关系 偏序集 全序集 数学归纳法原理

序关系是对集合元素排序的一种二元关系.集合的元素可按大小、先后、重要性等原则排序,它们的共同特性反映在下面两个定义中.

定义 1.10 集 X 中的一个二元关系 R 称为偏序关系,如果 R 具有自反性、反对称性和传递性.

偏序关系 R 常记作 $\prec$,$a \prec b$ 读作"a 小于或等于 b",具有偏序关系 $\prec$ 的集 X 称为偏序集,记作$(X, \prec)$.

例 实数集中的 $\leqslant$ 关系,幂集 $P(X)$ 中的 $\subset$ 关系,正整数集 $\mathbf{N}^*$ 中的整除关系"$\mid$",都是偏序关系.

在一个集合中,可以定义不同的偏序关系.对于数集

$$A = \{1,2,3,5,6,8,10,30\}$$

虽然$(A,\leqslant)$和$(A,$整除$)$都是偏序集,但二者有所不同,对于 $\leqslant$ 而言,A 中任两个元素 a,b 都有 $a \leqslant b$ 或 $b \leqslant a$,因此 A 中全部元素可按 $\leqslant$ 排序,即

$$1 \leqslant 2 \leqslant 3 \leqslant 5 \leqslant 6 \leqslant 8 \leqslant 10 \leqslant 30$$

而对整除关系来说,A 中任两个元素未必有 $a \mid b$ 或者 $b \mid a$ 的关系,因此,A 只有某些子集的元素可按整除关系排序.例如 A 的子集

$$A_1 = \{1,2,6,30\}$$

对整除关系有

$$1 \mid 2, \quad 2 \mid 6, \quad 6 \mid 30$$

此外,由自反性和传递性还可得其它一些整除的情况.

定义 1.11 设$(X, \prec)$是一个偏序集,

试读结束:需要全本请在线购买: www.ertongbook.com