随机分形引论

胡迪鹤等　著

随机分形是融概率论、经典分析和几何学于一体的新兴数学分支，对研究随机过程和一般随机集的分形理论及其它相关学科有重要意义。

武汉大学学术丛书
WUHAN UNIVERSITY ACADEMIC LIBRARY

武汉大学出版社

随机分形引论

胡迪鹤　刘禄勤
胡晓予　吴　军　著

国家自然科学基金
国家教委专项基金　资助课题

武汉大学出版社
1995

图书在版编目(CIP)数据

随机分形引论/胡迪鹤等著·一武汉:武汉大学出版社,1996.2
ISBN 7-307-02121-8(平)
ISBN 7-307-02125-0(精)

Ⅰ.随…
Ⅱ.胡…
Ⅲ.随机分形—理论
Ⅳ.O 211

武汉大学出版社出版
(430072 武昌 珞珈山)
湖北省崇阳县印刷厂印刷
新华书店湖北发行所发行
1996 年 2 月第 1 版 1996 年 2 月第 1 次印刷
开本:850×1168 1/32 印张:14.25 插页:5
字数:366 千字 印数:1—1000(内含精装 200 册)
ISBN 7-307-02121-8/O·155 定价:15.80 元(平)
ISBN 7-307-02125-0/O·156 定价:21.80 元(精)

前　言

"分形"(Fractal)一词，源于Mandelbrot，B. B. 的"Fractals: Form, Chance and Dimension, Freeman, 1977."但是，它的基本概念与方法，Hausdorff、Besicovitch、Sierpinski 等人在本世纪初就已提出. 但当时并未引起学术界的充分重视. 直到本世纪70年代，由于理论发展及应用的需要，分形学才得到了迅速的发展. 分形学主要研究结构十分复杂、用经典数学手法很难处理、但实际中常见的集合（或图形）的几何性质及分析特征. 随着近代概率论的发展，融概率论、经典分析、几何与分形学于一体的"随机分形"(Random Fractal)得到了迅速的发展. 随机分形的研究，早在本世纪40年代就已开始，尽管当时还没有随机分形这个词. Lévy P. 早在1940年左右就开始研究Brown运动的样本性质，随后，Besicovitch A. S. 和 Taylor S. J. 也研究类似的问题. 综合他们三人的结果，可知：直线上的Brown运动的零集的Hausdorff维数为1/2. 这可能是随机分形的最早的一个漂亮的结果.

目前随机分形的研究，主要集中在下列四个方面：(1) 随机过程样本轨道的分形性质；(2) 几类典型的随机集的分形性质；(3) 分形上的随机过程的构造及其性质；(4) 离散分形理论. 本书也是沿着这四个方面展开讨论的.

关于随机过程样本轨道分形性质的研究，首先是从Brown运动开始的，因为它具有正态分布而且轨道连续等，这些良好的概率性质与分析性质，对研究提供了方便条件. 继Brown运动之后，人们广泛研究的是一类以Brown运动为其特例的Stable（稳定）过程. 到目前为止，Brown运动与Stable过程样本轨道分形性质（包括维数问题与测度问题）的研究，已近尾声，问题已基本解决.

至于一般的Lévy过程、统计自相似过程、马氏过程、各种随机场的分形理论的研究，完美的结果不多，尚有大量问题亟待研究.

关于典型随机集的分形性质的研究，首先是从经典Cantor集的随机化与推广开始，因为这类集合结构简单，但实际应用很广.然后，人们研究更为广泛和复杂的随机集，这就是：统计自相似集、统计自仿射集等等.经典Cantor集的各种随机化与推广的分形性质，包括维数与测度问题，已基本解决.统计自相似集的分形性质的研究，亦有许多漂亮的结果，但离基本解决问题尚远.统计自仿射集的分形性质的研究，则只有少数完美的结果.

分形集上的随机过程及其性质的研究，起始得较晚，大约在近十多年才开始研究.在分形集上构造随机过程的方法，目前大致有两种：一种是直接构造样本函数族、概率空间、坐标随机过程，这种方法构造的多半是递归集（如Sierpinski垫）上的Brown运动、自回避过程或自相似扩散过程.这种方法，概率直观性强，但较繁杂.另一种方法，基本上是分析方法，概率直观性较弱，此法利用Dirichlet forms、算子半群和其它微分算子，首先在分形集上定义一个算子半群，然后用它来定义其所对应的随机过程.

无论用"势"(Cardinal number)、"纲"(Category)，还是用经典的"维数"(Dimension)，都无法区别可数集A的"大小"，因为任何可数无穷集的势都一样；任何可数无穷集都是第1纲集；任何可数无穷集的经典维数（如Hausdorff维数、Topology维数、……）都是零.但是，无论从数学、统计物理或其它应用学科来看，引进某种能区别不同的可数无穷集的"大小"的"指标"是十分必要的和有益的.基于这种需要，近几年来，"离散分形"理论开始发展起来，并广泛地被利用于离散随机过程（特别是随机徘徊）及统计物理等方面的研究。

本书共十一章，主要论述随机分形的上述四方面的问题.为使全书能够自成体系，为了它的科学性、系统性和可读性，我们在第一章中用了相当大的篇幅论述拓扑空间中的测度理论及维数

概念. 第二章至第五章，论述随机过程的样本轨道的分形理论，着重讨论Brown 运动与Stable 过程. 第六章简介各种随机场的分形理论. 第七章讨论离散分形及其在随机徘徊中的应用. 第八章至第十章讨论几类典型的随机集（主要是随机Cantor 集、统计自相似集和统计自仿射集）的分形理论. 第十一章简介分形集上的随机过程的构造及其性质.

本书相当一部分内容是我们近年来的研究成果，但是，为了使本书既能作为一本“随机分形”研究者的引导书，又能作为一本概率论专业研究生的教学参考书，我们也收进了其他数学家们的一些研究成果、书中的引理、定理、命题的证明有详有简，有的甚至只录结论不予证明（但指出何处可查证明），这是为了尽量录用一些精采的结果而又不使全书篇幅过长. 一般说来，证明具有典型意义而又不太繁杂的，我们给出详细证明，纯分析的太繁杂的证明一般从略.

本书是在胡迪鹤的主持下，由胡迪鹤、刘禄勤、胡晓予、吴军分头执笔撰写的，第一、七、八、九章由胡迪鹤执笔，第二章、第四章的一部分、第五、六章由刘禄勤执笔，第四章的一部分及第三章由胡晓予执笔，第十章和第十一章由吴军执笔，然后集体讨论定稿而成.

本书得到了国家自然科学基金委及国家教委的专项基金（包括博士点基金）的资助，作者谨致谢意.

由于我们水平有限，缺点错误在所难免，敬请不吝指教，以期改正.

著者

1995 年于武汉

符　号　表

$\overline{A}$	集合 A 的闭包
A^c	集合 A 的补集
$A\cup B$	集合 A 与 B 的并
$A\cap B$	集合 A 与 B 的交
$A-B$ (A/B)	集合 A 与 B 的差
$\mathbf{E}$	期望算子
$\mathbf{E}^x$	关于 P^x 的期望算子
f：$E\to F$	由 E 到 F 的映射
$\mathscr{L}$	一维 Lebesgue 测度
$\mathscr{L}_d$	d 维 Lebesgue 测度
$\mathbb{N}$	自然数集
$\mathbb{N}_0$	非负整数集
$\mathbb{R}$	实数集
$\mathbb{R}_+$	非负实数集
$\varnothing$	空集
$\mathbb{R}^d$	d 维欧氏空间
Var	方差算子
$x\vee y$	x 与 y 的最大者
$x\wedge y$	x 与 y 的最小者
$\mathbb{Z}$	整数集
$\mathbb{Z}_+$	非负整数集
$\mathbb{Z}^d$	d 维整数格子点集
$(\Omega,\mathscr{F},\mathscr{P})$	概率空间
$\mathscr{F}\vee\mathscr{G}$	含 $\mathscr{F}$ 及 $\mathscr{G}$ 的最小 σ-代数

目　录

第一章

测度与维数

本章是全书的基础. 它系统地论述了多种测度与维数的概念，并讨论了存在于多种维数之间的关系以及他们的性质. 主要研究了 Hausdorff 维数、Packing 维数、Kaufman 维数、盒维数(也称 Kolmogorov 熵指数、Minkowski 维数或 Bouligand 维数)、离散的 Hausdorff 维数和离散的 Packing 维数. 由于本章的内容是基础性的，所以论证得比较详细和系统.

以下恒用$\mathbb{N}$ 表自然数集，$\mathbb{N}_0 \equiv \{0\} \cup \mathbb{N}$，$\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \cdots\}$，$\mathbb{R}$ 表实数集，$\mathbb{R}_+$表非负实数集. 集合 E 到集合 F 的映射(函数)记为

$$f: E \to F.$$

$\mathbb{R}^d$表 d 维欧氏空间，$\mathbb{Z}^d$表 d 维整数格子点集($d=1,2,\cdots$). $\varnothing$表空集合，A^c 和 $\overline{A}$ 分别表 A 的补集和闭包.

$(\Omega, \mathscr{F}, P)$恒表概率空间(通常是完备的)，$\mathbf{E}^P$ 表关于 P 的期望算子. 在不致混淆的情况下简记 $\boldsymbol{E}^P$ 为 $\mathbf{E}$.

设 $f: E_1 \to E_2$，$A \subset E_1$，$B \subset E_2$，$\mathscr{E}$ 是 E_2 上的一个集合系. 称

$$f(A) \equiv \{f(x): x \in A\},$$
$$\mathrm{Gr} f(A) \equiv \{(x, f(x)): x \in A\},$$
$$f^{-1}(B) \equiv \{x: f(x) \in B\}$$

分别为 f 在 A 上的像集、图集和 f 关于 B 的逆像集. 再记

$$f^{-1}(\mathscr{E}) \equiv \{f^{-1}(C): C \in \mathscr{E}\}.$$

§1 拓扑空间中的测度

定义 1.1 设有

$$\tau:\quad \mathscr{E}\to[0,\infty],$$

这里 $\mathscr{E}$ 是集合 E 的一个集合系.称 τ 是 $\mathscr{E}$ 上的一个预测度:如果 $\varnothing\in\mathscr{E}$ 且 $\tau(\varnothing)=0$.称 $\mathscr{E}$ 上的预测度 τ 是 $\mathscr{E}$ 上的测度,如果 τ 还满足:

(1) $A_1,A_2\in\mathscr{E},A_1\subset A_2\Rightarrow\tau(A_1)\leqslant\tau(A_2)$;

(2) $\{A_i\}\subset\mathscr{E},\bigcup_i A_i\in\mathscr{E}\Rightarrow\tau(\bigcup_i A_i)\leqslant\sum_i\tau(A_i)$.

若 $\mathscr{E}$ 是 E 的全体子集,则简称 $\mathscr{E}$ 上的预测度(测度)为 E 上的预测度(测度).

此处之测度实为通常的外测度,而通常的测度将是下面定义1.2中的可数可加测度.本书所言的测度,都是定义1.1中的测度(外测度).

定义 1.2 设有

$$\tau:\quad \mathscr{E}\to[0,\infty],$$

这里 $\mathscr{E}$ 是集合 E 的一个 σ 代数.称 τ 是 $\mathscr{E}$ 上的一个可数可加的测度:如果

(1) $\tau(\varnothing)=0$;

(2) $\{A_i\}$ 是 $\mathscr{E}$ 中两两不交的集合列 $\Rightarrow\tau(\bigcup_i A_i)=\sum_i\tau(A_i)$.

显然,可数可加的测度是测度.

定理 1.1 设 $\mathscr{E}$ 是 E 的一个集合系,τ 是 $\mathscr{E}$ 上的一个预测度,对任何 $A\subset E$,定义

$$\mu(A)=\inf_{\substack{C_i\in\mathscr{E}\\ \bigcup_i C_i\supset A}}\sum_i\tau(C_i),\tag{1.1}$$

则 μ 是 E 上的测度.我们就说 μ 是由预测度 τ 按模式(Ⅰ)产生的测度.(注意:(1.1)右端可能不存在 $C_i\in\mathscr{E},\bigcup_i C_i\supset A$,这时按惯例

定义 $\inf\varnothing$ 为 ∞.)

如果 ν 是 E 上任一测度，η 是 E 上的预测度，且

$$\nu(A)=\eta(A) \qquad (\forall\ A\subset E),$$

则 ν 是由 η 按模式(Ⅰ)产生的测度.

证 先证定理 1.1 的第一部分. 显然(1.1)定义的 μ 是预测度. 下面证明 μ 满足定义 1.1 中(1)和(2).

(1)是显然的，只证(2).

任取 $\{A_i\}\subset\mathscr{E}$，$\bigcup_i A_i\in\mathscr{E}$. 若 $\sum_i\mu(A_i)=\infty$，则(2)显然成立. 故可设 $\sum_i\mu(A_i)<\infty$. 这时每个 $\mu(A_i)$ 均为有穷，所以任给 $\varepsilon>0$，对任一 i，均有

$$\bigcup_j C_j^{(i)}\supset A_i, C_j^{(i)}\in\mathscr{E}, \{C_j^{(i)}\}\subset\mathscr{E},$$

使

$$\sum_j\tau(C_j^{(i)})\leqslant\mu(A_i)+\varepsilon\cdot 2^{-i},$$

从而

$$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\tau(C_j^{(i)})\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}\mu(A_i)+\varepsilon.$$

由 ε 的任意性得知

$$\sum_{i=1}^{\infty}\mu(A_i)\geqslant\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i).$$

(2)证毕.

再证定理 1.1 的第二部分. 设 λ 是由预测度 η 按模式(Ⅰ)产生的测度，则对任何 $A\subset E$，有

$$\lambda(A)\leqslant\eta(A)=\nu(A).$$

另一方面，任取 $C_i\subset E$，$\bigcup_i C_i\supset A$，总有

$$\sum_i\eta(C_i)=\sum_i\nu(C_i)\geqslant\nu(\bigcup_i C_i)\geqslant\nu(A),$$

所以

$$\lambda(A)\geqslant\nu(A).$$

故 ν 是 η 按模式(Ⅰ)产生的测度. 定理证毕.

推论 1.1 由测度(当然也是预测度)再按模式(Ⅰ)产生的测度还是它自己.

定义 1.3 设 μ 是 E 上的测度. 称 E 中的子集 A 是 μ-可测的, 如果对任何 $B_1\subset A, B_2\subset E-A$, 总有 $\mu(B_1\cup B_2)=\mu(B_1)+\mu(B_2)$.

全体 μ-可测集记为 $\sigma(\mu)$.

定理 1.2 $\sigma(\mu)$ 是 σ 代数, $\mu|_{\sigma(\mu)}$ 是可数可加的测度. 其中 $\mu|_{\sigma(\mu)}$ 表 μ 在 $\sigma(\mu)$ 上的局限.

证 证明甚易, 从略.

定理 1.3 设 μ 是 E 上的测度, $F\subset E$, $\{A_n\}\subset\sigma(\mu)$.

1) $\{A_n\}$ 单增 $\Rightarrow \mu(F\cap(\bigcap\limits_n A_n))=\sup\limits_{n\geqslant 1}\mu(F\cap A_n)$;

2) $\{A_n\}$ 单降且 $\exists\ n_0$ 使 $\mu(F\cap A_{n_0})<\infty \Rightarrow$

$$\mu(F\cap(\bigcap_n A_n))=\inf_{n\geqslant 1}\mu(F\cap A_n).$$

证 证明甚易, 从略.

定义 1.4 称 E 上的测度 μ 是正则的, 如果 $\forall\ B\subset E$, $\exists\ A\supset B, A\in\sigma(\mu)$, 使 $\mu(B)=\mu(A)$.

定理 1.4 设 μ 是 E 上的正则测度. 则

1) $\{A_n\}$ 单增, $A_n\subset E(n\geqslant 1)$ $\Rightarrow$

$$\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n)=\sup_{n\geqslant 1}\mu(A_n);$$

2) $M\in\sigma(\mu), \mu(M)<\infty \Rightarrow$

$$\forall\ B\subset M, B\in\sigma(\mu)\text{的充要条件是}$$

$$\mu(M)=\mu(B)+\mu(M-B).$$

证 1) 因 μ 是正则的, 所以 $\forall\ n\geqslant 1$, 可取 $B_n\supset A_n, B_n\in\sigma(\mu)$, 使 $\mu(A_n)=\mu(B_n)$. 令 $C_n=\bigcap\limits_{m\geqslant n}B_m$, 则 $A_n\subset C_n\subset B_n(n\geqslant 1)$. 因此

$$\mu(A_n)\leqslant\mu(C_n)\leqslant\mu(B_n)=\mu(A_n)\quad(n\geqslant 1).$$

再注意 $\{C_n\}$ 单增且 $\{C_n\}\subset\sigma(\mu)$ 并应用定理 1.3 1) 得知

$$\sup_{n\geqslant 1}\mu(A_n)=\sup_{n\geqslant 1}\mu(C_n)$$

$$=\mu(\bigcup_{n\geq 1}C_n)\geq\mu(\bigcup_{n\geq 1}A_n),$$

而$\sup\limits_{n\geq 1}\mu(A_n)\leq\mu(\bigcup\limits_{n\geq 1}A_n)$显然成立,1)证毕.

2)设 $B\subset M$,$B\in\sigma(\mu)$,则 B 与 $M-B$ 不交且皆属于 $\sigma(\mu)$,故 $\mu(M)=\mu(B)+\mu(M-B)$.

$\forall\ B\subset M$,若 $\mu(M)=\mu(B)+\mu(M-B)$,令

$$C=M-B,$$

则由 μ 是正则测度得知:$\exists\ B^*$、$C^*\in\sigma(\mu)$,使

$$B\subset B^*\subset M,\mu(B)=\mu(B^*);$$

$$C\subset C^*\subset M,\mu(C)=\mu(C^*).$$

由 B^*、$C^*\in\sigma(\mu)$知

$$\mu(B^*-C^*)+\mu(B^*\cap C^*)+\mu(C^*-B^*)$$
$$=\mu(B^*\cup C^*)\geq\mu(B\cup C)=\mu(M),\qquad(1.2)$$

仿之,

$$\mu(B^*-C^*)+2\mu(B^*\cap C^*)+\mu(C^*-B^*)$$
$$=\mu(B^*)+\mu(C^*)=\mu(B)+\mu(C)=\mu(M)<\infty,\qquad(1.3)$$

比较(1.2)和(1.3)即得

$$\mu(B^*\cap C^*)=0.\qquad(1.4)$$

令 $D=B^*-B$,则

$$D=B^*\cap(M-B)=B^*\cap C\subset B^*\cap C^*.\qquad(1.5)$$

由(1.4)、(1.5)得 $\mu(D)=0$,从而 $D\in\sigma(\mu)$. 再注意 $B^*\in\sigma(\mu)$、$D=B^*-B$得 $B\in\sigma(\mu)$. 定理得证.

定理 1.5　设 I 是任意指标集,$\forall\ n\in I$,μ_n 是 E 上一个测度.

1)　$\forall\ B\subset E$,定义

$$\mu(B)=\sup_{n\in I}\mu_n(B),$$

则 μ 是 E 上的一个测度;

2)　存在唯一一个 E 上的测度 γ 使:

$(a)\gamma(B)\leq\inf\limits_{n\in I}\mu_n(B)$　$(\forall\ B\subset E)$;　(1.6)

(b)对任何一个 E 上的满足

$$\lambda(B)\leqslant\inf_{n\in I}\mu_n(B)\quad(\forall\ B\subset E)\tag{1.7}$$

的测度 λ，总有

$$\gamma(B)\geqslant\lambda(B)\quad(\forall\ B\subset E).\tag{1.8}$$

证 1）可由测度的定义直接验证之.

2）的证明如下：令

$$\gamma(B)=\sup_{\lambda\in\Gamma}\lambda(B)\quad(\forall\ B\subset E),\tag{1.9}$$

其中

$$\Gamma=\{\lambda:\lambda\text{ 是 }E\text{ 上的满足(1.7)的测度}\},$$

则 γ 即为所求.

定义 1.5 设 μ 是 E 上一个测度，$\mathscr{E}$ 是 E 的一个子集系. 称 μ 是 $\mathscr{E}$-正则的，如果对任何 $B\subset E$，存在 $B^*\in\mathscr{E}$，使 $B\subset B^*$ 且 $\mu(B)=\mu(B^*)$.

证
$$\mathscr{E}_\sigma=\{B:B=\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n,B_n\in\mathscr{E}\},$$
$$\mathscr{E}_\delta=\{B:B=\bigcap_{n=1}^{\infty}B_n,B_n\in\mathscr{E}\},$$
$$\mathscr{E}_{\sigma,\delta}=(\mathscr{E}_\sigma)_\delta.$$

显然定义 1.5 是定义 1.4 的推广. 定义 1.4 中的正则测度，即定义 1.5 中的 $\sigma(\mu)$-正则测度.

定理 1.6 设 τ 是定义在 E 的子集系 $\mathscr{E}$ 上的预测度，$E\in\mathscr{E}$，μ 是由 τ 按模式（Ⅰ）所产生的测度，则 μ 是 $\mathscr{E}_{\sigma,\delta}$-正则的.

证 $\forall\ B\subset E$，

1）若 $\mu(B)=\infty$，则有

$$E\in\mathscr{E}\subset\mathscr{E}_{\sigma,\delta},E\supset B,\mu(E)=\mu(B)=\infty.$$

2）若 $\mu(B)<\infty$，取

$$D=\bigcap_{j=1}^{\infty}\bigcup_{i=1}^{\infty}C_i^{(j)},$$

其中

$$C_i^{(j)}\in\mathscr{E},\bigcup_{i=1}^{\infty}C_i^{(j)}\supset B,\sum_{i=1}^{\infty}\tau(C_i^{(j)})<\mu(B)+\frac{1}{j},$$

则有

$$D \supset B, D \in \mathscr{E}_{\sigma,\delta}, \mu(D) = \mu(B).$$

定理证毕.

下面我们研究距离空间(E,ρ)上的测度，其中ρ是E上的一个距离. $\rho(A,B)$表二集合A与B之间的距离：

$$\rho(A,B) \equiv \inf_{x \in A, y \in B} \rho(x,y), \forall A, B \in E;$$

$\rho(x,B)$表点x与集合B之间的距离：

$$\rho(x,B) \equiv \rho(\{x\}, B).$$

集合A的直径

$$\operatorname{diam}(A) \equiv \sup_{x,y \in A} \rho(x,y),$$

空集$\varnothing$的直径$\operatorname{diam}(\varnothing)$定义为0. 有时简记$\operatorname{diam}(A)$为$\operatorname{diam}A$.

定义 1.6 设(E,ρ)是一距离空间，$\mathscr{E}$是E的一个子集系，τ是定义在$\mathscr{E}$上的一个预测度，令

$$\mu(B) = \sup_{\varepsilon > 0} \mu_\varepsilon(B) \quad (\forall B \subset E), \tag{1.10}$$

其中

$$\mu_\varepsilon(B) = \inf_{\substack{C_i \in \mathscr{E}, \cup C_i \supset B \\ \operatorname{diam}(C_i) \leqslant \varepsilon}} \sum_{i=1}^{\infty} \tau(C_i). \tag{1.11}$$

易证μ_ε是E上的测度，从而，由定理 1.5 知μ亦为E上的测度. 我们就说μ是由预测度τ按模式(Ⅱ)产生的测度.

显然，当ε下降时，μ_ε上升，故

$$\mu(B) = \sup_{\varepsilon > 0} \mu_\varepsilon(B) = \lim_{\varepsilon \to 0} \mu_\varepsilon(B). \tag{1.12}$$

定义 1.7 设(E,ρ)是一距离空间，$A, B \subset E$. 称A、B是一对隔离集，如果$\rho(A,B) > 0$. 称E上的测度μ是一个距离测度，如果对任一对隔离集A,B，都有

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B).$$

定理 1.7 距离空间(E,ρ)上的由预测度τ按模式(Ⅱ)产生的测度μ都是距离测度.

证 为证定理，只需证明对任一对隔离集A,B，有