高等学校教学用书

概率论与数理统计

廖昭懋　杨文礼　编

北京师范大

高等学校教学用书

概率论与数理统计

廖昭懋　杨文礼　编

北京师范大学出版社

高等学校教学用书
概率论与数理统计
廖昭懋　杨文礼　编
*
北京师范大学出版社出版发行
全 国 新 华 书 店 经 销
中国科学院印刷厂印刷

开本：850×1168 1/32 印张：15.75 字数：383 千
1988 年 11 月第 1 版　1988 年 11 月第 1 次印刷
印数：1—5 000

ISBN 7-303-00220-0/O·53
定　价：3.75 元

内 容 提 要

本书由概率论及数理统计两部分组成．前一部分包括事件与概率、随机变量及其分布、数字特征、大数定律与中心极限定理等内容；后一部分包括参数估计、假设检验、方差分析与正交试验设计、回归分析等内容．

本书深入浅出、例题丰富、推证详细，各章后均附小结，便于自学．

本书可作为高等师范院校数学系本科生、中学数学教师进修以及教育学院数学专业学生学习的教材或参考书．

出 版 说 明

北京师范大学是一所具有八十多年历史的老学校，在学科建设和教学实践中积累了一定的经验，将它贯彻到教材中去无疑是有益的．为了加强教材建设，加强与兄弟院校的交流，我社约请北京师范大学数学和数学教育研究所所长严士健教授等组成教材编委会，编写出版一套教材．编委会在研究当前教学改革的新情况和过去的教学经验的基础上，同时参照原教育部 1984 年颁发的中学教师进修大纲，对教材的编写宗旨和要求进行认真地讨论．组织数学系有教学经验的教师进行编写．并且由编委等分工负责对书稿进行审订．

这套教材包括数学分析、解析几何、高等代数、概率论与数理统计、常微分方程、复变函数论、抽象代数基础、高等几何、微分几何、实变函数论与泛函分析、计算方法、理论力学以及高等数学(物理、天文、无线电等专业用)等．

这套教材文字通俗易懂、内容由浅入深、循序渐进，便于自学，科学系统性较强．每章有小结，每节(或几节)后配有习题．每章有总复习题．习题安排由易而难，层次清楚．书后附有习题答案或提示，以利于读者自学时检查自已的作业．

为了适应不同层次学校和人员的需要，书中有些内容加了“*”号，它相对独立，如因学时较少，可以删去．

这套教材可供高等师范院校本科生(或专科)、教育学院数学系、函授(数学专业)、在职中学教师进修等使用．

编 者 的 话

《概率论与数理统计》是研究随机现象数量规律的学科，它是近代数学的重要分支，今天它已被广泛应用于工农业生产、科学技术及经济、行政管理之中.《概率论与数理统计》现在已是高等学校数学系及其它许多系、专业学生的一门必修基础课，学习《概率论与数理统计》的基本理论与方法已是中学数学教师的迫切任务.本书的编写目的就是为高等师范院校数学系本科生和广大中学数学教师学习、进修提供一本教材或学习参考书，也可供其它同等要求的学生及实际工作者作为学习时的教材或参考书.

本书对概率论与数理统计的基本理论与方法作了较全面系统的介绍，并在直观背景清楚、统计思想明确的前提下，尽量给以严格的数学证明，论证中假定读者具有数学分析及高等代数的最基本知识，个别新的知识以引理的形式给以补足.

本书的编写力求做到：重点突出，讲述详细，例题丰富，便于自学.考虑到教学时数的限制，有些内容(特别是打“*”号的内容)可以略而不讲(读)，这样做并不妨碍读者掌握概率论与数理统计的基本思想与内容.

本书概率论部分由廖昭懋编写，数理统计部分由杨文礼编写.在编写过程中，徐承彝同志仔细审阅了全文，提出了很多宝贵的意见；教研室其它同志也给予了热情的支持与帮助.在此，我们向他们表示衷心的感谢.

由于编者水平所限，书中一定会有不少缺点与错误，敬请读者批评指正.

编者

1986 年 10 月 30 日

目　　录

第一篇　概率论基础

第二篇　数 理 统 计

第一篇 概率论基础

引 言

概率论与数理统计是从数量这个侧面研究随机现象统计规律的一门学科，它是数学的一个重要分支.

在自然界和人类社会中存在着两类不同的现象，一类是确定性现象，另一类是随机现象.

我们常可看见这样一类现象：在一定的条件 S 下进行某种试验或观察，事先可以预料必然出现某种结果，或者说在条件 S 不变的情况下，重复进行一系列这种试验或观察，所得结果是完全相同的. 像这类在一定条件下必然出现某种结果的现象称为**确定性现象**. 例如，纯水在一个大气压下加热到 100℃ 必然沸腾；向上抛一物体必然下降；异性电荷必然相吸引，同性电荷必然相排斥；将石蕊试纸放入酸性溶液中，试纸必呈红色等等，它们都是确定性现象.

常见的另一类现象是：在一定的条件 S 下进行某种试验或观察，在试验或观察进行之前无法预知确切的结果，只知道可能出现这样的结果，也可能出现那样的结果. 当然，一旦试验或观察进行之后，出现什么结果就是完全确定的了. 但是，在条件 S 不变的情况下，重复进行一系列这种试验或观察所得的结果却是不尽相同的. 像这类在一定条件下可能出现的结果不止一个，至于出现哪一个，事先又无法确定的现象称为**随机现象**. 例如，

1) 在固定射手、目标和射击器械等条件下，射手向一目标进行射击之前，我们是无法知道射击结果的，只知道射手可能命中目标，也可能未命中目标.

2) 观察某商店在一天内接待的顾客数，如果我们对这个商店观察几天，观察结果可能是：前天接待顾客 200 人，昨天接待顾客 120 人，今天接待顾客 140 人. 一般来讲，这个商店每天接待的顾客数通常总是多少不一的，而且在头一天无法确知第二天接待多少个顾客.

3) 在固定人和测量仪器的条件下，对某物体的长度进行测量，由于不可避免地有许多使测量产生误差的因素在影响着测量结果，而这些因素又是无法控制的. 因此，在测量之前无法知道将要测得的确切结果，如果多次测量这一物体，所测得的结果一般说来总略有差异.

此外，如观察"昆虫产卵的个数"、"某地区的年降雨量"、"分子运动的速度"、"电话交换台在单位时间内收到的呼唤次数"等等，由于事先都不能确切知道各会出现什么结果，因此它们也都是随机现象.

对于随机现象，就个别的试验或观察而言，它会时而出现这样的结果，时而出现那样的结果，呈现出一种不确定性，这是随机现象所具有的偶然性或随机性的一面. 另外，人们还发现，在大量重复试验或观察下，其结果却呈现出某种规律性，我们称这种规律性为"统计规律性"，这说明随机现象具有必然性或规律性的一面. 概率论与数理统计就是从量的侧面去揭示和研究随机现象的这种规律性的一门学科.

概率论与数理统计发展到今天，除了它本身有严格的理论基础和丰硕的成果之外，它还是一门应用非常广泛的数学学科. 它的理论与方法不仅愈来愈深入地渗透到物理、化学、生物、医学、地学等学科的研究中，而且还愈来愈普遍地应用到工农业生产、气象

与地震预报、经济管理、电子技术与计算机等各个部门．因此，概率论与数理统计是一门具有很强生命力的学科，可以预料，随着科学、技术和生产的迅猛发展，这门学科也必将继续蓬勃地向前发展。

第一章　随机事件与概率

§1 随机试验

自然界和人类社会中的各种各样的现象常常在人们所进行的试验或观察中呈现出来．今后，我们把呈现出来的是随机现象的试验或观察称之为**随机试验**，为方便起见，也简称为**试验**．在概率论与数理统计中，我们总是通过研究随机试验来研究随机现象的，而且所研究的随机试验具有以下特点：

(1) 试验可以在相同的条件 S 下重复进行；

(2) 试验的可能结果不止一个，并且能事先明确知道试验的所有可能结果；

(3) 在每次试验之前，不能肯定这次试验会出现什么结果，但可以肯定每次试验总是出现这些可能结果中的某一个．

在引言中列举的随机现象 1)、2)、3) 可分别在下面的随机试验中呈现出来．

E_1：射手向一目标射击，观察命中目标与否．

E_2：观察某商店在一天内接待的顾客数．

E_3：测量一物体的长度，观察测量结果．

显然，上面三个试验都可以在相同的条件下重复进行．对于试验 E_1，可以明确知道它的所有可能结果有两个：命中目标和未命中目标，而且在每次射击之前不能肯定会出现什么结果，但可以肯定总是出现这两个结果中的一个．对于试验 E_2，每天接待的顾客数可以为 0，或 1，或 2，…，因此，试验的所有可能结果是全体

非负整数．自然，每天接待的顾客数不能事先肯定，但可以肯定总是某一个非负整数． 对于试验 E_3 测得的物体长度可以是某个非负实数，因此试验的所有可能结果是全体非负实数．显然，在测量前无法知道测得的确切结果，但知道测得的结果不会在非负实数之外．因此，上述随机试验 E_1、E_2 和 E_3 都具有特点 (1)—(3)．

在这里顺便提一下，一个随机试验总是在一定的条件 S 下进行的，如果条件不同，则认为是不同的试验．不过，在通常的情况下，条件 S 常常不具体指出．

§2 样本空间与随机事件

在概率论中讨论一个随机试验时，试验的所有可能结果应是明确知道的，每一个结果称为一个**样本点**，并用 ω 表示．由样本点(试验的可能结果)的全体构成的集合称为**样本空间**，常用 Ω 表示．在具体问题中，给出样本空间是描述随机试验的第一步．下面举一些随机试验的例子来具体给出它们的样本空间．

例 2.1 抛一枚硬币，观察正、反面出现的情况．我们约定：在硬币上标有币值的一面为正面，另一面为反面，这个随机试验的所有可能结果有两个：正(抛得正面朝上)，反(抛得反面朝上)，故样本空间 $\Omega=\{正，反\}$．这个试验的所有可能结果共有两个，即有两个样本点，若记

$$\omega_1=正，\omega_2=反$$

则样本空间也可抽象地记为

$$\Omega=\{\omega_1,\ \omega_2\}$$

例 2.2 连续两次抛一枚硬币，观察正、反面出现的情况．在这个随机试验中，所有的可能结果有 4 个：(正，正)，(反，反)，(反，正)，(正，反)，此处的记号，如(正，反)，表示“第一次抛得正面朝上，第二次抛得反面朝上”这一结果，其余类似．因此样本空间

$$\Omega=\{(正,正),(反,反),(反,正),(正,反)\}$$

若记

$$\omega_1=(正,正),\quad \omega_2=(反,反)$$

$$\omega_3=(反,正),\quad \omega_4=(正,反)$$

则样本空间也可抽象地记为

$$\Omega=\{\omega_1,\ \omega_2,\ \omega_3,\ \omega_4\}$$

例 2.3 一个袋中装有两个红球和一个白球，从袋中任意地(或随机地)取出两球，观察它们的颜色．在这个试验中，只关心取出的两球是什么颜色，而不管是哪两个球，又因为两球同时被取出，所以无需考虑顺序，故试验的所有可能结果只有两个，即有两个样本点，若记

ω_1＝“取出的两球都是红球”

ω_2＝“取出的两球一个红一个白”

则样本空间

$$\Omega=\{\omega_1,\ \omega_2\}$$

如果上述随机试验不是观察取出的两球是什么颜色，而改为观察它们是三个球中的哪两个，这时就需要区别三个球，为此，对三个球进行编号，两个红球分别为 1，2 号，白球为 3 号．于是这个试验的所有可能结果应为 3 个，即有 3 个样本点，若记

ω_1＝“取出的是 1，2 号两球”

ω_2＝“取出的是 1，3 号两球”

ω_3＝“取出的是 2，3 号两球”

则样本空间

$$\Omega=\{\omega_1,\ \omega_2,\ \omega_3\}$$

上面所述的随机试验的样本空间都只有有限个样本点．

例 2.4 观察电话交换台在单位时间内收到的呼唤次数．若用 k 表示“在单位时间内收到 k 次呼唤”这一结果，$k=0,1,2,\cdots$，则样本空间