自然科學經典著作譯叢

論氣體射流

C. A. 查浦雷金著

科學出版社

52.82

自然科學經典著作譯叢

論氣體射流

C. A. 查浦雷金 著

莊逢甘 譯

科學出版社

內 容 提 要

本書係蘇聯偉大航空力學家 C. A. 查浦雷金的博士論文，由蘇聯國家技術理論書籍出版社作爲自然科學經典著作出版。在本書中考慮了可壓縮流體具有自由表面的高速平面射流，將運動方程轉化爲線性方程，從而得出一些具有物理意義的謹嚴解，並仔細地研究了這些解的性質。在本書的末尾，著者提出了一種近似處理方法，後來被應用到繞體流動問題上去。這些研究對於氣體動力學的發展起了重要的作用，本書乃是這一部門的重要經典著作之一。蘇聯學者從查浦雷金的工作的基礎上出發，在創造性地解決高速飛行中的機翼理論以及一些其他問題上獲得了輝煌的成就。

2092/(3) 05

論 氣 體 射 流

С. А. Чаплыгин

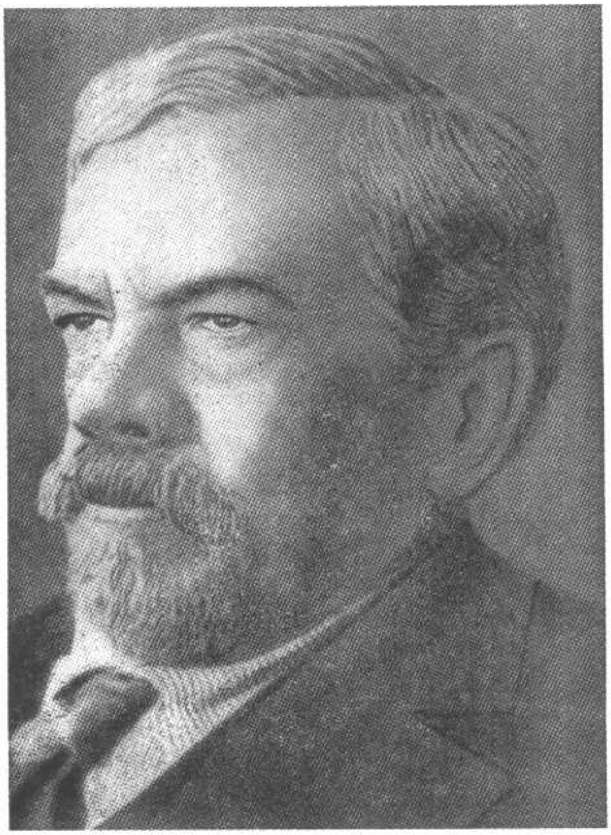
О ГАЗОВЫХ СТРУЯХ

Государственное Издательство
Технико-теоретической Литературы
Москва, 1949, Ленинград

原 著 者	查 浦 雷 金
翻 譯 者	莊 逢 甘
出 版 者	科 學 出 版 社 北京東四區帽兒胡同2號
印 刷 者	啓 智 印 刷 廠 上海自忠路239弄28號
總 經 售	新 華 書 店

書號：0151	1955年2月第一版
(譯) 092	1955年2月第一次印刷
(滬) 0001—2540	開本：787×1092 1/18
字數：92,000	印張：$5\frac{4}{9}$

定價：11,000元



C. A. 查浦雷金

目　錄

關於 C. A. 查浦雷金在氣體動力學方面的工作

C. A. 查浦雷金是傑出的俄羅斯學者，是俄羅斯航空之父 H. E. 儒可夫斯基的學生、戰友和他的事業的繼承者。C. A. 查浦雷金和儒可夫斯基在一起創造了一門新的科學即研究空氣流過飛機機翼、螺旋槳槳葉、壓縮器和渦輪葉片的規律的空氣動力學。

大家知道，查浦雷金的成就並不限於空氣動力學一門，他的工作還包括一般力學與微分方程的近似積分方法；現在經過對他遺留下的很多沒有發表的手稿的整理，又知道了他在彈性理論方面的工作也很多，並且在這一範圍內他得到了在當時是重要的結果。

在查浦雷金的許多著作中有一篇在現時仍在科學上佔有絕對特殊的地位。這就是查浦雷金的博士論文"論氣體射流"的工作。這工作最初由查浦雷金在 1896 年在莫斯科數學學會中提出，然後在 1902 年作為莫斯科大學學術專著發表。這一著作已經有了超過半世紀的年齡！這一著作是以高速度即近聲速氣流的研究亦即氣體動力學為主題的。在當時氣體動力學作為一門專門科學還不存在。甚至於還沒有"氣體動力學"這一名稱。

查浦雷金的著作"論氣體射流"構成了作為獨立的一門科學氣體動力學的基礎。但是這一工作在卅多年中差不多一直到 1934—1935 年很少有人研究，儘管在查浦雷金自己的著作中常常引到這一項研究。

從 1934—1935 年起，這一工作在各方面得到了進一步的推廣和發展，但亦可以說，直到最近數年來，這一研究工作的巨大意義才完全顯現出來。

廣大的學者們對於查浦雷金"論氣體射流"著作的生動的興趣是與這樣的事實有關，即飛機的速度已經很快地變得靠近聲速而在飛行科學中氣體動力學已代替了空氣動力學。

讓我簡短地論述"論氣體射流"這一著作的對象和查浦雷金在這一工作中所發展了的方法。

如果流速不大，空氣的密度幾乎不變。這是由於相當小的壓力差能產生較大

的流動速度。如果我們觀察一氣體射流並跟隨着一個空氣質點，這質點由靜止狀態開始不斷獲得更大的速度，隨之進入射流的壓力更低的區域，於是發現如果速度約為 100 公尺/秒(360 公里/小時)，空氣壓力降低總共不到 4%，相當於 3% 的密度變化。如果速度約為 200 公尺/秒 (720 公里/小時)，壓力變化達到 20%。密度變化達到 15%。如果速度等於聲速(320 公尺/秒)，壓力降低一半而質點密度的降低達 36%。由此可見，在空氣動力學中，對於 100 公尺/秒以下的速度，空氣的壓縮性可以略去不計。查浦雷金"論氣體射流"的著作最先很明白地說明了這些推理。由 H.E. 儒可夫斯基和 C.A. 查浦雷金所創始的理論空氣動力學就是處理這種不可壓縮氣體模型的。這大大地簡化了研究過程，並且使我們得以利用充分發展了的複變數函數理論這一工具。

如飛行速度很大，空氣壓縮性的影響就很大，而當接近聲速時，壓縮性就有決定性的影響，它從質的方面完全改變了流動的圖案。

當速度接近聲速或超聲速時，一些新的法則起控制作用，它們使許多是由 H.E. 儒可夫斯基和 C.A. 查浦雷金所研究和發現的那些定律複雜化了。

查浦雷金的著作"論氣體射流"是以在任何地點都不超過聲速的氣流為主題的。

在一高速度氣流繞過一物體或一氣流從容器流出的情況下，在不同流絲上的氣體質點具有不同的速度，物體周圍各點上空氣密度也不同，並且密度和速度有關。

查浦雷金引進了直接和流動的物理圖案聯系的特殊變數，將氣體運動方程轉換成一非常簡單的形式。現在這些方程式就叫做查浦雷金方程。他取速度向量之值(或它的某一確定的函數)以及速度和某一固定方向所成的角度作為獨立變數，而取每一給出氣流中流絲特性的流函數及所謂速勢作為未知函數。我們發現，經過這一變換，複雜的氣體運動方程就成為一個祇含有一個唯一的、和速度大小有關的係數的方程。當速度很小時這一係數接近於一。當速度等於聲速的 70%，這一係數等於 0.95，速度等於 90% 聲速時為 0.85，等於聲速時則為零。於是如查浦雷金所指出的那樣，如設這一係數等於常數，我們可以得到非常好的近似解。現在氣體動力學方程絕大部分的近似解就是利用這一性質的。

查浦雷金立即找出他自己的方程的一組特解，它們相當於不可壓縮流體中各

種不同次的源(重源)的解。

這些特解按照它們的結構來講是和不可壓縮流體中的相應的解完全類似的，唯一的不同是在於用速度絕對值的超越幾何函數代替了它的冪函數。這些解對於解釋從亞聲速到超聲速的過渡的機構是非常重要的。

查浦雷金將這許多特解疊加得出方程的最一般解。當時，在查浦雷金寫這一著作時，還沒有理論空氣動力學，儒可夫斯基還沒有發現他的定律。機翼理論也還不存在。

在當時由黑爾姆霍茲和克希霍夫開始的、研究具有滑流表面的液體射流的方向是注意力的中心。H. E. 儒可夫斯基在 1890 年所發表的著作中給出了關於射流問題的完整的數學處理。

這給出了從容器流出的液流各種現象的正確圖案，在這條道路上得出了很多富有成就的結果。對於解釋機翼升力和阻力的作用，這一圖案是完全無能爲力的，因爲它並不與實在情况相符。祇有在極端的和實際上完全無用的情况下它才近乎實在。關於機翼升力問題正確的物理提法是此後隔很久才由 H. E. 儒可夫斯基給出的。

查浦雷金將他所找到的新的氣體運動方程應用到射流理論的兩個基本問題之上:從噴孔中流出的氣流及繞過與氣流方向垂直的平板的氣流。

所得出的解是非常簡單的。查浦雷金證明了：如把相當於不可壓縮流體問題的解按照重源用級數形式表示，然後在這些級數內用從他自己的方程中所找出的、與重源有關的特解來代替，就得出氣流的相當解。

這是第一個和到現在爲止還是唯一的用顯明形式表示的關於氣流問題的準確解。

C. A. 查浦雷金精密地計算了射流的收縮係數和平板所受的阻力，並將它們和實驗結果比較。

以後發現，將查浦雷金用級數形式表現出的解直接應用到沒有離體現象的繞過機翼的氣流問題上去是很困難的，因爲級數不再在所需要的區域內收斂。將查浦雷金的工作用到機翼上去必需要克服若干困難的。但是可壓縮流體和不可壓縮流體的類比的概念是有決定性的意義的，並在這一問題上得到了廣泛的應用。現在絕大多數的繞流問題的解(利用查浦雷金方程求出)都是基於這一個類比。

逐步地所有氣體動力學的基本研究都根據查浦雷金方程。查浦雷金祇利用了他的方程來解決亞聲速氣流。現在有很多的變形的查浦雷金方程是研究超聲速氣流的基礎；在研究氣體從亞聲速變爲超聲速的過程這樣困難的問題中，查浦雷金方程也被廣泛地應用着。

在科學史上我們並不常發現這樣的工作，它幾乎有半世紀悠久歷史，還一天天對於現時的研究指示出更新的可能性。

C. A. 查浦雷金的著作"論氣體射流"是俄羅斯科學在力學部門中最深成就之一。

C. A. 赫里斯瓊諾維奇

緒　言

黑爾姆霍兹，在他的文章“論流體的不連續運動”❶中，指出了具有所謂射線(德文 *Strahle*)或射流、流入靜止介質區域內這樣的不可壓縮流體流動的數學分析之可能性。在黑爾姆霍玆工作發表以後，國內外科學文獻中出現了相當多的討論這同一問題的研究，在現時我們有了尼·葉·儒可夫斯基完整制定的方法❷，它使我們能在下列條件下求出關於任一定常無漩理想流體流動之解：第一，在任何地方流體都是和一固定的平面平行移動，並且流體在垂直這平面的方向上遇到平面壁的阻礙；第二，運動在沒有外力作用下進行(這種條件幾乎是在所有這一類工作中都規定了的)。

對理想氣體來說，同樣問題的研究還祇剛開始。我們祇知道一個工作，其中解釋了氣體射流；這就是 P. 莫倫勃洛克的論文“論假設有速勢的氣體運動”❸。莫倫勃洛克提出了氣體射流問題的微分方程，找出了這些方程的幾個特殊積分，但未見得相應於在理論上可以設想的氣體運動。

我們在本文中將給出一種方法，藉助於它，可能在多種情况下求出以前所提出的關於理想氣體不連續流動問題的解。此地在上面所引的尼·葉·儒可夫斯基文章中關於不可壓縮流體類似的問題中所採用的條件都必須成立；但，此外，這裏所發展的方法的適用性還要受到一種特殊要求的限制：卽，氣體質點速度無論在何地均不應超過當地物理情况下之聲速(卽局部聲速)；在可能有壓力變化那些邊界上，也有同樣限制。如果這一補充條件不能滿足，那末很明顯定常運動是不可能的❹。但我們認爲利用本文中指出的幾個假設，卽使在這一補充條件不符合的情况下，我們仍可能分析這問題，至於這一問題的數學處理，我們將延至下一論文中

---

❶ Monatsber. d. Königl. Akad. d. Wissensch. zu Berlin, 1868.

❷ Жуковский Н. Е., Видоизменение Метода Кирхгофа и т. д. Математический сборник, т. XV. 1890 Москва (亦可參看 Избранные сочинения, т. I, Гостехиздат, 1948).

❸ Arch. d. Math. u. Phys., 1890.

❹ 我們的工作是在 1902 年完成的，在現時 (1933 年) 這一問題的新解已經擬定，我們已找到具有超聲速氣流的定常運動形式。(作者在 1933 年版中註)

發表。

現來給我們工作的內容作一簡單的概述。在第一章中我們導出了二元氣流問題的微分方程，並指出那些解決射流問題的特殊積分；此處我們用了和莫倫勃洛克完全一樣的獨立變數，不過我們發現考慮另一些函數要更合適些。我們將相當問題的流函數與速勢用級數的形式表示出來。研究這些級數的收斂性，聯系着若干在其中引進的函數的性質，就是第二章的主題。在第三章中我們解決了從平面壁組成的無窮大容器流出的氣流這一問題。在第四章中我們研究氣體射流向平板衝擊的情況，並更詳細地論到這一極限情況，即當射流寬度爲無限時，射流變爲氣流的情況。這也就解決了氣體介質加給飛行平板的阻力問題。最後，在第五章中，指出了一種近似方法，使我們能在氣體速度（物體在氣體中的速度）並不太大的這種情況下，較簡單地解決關於射流的問題。在著作的結尾我們給出一補充意見，建立了第五章中的分析和最小曲面理論中幾個問題的關係。

在此地讓我們再指出下面一種有興趣的情況：我們在第三章和第四章所得到的結果，至少從質的一方面講，與實驗數據符合得很好，儘管射流出現的現象的實驗研究是在與我們理論研究很不類似的條件下進行的。

此地所敘述的方法的基本要點及其在注射問題上的應用曾在1896年初於莫斯科數學會上簡單地報告過；這一工作也曾在1901年第十一次自然學家和醫學家會議上用更詳細的形式報告過。

在結束這一緒言時，最後我認爲應有義務，表示對 E. A. 波洛托夫深刻的感謝，爲了他在校對時費心的幫助。

第　一　章

研究方法的一般基礎

設有無窮量的理想氣體含在二平行平面之間，此外，局部地倘有垂直於上述平面的柱面作爲邊界。我們取其中一個平面作爲座標平面 OXY。設氣體作定常運動且速度方向到處與 OXY 平行。我們將外力的影響略去不計，並設速度有一速勢。因爲我們希望避免漩渦的產生，因此就必須認爲壓力是密度的函數。我們將取

$$p=k\rho^{\gamma},\tag{1}$$

亦卽涉及絕熱過程。對於空氣，γ 之值等於 1.4025❶，γ 爲比熱之比值。由於氣體的熱傳導能力和輻射能力都很小，我們先考慮每個氣體質點熱量守恆的運動；我們看來由於這種理由，在高速度時，絕熱過程與實際情況非常近似。必須認識在我們分析的結果中早已是一次近似值，這是由於我們在計算中完全沒有計算氣體點的凝聚及由此所產生的黏性力，壁的摩擦和其他關於氣體的類似因素；這些因素的影響也許比在液體運動的情況下更大。

在上述假設下速勢 φ 爲 x 和 y 的函數。我們並有速度分量 u, v 的表示式

$$u=\frac{\partial\varphi}{\partial x},\qquad v=\frac{\partial\varphi}{\partial y}.\tag{2}$$

用 ρ 代表氣體密度，寫出連續條件

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v)}{\partial y}=0.\tag{3}$$

利用方程(1)，在我們的問題中柏努利方程可化成關係式

$$\rho=\rho_0\left(1-\frac{V^2}{2\alpha}\right)^{\beta},\tag{4}$$

而

$$V^2=u^2+v^2,\qquad \alpha=\frac{k\gamma\rho_0^{\gamma-1}}{\gamma-1},$$

$$\beta=\frac{1}{\gamma-1},\qquad \rho_0=\text{常數};\tag{5}$$

---

❶ Emden, Ausströmungserscheinungen permanenter Gase, Ann. d. Phys. u. d. Chem., т. 69 вып 2, стр. 445.

很明顯的，此地 p_0 代表在氣體駐點上卽 $V=0$ 的一點的壓力。爲簡寫起見，設

$$\frac{V^2}{2\alpha}=\tau,$$

則

$$\rho=\rho_0(1-\tau)^\beta. \tag{6}$$

方程(3)指出了有一函數 ψ 存在，ψ 的定義如下：

$$\left.\begin{aligned}\frac{\rho}{\rho_0}u&=\frac{\partial\psi}{\partial y},\\ \frac{\rho}{\rho_0}v&=-\frac{\partial\psi}{\partial x}.\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

從方程(2)和(7)，通過關係式(5)，我們得到函數 φ 和 ψ 的關係，如用公式表示，

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\psi}{\partial y}&=(1-\tau)^\beta\frac{\partial\varphi}{\partial x},\\ \frac{\partial\psi}{\partial x}&=-(1-\tau)^\beta\frac{\partial\varphi}{\partial y}.\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

函數 ψ 代表流函數；方程

$$\psi=\text{常數}$$

爲流線方程，給這一常數以順序的數值 C_1 和 C_2，很容易證實 $(C_1-C_2)\rho_0$ 表示每秒通過在流線

$$\psi=C_1,\qquad \psi=C_2$$

之間截面的氣體質量。

取 φ，ψ 作爲獨立變數，轉換方程(8)，而將 x，y 看作是 φ 和 ψ 的函數。很容易找到關係式

$$D\frac{\partial x}{\partial\varphi}=\frac{\partial\psi}{\partial y},\qquad D\frac{\partial y}{\partial\varphi}=-\frac{\partial\psi}{\partial x},$$

$$D\frac{\partial x}{\partial\psi}=-\frac{\partial\varphi}{\partial y},\qquad D\frac{\partial y}{\partial\psi}=\frac{\partial\varphi}{\partial x},$$

這裏

$$D=\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial y}-\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial x}=(1-\tau)^\beta V^2;$$

從這些方程式中，我們得到速度平方值的倒數爲

$$\frac{1}{V^2}=\left(\frac{\partial x}{\partial\varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial\varphi}\right)^2. \tag{9}$$

方程(8)就變成

$$\left.\begin{aligned}(1-\tau)^{\beta}\frac{\partial y}{\partial\psi}=\frac{\partial x}{\partial\varphi},\\(1-\tau)^{\beta}\frac{\partial x}{\partial\psi}=-\frac{\partial y}{\partial\varphi}.\end{aligned}\right\}\tag{10}$$

研究變數

$$\tau=\frac{V^2}{2\alpha},$$

和
$$\theta=\operatorname{arc\,tg}\frac{\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}}{\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}}=\operatorname{arc\,tg}\frac{\dfrac{\partial y}{\partial\varphi}}{\dfrac{\partial x}{\partial\varphi}}=-\operatorname{arc\,tg}\frac{\dfrac{\partial x}{\partial\psi}}{\dfrac{\partial y}{\partial\psi}}\tag{11}$$

對 φ 和 ψ 的導數,很明顯 θ 是速度對 OX 軸的傾角。將 V^2 對 ψ 微分,我們找到

$$\frac{\partial(V^2)}{\partial\psi}=-2V^4\left(\frac{\partial x}{\partial\varphi}\frac{\partial^2x}{\partial\varphi\partial\psi}+\frac{\partial y}{\partial\varphi}\frac{\partial^2y}{\partial\varphi\partial\psi}\right),$$

或根據方程(10)

$$\frac{\partial(V^2)}{\partial\psi}=-2V^4\left(\frac{\partial y}{\partial\psi}\frac{\partial^2x}{\partial\varphi\partial\psi}-\frac{\partial x}{\partial\psi}\frac{\partial^2y}{\partial\varphi\partial\psi}\right)(1-\tau)^{\beta};$$

將 θ 對 φ 微分就給出

$$\frac{\partial\theta}{\partial\varphi}=-\frac{\partial}{\partial\varphi}\operatorname{arc\,tg}\frac{\dfrac{\partial x}{\partial\psi}}{\dfrac{\partial y}{\partial\psi}}=-\frac{\dfrac{\partial y}{\partial\psi}\dfrac{\partial^2x}{\partial\varphi\partial\psi}-\dfrac{\partial x}{\partial\psi}\dfrac{\partial^2y}{\partial\varphi\partial\psi}}{\left(\dfrac{\partial x}{\partial\psi}\right)^2+\left(\dfrac{\partial y}{\partial\psi}\right)^2},$$

或
$$\frac{\partial\theta}{\partial\varphi}=-V^2(1-\tau)^{2\beta}\left(\frac{\partial y}{\partial\psi}\frac{\partial^2x}{\partial\varphi\partial\psi}-\frac{\partial x}{\partial\psi}\frac{\partial^2y}{\partial\varphi\partial\psi}\right).$$

這些關係式就引出方程

$$\frac{\partial\ln V^2}{\partial\psi}=\frac{2}{(1-\tau)^{\beta}}\frac{\partial\theta}{\partial\varphi}.\tag{12}$$

其次我們找到

$$\frac{\partial\theta}{\partial\psi}=\frac{\partial}{\partial\psi}\operatorname{arc\,tg}\frac{\dfrac{\partial y}{\partial\varphi}}{\dfrac{\partial x}{\partial\varphi}}=V^2\left(\frac{\partial x}{\partial\varphi}\frac{\partial^2y}{\partial\varphi\partial\psi}-\frac{\partial y}{\partial\varphi}\frac{\partial^2x}{\partial\varphi\partial\psi}\right);$$

利用方程(10),於是我們得

$$\frac{\partial\theta}{\partial\psi}=V^2(1-\tau)^{\beta}\left(\frac{\partial y}{\partial\psi}\frac{\partial^2 y}{\partial\varphi\partial\psi}+\frac{\partial x}{\partial\psi}\frac{\partial^2 x}{\partial\varphi\partial\psi}\right);$$

但

$$\frac{\partial y}{\partial\psi}\frac{\partial^2 y}{\partial\varphi\partial\psi}+\frac{\partial x}{\partial\psi}\frac{\partial^2 x}{\partial\varphi\partial\psi}=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left\{\left(\frac{\partial x}{\partial\varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial\psi}\right)^2\right\}=$$

$$=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\varphi}\frac{1}{V^2(1-\tau)^{2\beta}}=\frac{1}{4\alpha}\frac{\partial}{\partial\varphi}\frac{1}{\tau(1-\tau)^{2\beta}}=$$

$$=-\frac{1}{4\alpha\tau^2}\cdot\frac{1-(2\beta+1)\tau}{(1-\tau)^{2\beta+1}}\frac{\partial\tau}{\partial\varphi};$$

現在,在 $\frac{\partial\theta}{\partial\varphi}$ 的公式中進行最後的簡化,在關係式(12)中,用 τ 代替 V^2,最後我們得到關係式

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\tau}{\partial\psi}&=\frac{2\tau}{(1-\tau)^{\beta}}\frac{\partial\theta}{\partial\varphi},\\ \frac{\partial\tau}{\partial\varphi}&=-2\tau\frac{(1-\tau)^{\beta+1}}{1-(2\beta+1)\tau}\frac{\partial\theta}{\partial\psi}.\end{aligned}\right\}\tag{13}$$

然後將 τ, θ 認爲是獨立變數,以 φ 和 ψ 作爲它們的函數,我們極易得出我們所需的方程,它們是:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}&=\frac{2\tau}{(1-\tau)^{\beta}}\frac{\partial\psi}{\partial\tau},\\ \frac{\partial\varphi}{\partial\tau}&=-\frac{1-(2\beta+1)\tau}{2\tau(1-\tau)^{\beta+1}}\frac{\partial\psi}{\partial\theta};\end{aligned}\right\}\tag{14}$$

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\left\{\frac{2\tau}{(1-\tau)^{\beta}}\frac{\partial\psi}{\partial\tau}\right\}+\frac{1-(2\beta+1)\tau}{2\tau(1-\tau)^{\beta+1}}\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2}=0.\tag{15}$$

方程(14)和(15)解決了關於氣體流動的問題,如果我們知道相當於這一氣流的變數(τ, θ)的區域,並給出在邊界流線上 ψ 之值,如果在這區域內任何地點 ψ 和它的一次導函數爲有限、單值且連續,而數量 τ 不超過 $\frac{1}{2\beta+1}$ 且祇在圍線的幾個點上才變爲零。區域(τ, θ)將被認爲單聯的和封閉的。

爲了表明在指出的條件下函數 ψ 可以完全決定,我們應用反證法:假設有兩個函數 ψ_1 和 ψ_2 適合我們所有的要求,我們證明

$$\psi_1-\psi_2=0.$$

函數 $\psi_3=\psi_1-\psi_2$ 在規定底 τ, θ 範圍內爲有限和連續,適合方程(15),並在區域邊界上變爲零。我們將方程(15)左端乘以 $\psi d\tau d\theta$ 同時在區域(τ, θ)極限範圍內進行積分;積分結果用 J 表示,很容易找到,如將 ψ 以 ψ_3 代替,

$$J=\iint\left\{\frac{2\tau}{(1-\tau)^{\beta}}\left(\frac{\partial\psi_3}{\partial\tau}\right)^2+\frac{1-(2\beta+1)\tau}{2\tau(1-\tau)^{\beta+1}}\left(\frac{\partial\psi_3}{\partial\theta}\right)^2\right\}d\tau d\theta+$$
$$+\int\left\{\frac{2\tau}{(1-\tau)^{\beta}}\psi_3\frac{\partial\psi_3}{\partial\tau}d\theta+\frac{1-(2\beta+1)\tau}{2\tau(1-\tau)^{\beta+1}}\psi_3\frac{\partial\psi_3}{\partial\theta}d\tau\right\}=0.$$

這裏,重積分是對於所有的(τ,θ)區域積分,單積分則僅沿它的圍線。因爲在圍線上$\psi_3=0$,因此$J=0$祇有在重積分等於零的條件下才能成立,但是由於上面所說的條件,在這一積分內的積分函數可能是正的或者等於零;很清楚的,我們應取後者;這就引出等式

$$\frac{\partial\psi_3}{\partial\tau}=0,\qquad\frac{\partial\psi_3}{\partial\theta}=0$$

和

$$\psi_3=\text{常數}=0.$$

於是所需要的已被證明。

在解的確定性的必需條件之中我們指出,氣流區域內任何地方均必需有下列不等式成立:

$$\tau<\frac{1}{2\beta+1}.$$

我們現在解釋這一要求的意義。爲此我們回到公式(4),(5);當

$$\tau=\frac{V^2}{2\alpha}\leqslant\frac{1}{2\beta+1}=0.17,$$

我們有

$$V^2\leqslant\frac{2\alpha}{2\beta+1}$$

即

$$V^2\leqslant\frac{2k\gamma\rho_0^{\gamma-1}}{1+\gamma};$$

那裏,當

$$V^2=\frac{2k\gamma\rho_0^{\gamma-1}}{1+\gamma},$$

[即適合等式]

$$\tau=\frac{1}{2\beta+1},\qquad\rho^{\gamma-1}=\rho_0^{\gamma-1}(1-\tau)$$

即

$$\rho^{\gamma-1}=\frac{2\rho_0^{\gamma-1}}{1+\gamma}.$$

於是

$$V^2 = k\gamma\rho^{\gamma-1},$$

或，利用關係式(1)，

$$V^2 = \frac{\gamma p}{\rho}.$$

於是，加在 τ 上的限制就相當於這一要求：卽氣體流速無論何地不應超過局部聲速。我們假定這樣速度至少在定常氣流底範圍內是不可能存在的❶。

極限值

$$\tau = \frac{1}{2\beta+1}$$

還確定了運動氣體內壓力可能變化底範圍。事實上，如變數 τ 到處都小於它底極限值，則

$$\rho \geqslant \rho_0\left(1 - \frac{1}{2\beta+1}\right)^{\beta},$$

$$p \geqslant p_0\left(1 - \frac{1}{2\beta+1}\right)^{\beta\gamma};$$

但

$$\beta\gamma = \frac{\gamma}{\gamma+1} = 1+\beta,$$

因此如果我們取 $\gamma = 1.40$，

$$\frac{p}{p_0} \geqslant \left(\frac{2\beta}{\beta+1}\right)^{\beta+1} = \left(\frac{5}{6}\right)^{\frac{7}{2}} = 0.53,$$

$$\frac{p_0}{p} \leqslant 1.89.$$

現在導出關於所考慮的運動的另外幾個非常重要的定理。首先我們證明，速勢 φ，做爲座標的函數，在流區內無論何處均沒有極大或極小。爲了證明這一情況，我們可以應用下面的推理：如果有一點存在，在這點上 φ 有一極大，則圍繞這點必須有一閉曲線，在這上面 φ 有一比極大值較小的常數值；在這種情況下氣體將穿過這一曲線從這一曲線所含的面積內流出，圍着這一曲線的氣體質量將隨時間而增加，運動將不可能是定常的。類似的推理也移去了關於 φ 做爲極小值的可能。但是因爲關於函數 φ 的定理，同樣理由對於函數 ψ 也成立，由於它對於座標 x，y 做爲獨立變數 φ 和 ψ 的函數亦正確，於是我們給出適用於所有這些函數的另一

❶ 見 Lamb. Hydrodynamics, 1895, 第 28, 29 頁，還有 Lamb 所提到的作者，有俄文譯本 Ламб, Г., Гидродинамика, Гостехиздат, 1947, §§ 24a, 25. 見第 5 頁作者註，