21 数学天元基金

当代数学园地 8

测度值分枝过程引论

赵学雷 著

科学出版社
Science Press

当代数学园地 8

测度值分枝过程引论

赵学雷 著

广东省高教厅科学研究出版基金资助

科学出版社

2000

内 容 简 介

本书简要地阐述近年来发展迅速的测度值分枝过程的基本理论，系统介绍超过程的几种构造、研究的思想方法以及超扩散过程在非线性偏微分方程中的应用.结合随机测度的几个特色问题，论述底过程、分枝率和分枝机制对超过程性质的联合作用.本书全面地介绍90年代国内外的最新研究成果，并附有相关领域的简要介绍.

本书可供大学数学、物理、生物等系的大学生、研究生、教师及有关的科技人员参考.

图书在版编目(CIP)数据

测度值分枝过程引论/赵学雷著.
-北京：科学出版社，2000.1
(当代数学园地 8/姜伯驹主编)

ISBN 7-03-007422-X

Ⅰ.测… Ⅱ.赵… Ⅲ.测度(数学) Ⅳ.O174.12

中国版本图书馆 CIP 数据核字(1999)第 07250 号

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码：100717
新蕾印刷厂印刷
新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售
*
2000年1月第 一 版 开本：850×1168 1/32
2000年1月第一次印刷 印张：9 1/2
印数：1—2 000 字数：243 000

定价：19.00元

(如有印装质量问题，我社负责调换〈新欣〉)

序　言

测度值分枝过程是当前国际上的一个研究热点，国内从事该领域研究的人越来越多，进展很快，在国际上曾经出版过有关专著，例如，加拿大的 D. A. Dawson 在 Lecture Notes in Mathematics 上发表过长篇综合文章：Measure-Valued Markov Processes，1993；美国的 E. B. Dynkin 出版过一部著作：Introduction to Measure-Valued Branching Processes，1994. 它们是很好的学术参考书，但起点太高，很多结论没有证明，不适合入门之用，而且没有反映出近几年中国在该领域研究的最新成果. 一本既能满足国内初学者的需求，又能反映国内外一些最新研究成果的学术著作对该领域的发展是很有意义的. 赵学雷同志撰写的《测度值分枝过程引论》，主要分为两部分. 第一部分由前五章组成，论述测度值分枝过程，尤其是 DW-超过程的基本理论，可供读者入门之用. 这一部分的内容包括预备知识、分枝马氏过程、测度值分枝过程与超过程构造（定义、构造、矩、增广超过程）、超过程的鞅特征（鞅性、随机积分、轨道连续性、占位时过程）、二分枝超过程的 Le Gall 构造等. 第二部分主要取材于作者及其合作者的研究成果，重点论题为超布朗运动（基本性质、半群性质、位势理论）、超过程的灭绝性（有限测度值超过程的灭绝性、缓增测度值超过程的局部灭绝性、超布朗运动灭绝点与灭绝时分布）、超对称稳定过程占位时的渐近行为、绝对连续性、超过程的过分函数与调和函数、超扩散与非线性偏微分方程等. 这些问题均是概率界普遍比较关注的，具有较大的理论意义及参考价值. 该书在对有关论题进行系统讨论的同时，还对国内外最新的相关研究进行评述，并重点介绍国内的研究成果. 最后，对目前较活跃的几个方面（具有交互作用的测度值分枝过程、FV-超过程、OU-超过程）做了简明扼要的介绍. 该书的写作由浅入深，逐

步引向一些高深理论.定理的证明力求采用较初等的理论与方法，并着重于研究方法与研究思想的总结.该书文字通顺，表达准确简练，逻辑性强，重点突出，整体结构编排合理.另外，这方面的学术著作国内还不曾有过，书中相当多的内容没有包含在以往国外同类出版物中.因此，在理论上具有先进性.该书对初学者可做为入门教材，对从事研究工作的人，也是该领域很好的学术参考书.

王梓坤

1997年10月

前 言

测度值分枝过程，狭义地称为(DW-)超过程，是国际上近十几年来概率论中的研究热点之一.它反映自然界中的一些非线性现象，如：人口的演化，分枝粒子系统等，又与非线性发展方程有密切联系.由于这类过程取值于测度空间，需要用无穷维分析的思想和方法，因而引起数学界的广泛关注，成为当今概率论最前沿的研究课题之一.我们知道，非线性问题和无穷维随机分析是国际上数学界共同关心的问题，我国也把这两个分支列为当今优先发展的学科.测度值分枝过程正是与这两个分支有着紧密联系的研究课题.

在撰写本书之前及在写作过程中，作者一直在思考为谁写这本书.早在作者学习测度值分枝过程并开始试图在该领域做些研究的时候，就常常因为没有一本系统的参考书而窘迫不已.现在作者教的学生也面临着同样的问题.目前国际上有一些长篇综述文章，几乎收录了 1992 年以前国际上的所有研究成果，是很好的参考资料，但起点较高，很多结果没有给出详细证明，初学者很难耐心地读下去.更重要的是它们没有反映出国内最近几年在测度值分枝过程方面的研究成果.于是写一本既可作为入门书，又兼顾重点介绍国内这方面研究成果的参考书就成了作者的写作初衷.

测度值分枝过程是建立在丰富而又高深的现代数学基础之上的，涉及大量的现代数学知识，写这样的一部反映研究前沿的学术著作，在篇幅有限的情况下，要想做到深入浅出就需要对有关材料进行取舍，在较少引入或承认已有结果的前提下努力使内容具有系统性和自封闭性.

事实上，在概率论的框架内，测度值分枝过程只不过是一类特殊的随机过程.因此，从已有的理论来看，掌握它并不困难.然而有意义的是考虑有关随机测度方面的问题.这就要求人们改变思考问题的方式，从而产生理解上的“不习惯”.因为人们习惯于把随机

过程看成在空间中运动的点，而对于测度值过程，必须把它想象成"一片云、一团雾". 从"一点"到"一片"，自然就会产生很多困惑. 因此，本书在编排上，着眼于让读者快速入门，逐步进入高深的理论.

全书共分十二章. 第一章给出一些预备知识，主要介绍几种测度距离空间、测度空间上概率测度簇胎紧性的几个判定准则和概率测度的收敛性. 在第二章，给出分枝马氏过程的简单理论，重点论述分枝粒子系统的特征表现，为第三章引人测度值分枝过程做准备. 第三章先从测度值分枝过程的一般定义出发，通过粒子系统给出超过程和增广超过程的构造，并着重研究超过程的矩性质. 超过程鞅特征的系统论述是第四章的主要内容. 因此有关的随机分析也是这一章讨论的主题. 同时利用鞅性，研究了超过程的轨道连续性和超过程的占位时过程. 在第五章，介绍二分枝超过程的"Brown 蛇"——Le Gall 轨道构造. 第六章到第十章的内容主要取材于作者本人及国内其他同行近年来的研究成果. 第六章研究超 Brown 运动，它是测度值分枝过程理论中的主要研究对象. 它给出了超 Brown 运动半群的若干估计和超 Brown 运动的道中时的概率分布. 并利用 Le Gall 的 Brown 蛇(Brownian snake)构造，考虑超 Brown 运动在首中空间曲面时的行为. 第七章考虑超过程的灭绝问题. 在分枝特征较一般的条件下，得到了超过程灭绝的判别准则和超过程的渐近性质. 其结果充分展示了分枝特征对超过程性质的重要影响. 绝对连续性是第八章讨论的主题. 这一章从考察空间维数、分枝率对超过程绝对连续性的关系出发，研究了直线上超过程的绝对连续性、非分枝区域上的绝对连续性以及空间曲面上的绝对连续性. 第九章针对超对称稳定过程，讨论其占位时的渐近行为. 在较广泛的条件下，给出了上临界、下临界和临界情况下占位时过程的极限定理. 第十章研究超过程的过分函数与调和函数. 建立了超过程分份函数与底过程过分函数之间的对应关系，也给出了调和函数的一个分类定理. 第十一章简明扼要地介绍了用超扩散过程表示非线性偏微分方程解的思想与方法. 以此为依据，对超 Brown 运动进行模拟，旨在用 Monte-Carlo 方法，通过计算机模

拟一类非线性偏微分方程的边值问题.在第十二章,简单介绍三种超过程:交互测度值分枝过程、FV-超过程和OU-超过程研究的进展情况.

感谢国家自然科学基金委数学天元基金、广东省高教厅科学研究出版基金的资助.感谢王梓坤教授、吴荣教授多年来的指导与鼓励.王梓坤教授在百忙中,抽出时间耐心地阅读了部分书稿,并提出了许多宝贵的修改意见.陈木法教授多年来给予作者很多热情的鼓励和帮助,他的敬业精神值得作者认真学习.感谢严士健、杨向群、戴永隆、李占柄、廖明、刘文、陈大岳等教授多年来的关怀与帮助.感谢王永进、李增沪、张新生、陈雄、叶俊、罗守军、杨庆季、欧庆铃、鲍玉芳、郭军义、唐加山、任艳霞、洪文明、王国胜、杨敏、坚雄飞等同志有益的讨论.特别地,王永进、李增沪、坚雄飞等同志仔细阅读了本书初稿,提出了许多中肯的改进意见,使本书的叙述更为严谨和完善.科学出版社吕虹同志为本书的出版付出了辛勤劳动,在此谨致谢意.

由于新成果层出不穷,书中内容难免挂一漏万.倘有谬误,欢迎读者不吝指正.

赵学雷

1997年6月

目 录

第一章　预备知识及记号

为了方便读者，首先介绍一些基本知识. 由于篇幅所限，本章的部分结论将略去证明，有兴趣的读者可以参阅有关参考文献，如[60]和[19]等.

§1.1　基本空间

设(E,d)是一个距离空间. 令 $B(x,r):=\{y\in E;d(x,y)<r\}$，它是以 x 为中心 r 为半径的开球. 记 $\mathscr{E}$ 为由所有开球生成的 σ-代数(即 Borel 代数)，那么$(E,\mathscr{E})$是一个 Borel 可测空间. 以 $b\mathscr{B}(E)$ $(pb\mathscr{B}(E))$记全体有界(相应地，非负有界)$\mathscr{E}$-可测函数 $f:E\to\mathbb{R}$ (相应地$\mathbb{R}_+=[0,\infty)$)组成的函数类. $\|f\|:=\sup_{x\in E}|f(x)|$. 以 $\mathscr{E}_c$ 记 $\mathscr{E}$ 中所有紧支集可测函数的全体. 以 $C(E)$，$C_c(E)$，$pC_c(E)$，$bC(E)$，$bpC(E)$等分别记为 E 上连续、紧支集连续、非负紧支集连续、有界连续、非负有界连续函数全体. 我们知道，$\mathscr{B}(E)$，$b\mathscr{B}(E)$，$C(E)$和 $bC(E)$等都是线性空间.

定义 1.1.1　称函数列$\{f_n\}\subset b\mathscr{B}(E)$**有界逐点收敛**到 $f\in b\mathscr{B}(E)$，若 $\sup_n\|f_n\|<+\infty$且 $\lim_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)$，$x\in E$. 并记此为

$$\text{bp-}\lim_{n\to\infty}f_n=f. \tag{1.1.1}$$

一个集合 $F\subset b\mathscr{B}(E)$称为 bp-**封闭的**，若对任何$\{f_n\}\subset F$，$f\in b\mathscr{B}(E)$，而且(1.1.1)式成立，则必有 $f\in F$. $F\subset b\mathscr{B}(E)$的 bp-**闭包**定义为包含 F 的，在 $b\mathscr{B}(E)$中最小 bp-闭子集. 若 F 的 bp-闭包等于$b\mathscr{B}(E)$，则称 F 是 $b\mathscr{B}(E)$的 bp-**稠子集**.

引理 1.1.2　如果 $F\subset b\mathscr{B}(E)$是一个子空间，则 F 的 bp-闭包也是一个子空间.

证明 设 H 是 F 的 bp-闭包. 对于任一 $f\in H$, 定义

$$H_f=\{g\in H: af+bg\in H, \text{对于 } a,b\in \mathbb{R}\}. \quad (1.1.2)$$

由于 H 是闭的, 则 H_f 也为 bp-闭集. 显然有 $F\subset H_f\subset H$. 所以 $H_f=H$. 证毕. □

命题 1.1.3 $bC(E)$是$b\mathscr{B}(E)$的 bp-稠子集. 如果 E 是可分的, 则存在一列非负函数$\{f_n\}\subset bC(E)$, 使得$\{f_n\}$线性组合张成的子空间在 $b\mathscr{B}(E)$中是 bp-稠的.

证明 设 H 为 $bC(E)$的 bp-闭包. 由引理 1.1.2 知 H 是 $b\mathscr{B}(E)$的子空间. 注意到, 若 $G\subset E$ 是开集, $1_G\in H$. 所以由单调类定理(参见[214]), 可知 $H=b\mathscr{B}(E)$.

若 E 可分, 设$\{x_i\}_{i\in N}$是 E 的稠子集. 对于任一可表示为有限个形如 $B(x_i,1/k)(i,k\geqslant 1)$交的开集 $G\subset E$, 我们可选择一列非负有界连续函数$\{f_n^G\}$使得 $\text{bp-}\lim_{n\to\infty} f_n^G=1_G$. 易知$\{f_n^G, n, G$ 如上所定义$\}$是一个可数类, 且由函数型单调类定理知其扩张子空间是 $b\mathscr{B}(E)$.

若没有特别声明, 本书考虑的基本空间是 **Polish 空间**, 即拓扑同胚于某个紧距离空间的一个子集, 它是一个完备可分距离空间. 特别地, 若该空间是紧的, 则称为 **Luzin 空间**.

Polish 空间的单点紧化又可装备一个新距离, 使得在原来的任一紧集上这两个距离是等价的, 而且限制在原空间本身, 两种距离产生的 Borel σ-域是一样的. 这种性质给我们以后的讨论带来很多方便.

值得说明的是, 我们的研究是基于某一特定距离空间的, 但实际上我们将看到, 在以后的定义、结论中往往不直接依赖于具体的距离, 因此有时对空间的距离不做特别说明.

§1.2 测度空间

考虑可测空间$(E,\mathscr{E})$, 设 μ 是定义在此空间上的非负集函数(允许取正无穷值). 若 μ 是可数可加的, 即对于任何一组相互不

交的 $\mathscr{E}$-可测集合簇 $A_1, A_2, \cdots$，都有，

$$\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i),$$

则称此集函数 μ 是可测空间 $(E,\mathscr{E})$ 上的**测度**. 称 $(E,\mathscr{E},\mu)$ 是**测度空间**.

若 $\mu(E)<\infty$，称 μ 为**有限测度**，并以 $M_F(E)$ 表示 E 上所有有限测度的全体. 特别地，若 $\mu(E)=1$ 称 μ 是概率测度，并记 E 上全体概率测度为 $M_1(E)$. 若存在一列 $\mathscr{E}$-可测集合 $K_1, K_2, \cdots, K_i, \cdots$ 满足 $\bigcup_{i=1}^{\infty} K_i=E$ 而且 $\mu(K_i)<\infty(i=1,2,\cdots)$，则称 μ 为 **σ-有限测度**. 称在任何紧集上有限的测度为 **Radon 测度**，并记 E 上 Radon 测度的全体为 $M(E)$. 对于 $f\in b\mathscr{B}(E)$，$\mu\in M(E)$，令 $\langle\mu,f\rangle:=\mu(f):=\int_E f(x)\mu(dx)$.

定义1.2.1 函数集 $F\subset bC(E)$ 称为**分离 $M(E)$ 的**，若对于任何 $\mu,\nu\in M(E)$

$$\mu(f) = \nu(f),\ \forall\ f \in F, \tag{1.2.1}$$

则 $\mu=\nu$. 称 F 是**收敛决定类**. 如果 $\{\mu_n\}\subset M(E)$，$\mu\in M(E)$，

$$\lim_{n\to\infty}\mu_n(f) = \mu(f),\ \forall\ f \in F, \tag{1.2.2}$$

则 $\mu_n \xrightarrow{w} \mu$（其中 $\xrightarrow{w}$ 表示测度的弱收敛）.

命题1.2.2 如果 (E,d) 是 Polish 空间，则我们可选 $V:=\{f_n\}_{n\in N}\subset pbC_c(E)$ 使之成为一个决定类.

证明 由命题1.1.3，可选 $\{f_n\}$ 且它的 bp-闭包是 $pb\mathscr{B}(E)$. 因 $\mu,\mu_n(n\geqslant 1)$ 都是 σ-可加测度，不妨均设为有限测度. 由控制收敛定理可得，$\lim_{n\to\infty}\mu_n(f)=\nu(f)$，$\forall\ f\in b\mathscr{B}(E)$. 此即 $\mu_n \xrightarrow{w} \mu$. □

在我们研究的问题中，常常考虑的是一些较小的测度空间. 下面是几个重要的测度空间.

1.2.1 Polish 空间上的有限测度空间

假设 (E,d) 是一个 Polish 空间，$(M_F(E),\tau_w)$ 表示 E 上的有限测度空间并赋予弱收敛拓扑，则 $(M_F(E),\tau_w)$ 也是一个 Polish 空

间. 为此，仅需说明此拓扑等价于 $M_F(E)$ 上某个距离所产生的拓扑. 记 $\{f_n\}_{n\geq 1}$ 为命题1.2.2中给出的决定类. 为了以后方便起见，可把 f_n 规范化为 $f_n/\|f_n\|$，仍记为 $\{f_n\}_{n\geq 1}$，还是决定类. 令

$$d_w(\mu,\nu):=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}(1\wedge|\mu(f_n)-\nu(f_n)|),\mu,\nu\in M_F(E). \quad (1.2.3)$$

易证 d_w 定义了 $M_F(E)$ 上的一个距离，此距离产生的拓扑就是弱拓扑.

当然，我们还可以定义另一种距离，即 Prohorov **距离**：

$$\varrho_M(\mu_0,\mu_1)=\max\{\varepsilon_0,\varepsilon_1\},\mu_0,\mu_1\in M_F(E),$$

其中 $\varepsilon_i=\inf_{\varepsilon>0}\{\varepsilon:\mu_i(F)<\mu_{i+1}(F^\varepsilon)+\varepsilon,F\subset E$ 是闭集$\},i=0,1(2\equiv 0)$. $F^\varepsilon:=\{x\in E;\min_{y\in F}d(x,y)<\varepsilon\}$，即是 F 的 ε-邻域.

可以证明以上定义的两种距离是等价的(参见文献[60]，Theorem 3.1).

1.2.2 Polish 空间上的概率测度空间

作为 $M_F(E)$ 的子集，概率测度空间 $M_1(E)$ 也是一个距离空间.

定义1.2.3 一个概率测度 $P\in M_1(E)$ 称为**胎紧**的，如果对于任意 $\varepsilon>0$，存在紧集 $K\subset E$，使得 $P(K)\geq 1-\varepsilon$. 一簇概率测度 $\mathscr{M}\subset M_1(E)$ 称为**胎紧**的，若对任意的 $\varepsilon>0$，存在一个紧集 $K\subset E$，使得

$$\inf_{P\in\mathscr{M}}P(K)\geqslant 1-\varepsilon. \quad (1.2.4)$$

□

定义1.2.4 设 (E,d) 是 Polish 空间.

(1)任一 $P\in M_1(E)$ 是胎紧的.

(2)(**Prohorov 准则**)设 $\mathscr{M}$ 是一簇概率测度，下述结论等价：

(a)$\mathscr{M}$ 是胎紧的.

(b)任意 $\varepsilon>0$ 存在紧集 $K\subset E$ 使得

$$\inf_{P\in\mathscr{M}}P(K^\varepsilon)\geqslant 1-\varepsilon, \quad (1.2.5)$$

其中 $K^\varepsilon:=\{x\in E:\inf_{y\in K}d(x,y)<\varepsilon\}$ 为 K 的 ε-邻域.

(c)$\mathscr{M}$ 是相对紧集.

特别地,若(E,d)是紧距离空间,则 $M_1(E)$也是紧距离空间.

证明 (1)设$\{x_k\}$在 E 中稠,$P\in M_1(E)$. 任给定 $\varepsilon>0$,选取整数 $N_1,N_2,\cdots$,使得

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{N_n}B\left(x_k,\frac{1}{n}\right)\right)\geqslant 1-\frac{\varepsilon}{2^n},\ n=1,2,\cdots. \qquad (1.2.6)$$

设 K 是集$\bigcap_{n\geqslant 1}\bigcup_{k=1}^{N_n}B(x_k,1/n)$的闭包,则它是全有界的,因而是紧的,且

$$P(K)\geqslant 1-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varepsilon}{2^n}\geqslant 1-\varepsilon. \qquad (1.2.7)$$

(2)(a)⇒(b)显然. 现证(b)⇒(c). 由于 $\mathscr{M}$ 的闭包是完备的,因此只需证 $\mathscr{M}$ 的全有界性即可. 即要证,给定 $\delta>0$我们来构造一个有限集 $\mathscr{N}\subset M_1(E)$使得 $\mathscr{M}\subset\{Q:\rho_M(P,Q)<\delta$,对某 $P\in\mathscr{N}\}$. 其中 ρ_M 为 Prohorov 距离.

取$0\leqslant\varepsilon<\delta/2$及紧集 $K\subset E$ 使得(1.2.5)成立. 由 K 的紧性,存在有限集$\{x_1,\cdots,x_n\}\subset K$ 使得 $K^{\varepsilon}\subset\bigcup_{i=1}^{n}B_i$,其中 $B_i=B(x_i,2\varepsilon)$. 固定 $x_0\in E$ 和 $m\geqslant n/\varepsilon$,取 $\mathscr{N}$ 为如下形式的概率测度:

$$P=\sum_{i=0}^{n}\frac{k_i}{m}\delta_{x_i},\ 0\leqslant k_i\leqslant m,\ \sum_{i=0}^{n}k_i=m. \qquad (1.2.8)$$

给定 $Q\in\mathscr{M}$,令 $k_i=[mQ(E_i)](i=1,\cdots,n)$,这里 $E_i=B_i-\bigcup_{j=1}^{i-1}B_j$,$[\cdot]$表示最大整数部分,$k_0=m-\sum_{i=1}^{n}k_i$. 则对于由(1.2.8)式定义的 P,对所有闭集 $A\subset E$,

$$\begin{aligned}Q(A)&\leqslant Q\Big(\bigcup_{A\cap E_i\neq\varnothing}E_i\Big)+\varepsilon\\&\leqslant\sum_{A\cap E_i\neq\varnothing}\frac{[mQ(E_i)]}{m}+\frac{n}{m}+\varepsilon \qquad (1.2.9)\\&\leqslant P(A^{2\varepsilon})+2\varepsilon,\end{aligned}$$

所以 $\rho_M(P,Q)\leqslant 2\varepsilon<\delta$.

下面证(c)⇒(a). 设 $\varepsilon>0$. 由于 $\mathscr{M}$ 是全有界的,对每一 $n=1,2,\cdots$,存在有限子集 $\mathscr{N}_n\subset\mathscr{M}$ 使得 $\mathscr{M}\subset\{Q:\rho_M(P,Q)<\varepsilon/2^{n+1}$对某 $P\in\mathscr{N}_n\}$. 由结论(1)知,我们可以选取紧集 $K_n\subset E$,使得

$P(K_n)\geqslant 1-\varepsilon/2^{n+1}$对于所有 $P\in\mathscr{N}_n$ 成立. 给定 $Q\in\mathscr{M}$,则有 $P_n\in\mathscr{N}_n$ 满足

$$Q(K_n^{\varepsilon/2^{n+1}})\geqslant P_n(K_n)-\varepsilon/2^{n+1}\geqslant 1-\varepsilon/2^{n+1}. \qquad (1.2.10)$$

取 K 为集 $\bigcap_{n\geqslant 1}K_n^{\varepsilon/2^{n+1}}$ 的闭包,则 K 是紧集,而且

$$Q(K)\geqslant 1-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varepsilon}{2^n}=1-\varepsilon. \qquad (1.2.11)$$

若 E 是紧的,其余结论显然. □

对于可数乘积空间,我们有

命题1.2.5 设 $(E_k,d_k)(k=1,2,\cdots)$ 是一列距离空间. 令 $E:=\prod_{k=1}^{\infty}E_k, d(x,y):=\sum_{k=1}^{\infty}(d_k(x_k,y_k)\wedge 1)/2^k, x,y\in E$,则 (E,d) 是距离空间. 设 $\{P_\alpha\}\subset M_1(E)$(其中 α 取自于某个指标集),而且对于 $k=1,2,\cdots$,及每个 α,定义 $P_\alpha^k\in M_1(E_k)$ 为 P_α 的第 k 个边缘分布,即 $P_\alpha^k=P_\alpha\pi_k^{-1}$,其中定义投影 $\pi_k:E\to E_k$ 为 $\pi_k(x)=x_k$. 则 $\{P_\alpha\}$ 是胎紧的当且仅当对每一 $k=1,2,\cdots,\{P_\alpha^k\}$ 是胎紧的.

证明 假设对每一个 $k=1,2,\cdots,\{P_\alpha^k\}$ 是胎紧的,则对于 $\varepsilon>0$ 和任一 $k=1,2,\cdots$,选取紧集 $K_k\subset E_k$ 使得 $\inf_\alpha P_\alpha^k(K_k)\geqslant 1-\varepsilon/2^k$. 则 $K:=\prod_{k=1}^{\infty}K_k=\bigcap_{k=1}^{\infty}\pi_k^{-1}(K_k)$ 是紧的,而且

$$P_\alpha(K)\geqslant 1-\sum_{k=1}^{\infty}(1-P_\alpha^k(K_k))\geqslant 1-\varepsilon \qquad (1.2.12)$$

对所有 α 成立. 因此 $\{P_\alpha\}$ 是胎紧的.

反过来,我们仅需注意到对于任一紧集 $K\subset E,\pi_k(K)$ 也是 E_k 的紧集而且

$$\inf_\alpha P_\alpha^k(\pi_k(K))\geqslant\inf_\alpha P_\alpha(K),\ k=1,2,\cdots. \qquad (1.2.13)$$

证毕. □

1.2.3 紧距离空间上的测度空间

若 (E,d) 是紧的, $(M_F(E),d_w)$ 是局部紧的距离空间,并可以紧化为 $\overline{M}_F(E)=M_F(E)\cup\{\infty_w\}$,其中 $\{\infty_w\}$ 是一个孤立点. 其拓扑 τ_c 定义为 $\mu_n\to\mu\in M_F(E)$ 当且仅当 $\langle\mu_n,f\rangle\to\langle\mu,f\rangle,\forall f\in$