非全定系統的动力学研究

C. A. 查浦雷金著

科学出版社

非全定系統的動力学研究

С. А. Чаплыгин 著
張　　燮 譯

科　学　出　版　社
1956

С. А. ЧАПЛЫГИН
ИССЛЕДОВАНИЯ ПО ДИНАМИКЕ
НЕГОЛОНОМНЫХ СИСТЕМ
Гостехиздат, 1949

内容介紹

本書根据苏联國家技術理論書籍出版社(Государственное Издательство Технико-Теоритической Литературы)1949年出版查浦雷金(С. А. Чаплыгин)所著的 Исследования по Динамике Неголономных Систем 譯出，可供力学方面的工作者一般参考之用。

本書包含查浦雷金所著的論文四篇，内容均極有價值。書末附有斯列間斯基(Л. Н. Сретенский)所寫的短文，介紹查浦雷金在動力学方面的著作，由此可以看到这位偉大学者的功績以及本書的梗概。

非全定系統的动力学研究

C. A. 查浦雷金 著
张 燮 譯

*

科学出版社出版 (北京朝阳門大街117号)
北京市书刊出版业营业許可証出字第061号
中国科学院印刷厂印刷 新华书店总經售

*

1956年8月第一版 书号：0493 字数：72,000
1959年7月第二次印刷 开本：850×1168 1/32
(京) 4,271—6,070 印张：2 13/16 插頁：1

定价：(10) 0.55 元

С. А. Чаплыгин

(1934 年)

目　錄

論重旋轉体在水平面上的运動[1]

在 1895 年芬蘭科学会会報（Acta Societatis scientiarum Fennicae）第 20 卷第 10 期中，登載了林德勒夫(Ernst Lindelöf)的論文“論旋轉体在水平面上的滚動”．在該項著作中，作者似乎已將他所提出的問題完全解决，而且所有的計算都歸到某些積分的計算．但在開始數頁裏，当推導微分方程的時候，林德勒夫造成了一个重大的錯誤，因而他所得出的方程比作者实在所能得到的要簡單些．本文第一部分的內容，是 1895 年 10 月 25 日我在業餘自然科学工作者协会物理分会的会議上的報告，用以批判林德勒夫的方法；在第二部分中，我作出了問題的正当的解法，而且只有在如此的情形下才能用積分号求解，当我們所列出的主要的線性微分方程是二階的方程時．

設有某个力学系統，在任一瞬間均由 n 个參數 $q_1, q_2, \cdots, q_n$ 所决定，各該參數的变分受 m 个形式如次的条件的約束：

$$A_1^{(k)}\delta q_1 + A_2^{(k)}\delta q_2 + \cdots + A_n^{(k)}\delta q_n = 0 \qquad (k=1,2,\cdots,m), \tag{1}$$

其中 $A_1^{(k)}$，$A_2^{(k)}$，$\cdots$，$A_n^{(k)}$ 都是各个參數的函數；方程組(1)假定为不可積的．在廣义的速度 $\dot{q}_s$ 之間，顯然有形式如下的關係式：

$$A_1^{(k)}\dot{q}_1 + A_2^{(k)}\dot{q}_2 + \cdots + A_n^{(k)}\dot{q}_n = 0. \tag{2}$$

由達郎貝尔原理得

$$\sum_{s=1}^{n}\left\{\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial T}{\partial q_s} - \frac{\partial U}{\partial q_s}\right\}\delta q_s = 0, \tag{3}$$

其中 T 是動能而 U 为势函數．[由方程(1)可知，对於系統中所有滿足該組方程的可能位移，其所生反力的功等於零.]

---

1) 本文最初刊載於業餘自然科学工作者协会物理科学分会工作 (Труды Отделения физических наук Общества любителей естествознания) 第九卷，1897.

設 $A_i^{(k)}$ 僅僅与

$$q_{m+1},\cdots,q_n$$

有關，則方程(1)，(2)給出此种可能，使得將

$$\dot{q}_1,\dot{q}_2,\cdots,\dot{q}_m \quad 与 \quad \delta q_1,\delta q_2,\cdots,\delta q_m$$

用其餘參數以及各該參數的導數与变分表出如下：

$$\left.\begin{aligned}\dot{q}_1&=B_{m+1}^{(1)}\dot{q}_{m+1}+\cdots+B_n^{(1)}\dot{q}_n,\\ \dot{q}_2&=B_{m+1}^{(2)}\dot{q}_{m+1}+\cdots+B_n^{(2)}\dot{q}_n,\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\end{aligned}\right\}\tag{4}$$

$$\left.\begin{aligned}\delta q_1&=B_{m+1}^{(1)}\delta q_{m+1}+\cdots,\\ \delta q_2&=B_{m+1}^{(2)}\delta q_{m+1}+\cdots,\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\end{aligned}\right\}\tag{5}$$

其中 $B_i^{(k)}$ 是 $q_{m+1},\cdots,q_n$ 的函數.

倘若 U 与開首 m 个參數無關，而 T 僅与此諸參數的導數有關，則由方程(4)，(5)卽可完全消去方程(3)中的这 m 个參數. 在方程(3)中引入 $\delta q_1,\delta q_2,\cdots,\delta q_m$ 的表達式，然後再令独立变分的係數等於零，則得

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s}-\frac{\partial(T+U)}{\partial q_s}+\sum_{i=1}^{m}B_s^{(i)}\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}=0\quad(s=m+1,\cdots,n).\tag{6}$$

利用方程(4)，將 T 的表達式中的 $\dot{q}_1,\dot{q}_2,\cdots,\dot{q}_m$ 消去，而名所得的結果为 (T)，則有

$$\frac{\partial(T)}{\partial \dot{q}_s}=\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s}+\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}B_s^{(i)},$$

$$\frac{\partial(T)}{\partial q_s}=\frac{\partial T}{\partial q_s}+\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_s},$$

並且

$$\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_s}=\sum_{k=m+1}^{n}\frac{\partial B_k^{(i)}}{\partial q_s}\dot{q}_k.$$

根据这些方程卽得

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s}+\sum_{i=1}^{n}B_s^{(i)}\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}=\frac{d}{dt}\frac{\partial (T)}{\partial \dot{q}_s}-\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\frac{d}{dt}B_s^{(i)},$$

从而方程(6)可以重寫为

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial (T)}{\partial \dot{q}_s}-\frac{\partial (T)}{\partial q_s}-\frac{\partial U}{\partial q_s}+\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\left\{\sum_{k=m+1}^{n}\left(\frac{\partial B_k^{(i)}}{\partial q_s}-\frac{\partial B_s^{(i)}}{\partial q_k}\right)\dot{q}_k\right\}=0. \quad (7)$$

顯然,欲使这組方程具有平常的拉格郎日方程

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial (T)}{\partial \dot{q}_s}-\frac{\partial (T)}{\partial q_s}-\frac{\partial U}{\partial q_s}=0 \quad (8)$$

的形式,則其必要条件为,各函數 B 完全滿足形式如下的關係式:

$$\frac{\partial B_s^{(i)}}{\partial q_k}-\frac{\partial B_k^{(i)}}{\partial q_s}=0,$$

其中 i, k, s 是一切可能的标号;而在这种情形下,方程(1),(2)即为可積的,因此在參數 $q_1, q_2, \cdots, q_n$ 之間必有有限的關係式,而与假設不合.[倘若方程(1)可以化为

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1}=0, \cdots, \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_m}=0$$

的形式,則方程組(7)也与(8)相同;这是例外的情形,在以後的討論裏面並不成立.]

茲考察林德勒夫如何作出他的問題中的微分方程.設有剛体,其形狀及質量的分佈都關於 $G\zeta$ 軸对称,而 G 是它的重心,設此剛体与不動的水平面 OXY 接觸於 C 點(圖1).用 α 代表物体的軸与其子午線 $C\zeta$ 的水平切線 NM 的交角 ζNM,用 β 代表这个子午線的平面与物体的任一个子午面的交角,又用 γ 代表直線 NM 与不動軸 OX 的交角;則物体的位置完全决定於 α, β, γ 各角及 C 點的坐标 x, y.因为假設沿平面 OXY 上不可能滑動,那末物体上在 C 點处的速度等於零.由此种情况即可寫出一組方程,联繫(决定物体位置的)參

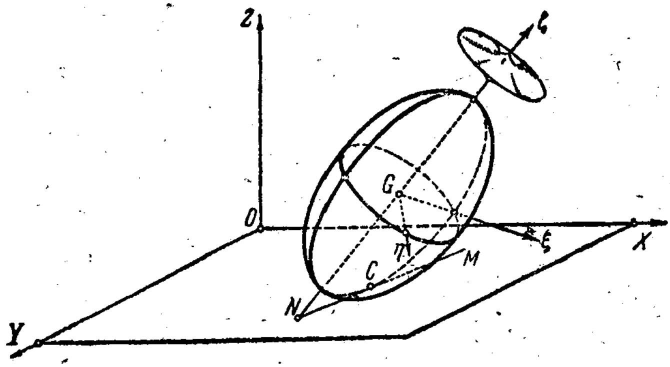

圖 1

數的变分及參數關於時間的導數；各該方程具有如次的形式：

$$\left.\begin{aligned}\delta x&=A\,\delta\alpha+B\,\delta\beta+C\,\delta\gamma,\\ \delta y&=A_1\delta\alpha+B_1\delta\beta+C_1\delta\gamma;\\ \dot{x}&=A\,\dot{\alpha}+B\,\dot{\beta}+C\,\dot{\gamma},\\ \dot{y}&=A_1\dot{\alpha}+B_1\dot{\beta}+C_1\dot{\gamma},\end{aligned}\right\}\qquad(9)$$

其中 A, B, $\cdots$, C_1 均与 x, y 無關；这組方程是不能求積分的，因为 x, y 本質上並不是 α, β, γ 的函數。在作出動能的表達式時，林德勒夫便已經計入了方程(9)；然後再用这种表達式 (T) 便將微分方程寫成了(8)的形式而不是(7)的形式。但事实上应該是(7)，这就是林德勒夫的錯誤所在。

現在轉而闡述我对於这个問題的分析法。选取兩个坐标系（圖1）：$OXYZ$ 是不動的，而 $G\xi\eta\zeta$ 是動的。假設後者的軸 $G\xi$ 隨時都在鉛直子午線的平面內，而 $G\eta$ 軸垂直於这个平面。用林德勒夫的參數來決定物体的位置，並以 u, v, w 代表 G 點關於動軸的速度分量，用 p_1, q_1, r_1 代表各該軸的角速度分量，又用 p, q, r 代表物体本身的角速度在上述各軸上的投影。为了更普遍化起見，將物体联以一个迴轉儀，其軸与 $G\zeta$ 軸相合[而且迴轉儀關於物体具有常數角速度]，又此迴轉儀繞其軸的[總]動量矩用 s 代表，則 s 顯然为常數（迴轉儀的支承軸上的摩擦力不計）。其次假設 M 为物体与迴轉儀的質量，G

为系統的重心，A 为系統繞 $G\xi$ 与 $G\eta$ 軸的慣性矩，B 是單个物体的慣性矩，而 B' 为單个迴轉儀的慣性矩——兩者都關於对称軸而言；又設 R 为 C 點的摩擦力在 $G\eta$ 軸上的投影，ξ 与 ζ 为 C 點在子午面 $C\zeta$ 內的坐标。

因为 $G\zeta$ 軸在物体內不動，所以

$$p=p_1,\quad q=q_1;\tag{10}$$

又 r_1 易於用 p 表出；事实上，平面 $G\zeta\xi$ 隨時都保持鉛直，所以動軸的角速度在 NM 上的投影等於零，从而

$$r_1=-p_1\operatorname{tg}\alpha.\tag{11}$$

又因为物体上的 C 點並無速度，所以

$$\left.\begin{aligned}u+q\zeta=0,\\ v+r\xi-p\zeta=0,\\ w-q\xi=0.\end{aligned}\right\}\tag{12}$$

我們易於作出下列方程：

$$M\left(\frac{dv}{dt}+r_1u-p_1w\right)=R,$$

$$A\frac{dp}{dt}+(Br+s)q_1-Aqr_1=-\zeta R,$$

$$B\frac{dr}{dt}+Aqp_1-Apq_1=\xi R;$$

根据方程(10)，(11)，(12)，可將上列各式重寫为如次的形式：

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d}{dt}(p\zeta-r\xi)+pq(\zeta\operatorname{tg}\alpha-\xi)=\frac{R}{M},\\ &A\frac{dp}{dt}+(Br+s+Ap\operatorname{tg}\alpha)q=-\zeta R,\\ &B\frac{dr}{dt}=\xi R.\end{aligned}\right\}\tag{13}$$

但因

$$q=-\frac{d\alpha}{dt},\tag{14}$$

故由方程(13)消去 R，並作若干的化簡，則得

$$\left.\begin{aligned}&A\frac{dp}{d\alpha}+B\frac{\zeta}{\xi}\frac{dr}{d\alpha}=Br+s+Ap\operatorname{tg}\alpha,\\&\zeta\frac{dp}{d\alpha}-\frac{B+M\xi^2}{M\xi}\frac{dr}{d\alpha}=r\frac{d\xi}{d\alpha}-p\left(\frac{d\zeta}{d\alpha}+\xi-\zeta\operatorname{tg}\alpha\right).\end{aligned}\right\}\tag{15}$$

这裏假設ξ,ζ都是α的確定的函數，这种函數与子午線的形式有關．由方程(15)可以導出二階的線性方程；積分这个方程，便可以得出p, r与α的關係，其中包含兩个隨意常數，然後再用積分号即可完成問題的解法．事实上，我們作動能T的表達式：

$$2T=A(p^2+q^2)+Br^2+Mq^2(\xi^2+\zeta^2)+M(p\zeta-r\xi)^2+\frac{s^2}{B'}.$$

又势函數U具有

$$U=-Mgz$$

的形式，其中

$$z=\xi\cos\alpha-\zeta\sin\alpha$$

为重心在平面OXY上的高度．考慮到由迴轉儀繞其軸旋轉而生的動能$\frac{s^2}{2B'}$是常數，則有

$$\begin{aligned}&Ap^2+Br^2+M(p\zeta-r\xi)^2+\{A+M(\xi^2+\zeta^2)\}q^2+\\&\quad+2Mg(\xi\cos\alpha-\zeta\sin\alpha)=\text{常數}.\end{aligned}\tag{16}$$

由此方程即可定出q为α的函數．又α与時間的關係可以由方程

$$dt=-\frac{d\alpha}{q}\tag{17}$$

來決定．此外，方程

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d\beta}{dt}=r-r_1=r+p\operatorname{tg}\alpha,\\&\frac{d\gamma}{dt}=-p\cos\alpha+r_1\sin\alpha=-\frac{p}{\cos\alpha}\end{aligned}\right\}\tag{18}$$

可以決定β, γ．至於x, y，則由下列公式定出：

$$dx=ds'\cos\gamma-ds''\sin\gamma,$$
$$dy=ds'\sin\gamma+ds''\cos\gamma,$$

其中ds', ds''分別为子午線与平行圈在C點的弧元素：ds'由N量到M，ds''由圖中向前量；我們易於看出

$$\left.\begin{aligned} ds' &= -\sqrt{\left(\frac{d\xi}{d\alpha}\right)^2 + \left(\frac{d\zeta}{d\alpha}\right)^2}\,d\alpha, \\ ds'' &= -\xi d\beta. \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

現在轉回來考慮方程 (15)；問題的解答有賴於这組方程的積分法．我們要注意，有一个特殊情形存在，使这組方程不能用，而必須直接由方程組(13)求解；当

$$q=\frac{d\alpha}{dt}=0, \quad \alpha=\text{常數}$$

時，便有这种情形；此時由方程(13)易於求出

$$R=0, \quad p=\text{常數}, \quad r=\text{常數}.$$

由問題的其餘三个微分方程所決定的常數，其間必定有某种關係存在，茲从略；这种關係可以由各該方程中消去物体在 OXY 面上的法線压力以及摩擦力沿子午線的切線上的分量而得．这个關係代表下面的事实：重力与慣性力的合力通过支承點．

考慮方程(15)的目的，是要找出此种最簡單的特殊情形，使上述方程易於求積；但首先我們可以注意它的一个有趣的特性：由 (15) 所導出的二階線性方程，当 $s=0$ 時，也就是当迴轉儀不存在時，不能有右边的部分．如果在这种情形下，物体运動的問題已經解決，則添入迴轉儀時，僅僅在上述的線性方程中引入一定形式的右边部分，从而此時問題也可以解決到底．

將方程(15)寫成下面的形式：

$$A\frac{d}{d\alpha}(p\cos\alpha)+\frac{B\zeta}{\xi}\cos\alpha\,\frac{dr}{d\alpha}=(Br+s)\cos\alpha,$$

$$\frac{d}{d\alpha}\left[p\cos\alpha\cdot\zeta e^{\int\frac{\xi}{\zeta}d\alpha}\right]-\frac{B+M\xi^2}{M\xi}\cos\alpha\cdot e^{\int\frac{\xi}{\zeta}d\alpha}\cdot\frac{dr}{d\alpha}=$$

$$=r\cos\alpha\cdot\frac{d\xi}{d\alpha}e^{\int\frac{\xi}{\zeta}d\alpha}. \tag{20}$$

这組方程可以被

$$Br+s=0, \quad p\cos\alpha=\text{常數}=a$$

所滿足，倘若物体具有如此的子午断面，使得

$$a\frac{d}{d\alpha}\zeta e^{\int\frac{\xi}{\zeta}d\alpha}=-\frac{s}{B}e^{\int\frac{\xi}{\zeta}d\alpha}\cos\alpha\frac{d\xi}{d\alpha}\tag{21}$$

的話，換言之，当

$$\frac{d\zeta}{d\alpha}+\xi=-m\cos\alpha\frac{d\xi}{d\alpha}$$

的時候，其中

$$m=\frac{s}{aB}.$$

比較上式与顯然成立的方程

$$\frac{d\xi}{d\zeta}=\operatorname{tg}\alpha,$$

便得到方程

$$\cos\alpha\cdot\frac{d\xi}{d\alpha}\left[m+\frac{1}{\sin\alpha}\right]+\xi=0,$$

用以决定 ξ, α 之間的關係.

最簡單而我認为最有兴趣的此類情形是：迴轉儀放在圓盤上面，此時

$$\xi=\text{常數}=b,\quad \zeta=\text{常數}=c,$$

而方程(21)当 $a=0$ 時成立，从而当 $p=0$ 時也成立．这样的运動可以用如次的儀器來实現：設有在圓盤 Q 上的迴轉儀 P（圖 2）；盤上有四根相交於 S 點的柱子；在 S 与圓盤的中心 T 处，迴轉儀的軸尖插入凹处．在一个柱子上的 M 點与迴轉儀上的 N 點处捲以坚固的橡皮帶，其兩端並未固定；將橡皮帶捲緊，再將儀器置於座上，然後拋擲儀器並除去橡皮．則由此种初始情形卽得關係式

$$Br+s=0,\qquad p=0,$$

而且儀器施行着我們上面所說的运動．此時有

$$\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2+\frac{2Mg}{A+M(b^2+c^2)}(b\cos\alpha-c\sin\alpha)=h,$$

用以决定参數与時間的關係；名 α_0 为 α 角的一个値，使 $\frac{d\alpha}{dt}=0$，並

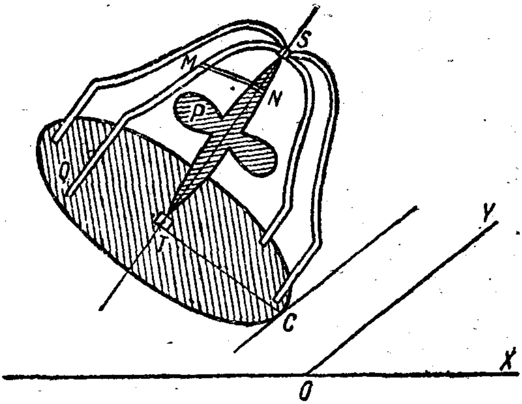

圖 2

令

$$b=\rho\cos\mu,\quad k=\frac{2Mg\rho}{A+M(b^2+c^2)},\quad -c=\rho\sin\mu,$$

則由上式卽得

$$\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2=k\Big[\cos(\alpha_0-\mu)-\cos(\alpha-\mu)\Big];$$

由此方程可知，α 按照鐘擺的規律而变化. 方程(18)給出

$$\beta=rt+\beta_0,\qquad \gamma=\gamma_0=0,$$

並且等式 $\gamma_0=0$ 可以由 OX, OY 兩軸的方向的適当選擇而得; 又 C 點描出直線，原因是

$$dx=0,\qquad dy=-br\,dt.$$

在所論的情形中，圓盤与迴轉儀無關，而方程(15)的通解可以用比較簡單的形式表出. 事实上，用 r' 代表 $\frac{Br+s}{A}$，並与以前一样，令 $\xi=b$, $\zeta=c$, 則得一組決定 p 与 r' 的方程:

$$\frac{dp}{d\alpha}+\frac{c}{b}\,\frac{dr'}{d\alpha}=r'+p\,\mathrm{tg}\,\alpha,$$

$$\frac{dp}{d\alpha}-\frac{B+Mb^2}{Mbc}\cdot\frac{A}{B}\,\frac{dr'}{d\alpha}=p\left(\mathrm{tg}\,\alpha-\frac{b}{c}\right);$$

由此卽有

$$\left\{\frac{c}{b}+\frac{B+Mb^2}{Mbc}\cdot\frac{A}{B}\right\}\frac{dr'}{d\alpha}=r'+p\frac{b}{c},$$

然後

$$\left\{\frac{c^2}{b^2}+\frac{B+Mb^2}{Mb^2}\cdot\frac{A}{B}\right\}\frac{d^2r'}{d\alpha^2}=$$

$$=r'\left[1-\frac{c}{b}\operatorname{tg}\alpha\right]+\frac{dr'}{d\alpha}\operatorname{tg}\alpha\left\{\frac{c^2}{b^2}+\frac{B+Mb^2}{Mb^2}\cdot\frac{A}{B}\right\}.$$

倘若 $c=0$，也就是說，系統的重心在盤子的平面內，則令

$$\sin\alpha=x$$

時，即可將决定 r' 的方程化为

$$\frac{d}{dx}(1-x^2)\frac{dr'}{dx}=l^2r'$$

的形式，从而 r' 可以用 x 的超幾何函數表出；这种函數也可以表出 p，然後像前面所說的一样，用積分号即可結束求積法.

現在轉到我們所求出的第三个，也就是最後一个，特殊情形．我們考慮，物体的表面应該呈何种形式，使得(15)中的第一个方程，也就是(20)中的第一个方程，能够單独求積分．由方程(20)可以得到所要的条件如下：

$$\frac{d}{d\alpha}\frac{\zeta}{\xi}\cos\alpha=-\cos\alpha,$$

由此積分得

$$\frac{\zeta}{\xi}=\frac{l-\sin\alpha}{\cos\alpha},$$

$$\zeta=\rho(l-\sin\alpha),\quad \xi=\rho\cos\alpha; \tag{22}$$

於是

$$d\zeta=d\rho(l-\sin\alpha)-\rho\cos\alpha\,d\alpha,$$

$$d\xi=d\rho\cos\alpha-\rho\sin\alpha\,d\alpha;$$

但

$$d\xi\cos\alpha-d\zeta\sin\alpha=0,$$

所以

$$d\rho(l\sin\alpha-1)=0,\quad \rho=\text{常數}.$$

由方程(22)可知，物体由半徑为 ρ 的球面所圍成，球心在 $G\zeta$ 軸上，与系統的重心的距离为 ρl. 在这种情形下，將方程(20)積分卽得

$$Ap\cos\alpha+(Br+s)(l-\sin\alpha)=a. \tag{23}$$

(15)中的第二个方程，可以利用第一个方程化为

$$\left(B\frac{\zeta}{\xi}+A\frac{B+M\xi^2}{M\xi\zeta}\right)\frac{dr}{d\alpha}-Br-s+A\frac{r}{\zeta}\frac{d\xi}{d\alpha}=0$$

的形式，原因是

$$\xi+\frac{d\zeta}{d\alpha}=0;$$

將 ξ, ζ 代以它們的值(22)，則得一个決定 r 的方程

$$\left\{B\rho^2(l-u)^2+\frac{AB}{M}+A\rho^2(1-u^2)\right\}\frac{dr}{du}-$$
$$-r[B\rho^2(l-u)+A\rho^2u]=\rho^2s(l-u),$$

其中

$$u=\sin\alpha;$$

將上式積分，則得

$$r\sqrt{\frac{AB}{M\rho^2}+A(1-u^2)+B(l-u)^2}-$$
$$-\int\frac{s(l-u)du}{\sqrt{\frac{AB}{M\rho^2}+A(1-u^2)+B(l-u)^2}}=b. \tag{24}$$

在所論情形中作進一步的計算，可以導出十分複雜的積分式，它們在某些特殊的假設下可以化簡．例如，倘若令 $l=0$，也就是說，假設重心与球心相合，則得波貝略夫(Д. К. Бобылёв)与茹可夫斯基(Н. Е. Жуковский)教授所研究过的情形：我們易於看出，这种假設完全取消了重力的作用，而重力僅僅添在系統对於平面 OXY 的作用裏面．我們不拟停留在这种已經完全解決了的情形上，而僅僅指出，此時所有的参數均可用時間的橢圓函數表出．

由另一种特殊假設——迴轉儀不存在，可以引出比較複雜的結

果．在公式(23)与(24)中，令

$$s=0,$$

則此二式卽化为

$$\left.\begin{aligned} p\cos\alpha+m^2(l-\sin\alpha)r=a,\\ r\sqrt{\frac{B}{M\rho^2}+1-u^2+m^2(l-u)^2}=b,\end{aligned}\right\}\tag{25}$$

其中

$$m^2=\frac{B}{A}.$$

又動能的方程是

$$\begin{aligned} Ap^2+Br^2+[A+M(\xi^2+\zeta^2)]q^2+\\ +M(r\xi-p\zeta)^2+2Mg\rho(1-l\sin\alpha)=c^2.\end{aligned}\tag{26}$$

注意到

$$(r\xi-p\zeta)^2=(p^2+r^2)(\xi^2+\zeta^2)-(p\xi+r\zeta)^2,$$

$$p\xi+r\zeta=p\rho\cos\alpha+r\rho(l-\sin\alpha)=\rho a-(m^2-1)r\rho(l-u),$$

$$\xi^2+\zeta^2=\rho^2(1+l^2-2lu),\quad q\cos\alpha=-\frac{du}{dt}=-\dot{u},$$

便易於將上面的等式化为

$$\begin{aligned}\{A+M\rho^2(1+l^2-2lu)\}p^2\cos^2\alpha+\{B+M\rho^2(1+l^2-2lu)\}r^2\cos^2\alpha+\\ +\{A+M\rho^2(1+l^2-2lu)\}\dot{u}^2+2Mg\rho(1-lu)\cos^2\alpha-\\ -M\rho^2\{a-(m^2-1)(l-u)r\}^2\cos^2\alpha-c^2\cos^2\alpha=0,\end{aligned}$$

或者利用(25)式中的第一个方程而得

$$\begin{aligned}\{A+M\rho^2(1+l^2-2lu)\}\{[a-m^2(l-u)r]^2+r^2(1-u^2)+\dot{u}^2\}+\\ +\{(B-A)r^2-M\rho^2[a-(m^2-1)(l-u)r]^2\}(1-u^2)+\\ +\{2Mg\rho(1-lu)-c^2\}(1-u^2)=0.\end{aligned}$$

倘若在此式中將 r 用(25)式中的第二个方程表出，再用簡單的变化，便得到一个決定 u 与時間的關係的等式：

$$\begin{aligned}\{A+M\rho^2(1+l^2-2lu)\}\dot{u}^2=(1-u^2)\{c^2-2Mg\rho(1-lu)\}-\\ -a^2\{A+M\rho^2(l-u)^2\}-M\rho^2b^2\{1-u^2+m^2(l-u)^2\}+\end{aligned}$$