函數插補与逼近理論

B. Л. 岡察洛夫

科 学 出 版 社

函数插补与逼近理論

В. Л. 岡察洛夫著

路 見 可 等 譯

科 学 出 版 社

1 9 5 8

函数插补与逼近理論

原著者　〔苏〕B. Л. 岡察洛夫
翻譯者　路見可等
出版者　科学出版社
北京朝陽門大街117号
北京市書刊出版業營業許可証出字第061号
印刷者　中国科学院印刷厂
总經售　新华書店

1958年4月第一版　書号：1100　字数：376,000
1958年4月第一次印刷　开本：787×1092 $^1/_{18}$
(京)0001—1,465　印張：19 $^2/_9$　插頁：3

定价：(11)4.00元

В. Л. ГОНЧАРОВ
ТЕОРИЯ ИНТЕРПОЛИРОВАНИЯ И
ПРИБЛИЖЕНИЯ ФУНКЦИЙ
(издание второе, переработанное)
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
Москва
1954

內 容 提 要

本書系根据苏联技术理論書籍出版社出版的 В. Л. 岡察洛夫所著"函数插补与逼近理論"1954年改写第二版譯出。

本書比較詳細地講述了实变数函数的插补与逼近理論，同时也介紹了复变数函数的这种理論以及在綫性有模空間中的最好逼近法。它可以作为数学系高年級学生与研究生数学参考用書，也可供广泛的数学工作者参考。

本書由武汉大学路見可、程少兰、余家荣及郑州大学吳亲仁合作翻譯。

譯者發現本書俄文原本中有一些有問題的地方，已在譯文中分別加以改正（例如本書第186,187,221,222及325頁对原文更动較大），但是沒有一一明白指出。如果修改得不正确，当由譯者負責，并請讀者指正。

第 二 版 序

函数的插补与逼近理論曾經是并且仍然是近代数学分析發展的主要方向之一，同时也是祖国的(俄国及苏联的)数学創作有特别輝煌成就的部門。

虽然时間过去了二十年，而且在这段时期中主要由祖国的数学家在这一領域中作了巨大的貢献，但是还是需要供广泛讀者使用的这样一本書：它既不使人倦于过多的細节，又充分注意到原則性的关节，因而可以作为現代繼續特别迅速發展的一个科学知識部門的入門。在这門科学向前發展的过程中，出現了新的問題，采用了新的分析工具。沒有可能作出描繪景色的一幅完整的圖画(为此必須还写一本書)，著者决定重版这本长久以前的著作，而有意識地限于在古典的范圍內(有限区間，形为有限和、亦即代数与三角多項式的逼近函数)提出問題。新得到的結果也是在这种条件下来考虑的。为了講述显明的"泛函数分析的"表示法与通常的泛函数术語，著者認为写出补編来概述推广的理論是有益处的[1)]。

此外，在本書的結构上作了一些变动：特别是加了第五章来講述在复数区域中函数的插补与逼近問題；但是这并不是說著者要在前面第一至第四章中避免应用复变函数論的工具。

我的老师 C. H. 伯恩斯坦院士贊同了一些想法，謹向他致謝，我也感謝对本書第一版提出了意見的一些人士(特别是 Я. C. 貝西可維奇教授)。我誠恳地感謝 B. C. 維琴斯基在編校中所提供的帮助。

B. 岡察洛夫

1954年8月于莫斯科

1) 关于这方面材料的簡述，我有一篇論文載在"Научное наследие П. Л. Чебышева (П. Л. 契比謝夫的科学遺产)"論文集，第1卷(1945年)內。

著 者 序

关于用比較簡单的（形如多項式的）分析式来近似表示連續函数的各种理論，在数学的文献中缺乏一种書籍以連貫講述它們作为其主要任务。如果我們特别注意到函数的逼近法在函数論本身中所已充分發揮的作用，就可看到对于这种書籍的需要很大。我想来补足这个缺陷。

为了說明“函数的插补与逼近理論”的一般內容，只要提出三个人名就够了。其中第一个是函数論的奠基人卡尔·維尔斯德拉斯的名字，他給出了一个重要的定理；在某种意义下，連續函数概念本身可以从这个定理产生出来。第二个是巴弗努吉·李伏維奇·契比謝夫的名字，他作出了首創性的函数的最好逼近法。第三个是塞尔格·納达諾維奇·伯恩斯坦的名字，他沟通两种不同的思想，使得它們相互滲透。

由于材料丰富与情形复杂（如果可以这样說的話），定出講述的計划是很困难的。我想尽力講到广泛的內容，建立一般的統一方案，并且也想依照讀者思想的發展来确定講述的次序。一般說来，在材料的选擇与安排上，还是請原諒著者的某种主观性。在这里談不上有詳尽無遺的講述。我們也不講与本書的基本对象有机地并且在历史上紧密联系着的、而在本質上則屬于較远的領域的許多問題，即屬于有限差論、数学物理方程、保角映射的近似理論以及变分学等等的問題。

我們假定讀者一般通曉大学二、三年級課程范圍內的数学分析，包括复变函数論在內。

在导言中一般地提出了問題后，就概述一系列預备知識与以后必需的参考材料。讀者熟悉了它的內容，在需要时就可参考。

第一章講述狹义的插补法，也就是这一种类型的函数逼近法：逼近的函数与被逼近的函数必須在一系列离散的点恰好有相同的数值。

在第二章中証明連續函数有一致逼近，这时在所考虑的范圍內一切点，逼近与被逼近的函数相差的絕对值不超过預先指定的数（維尔斯德拉斯定理）。

第三章包含实用上最方便的逼近論，亦即平方逼近論（換句話說，这就是用最小二乘法的逼近論）。

而且平方法和插补法一样，它与解綫性方程有关，这就决定了它們的理論已有怎样深刻的發展，并且它們的应用是怎样广泛与多种多样的。

最后，在第四章中考虑到平均冪逼近法(平方逼近法的推广)，以及它們在某种意义下的極限情形，即契比謝夫的最好逼近法。这些逼近法已經沒有綫性，因此在計算上有更大的困难。然而对于契比謝夫逼近法的研究，特别是 C. H. 伯恩斯坦的結果，指出了它們在函数論中的中心地位以及它們与其它类型的逼近法的关系。

这就是本書的計划。

因为我不打算講实际計算的方法，所以相当多的例子主要是用来闡明基本課文并且使它精确化的。

C. H. 伯恩斯坦院士願意在我的工作中作出指示，謹向他热烈致謝；我也很感謝 H. H. 魯金院士与 A. H. 柯尔莫哥洛夫教授对我的工作的兴趣与关切；沒有这些，这項工作可能不会完成的。

1934 年

目　　录

导　　言

第一章　点揷补法

第二章　維尔斯德拉斯定理

第三章　平方逼近法

第四章　平均冪逼近法与一致(最好)逼近法

第五章　复数区域中的插补法与逼近法

补編　在綫性有模空間中的最好逼近法

导　　言

1. 函数近似表写的概念　作为本書对象的問題可以大致地說明如下：

已給屬于某个（較寬的）函数类 $(\mathfrak{F})$ 的一函数 $f(x)$．另外又指出某一(較窄的)函数类 $(\mathfrak{P})$．需要在 $(\mathfrak{P})$ 类中拣出一函数 $P(x)$，使在某种意义下(究竟在哪种意义下还必須指明）函数 $P(x)$ 与已給的函数 $f(x)$ 相差很小．正如对于任一数学問題一样，在求解时必須回答两个問題：1）滿足所提出要求的函数 $P(x)$ 在类 $(\mathfrak{P})$ 中是否存在？2)若这样的函数存在，那么是仅有一个还是有几个？这时，只能有一个且仅有一个解答的問題才算是确定的．

我們所研究的問題屬于以下两种类型的哪一种，要看是否将周期性条件加在討論的函数上(不論是已知的函数还是未知函数)而定．

在第一类型的問題中，类 $(\mathfrak{F})$ 包括着定义于某基本区間 (a,b) 中的連續实函数 $f(x)$，其中 a 与 b $(a<b)$ 是有限实数；类 $(\mathfrak{P})$ 包涵了通常的实多項式，也就是变数 x 的实系数的有理整函数

$$P(x)=\sum_{m=0}^{n}c_mx^m, \tag{1}$$

而且在某些情况下次数 n 可以預先規定(n 是非負整数)；也还可以加上其他的限制．

在第二种类型的問題中，类 $(\mathfrak{F})$ 包涵了定义于整个实軸 $-\infty<x<+\infty$ 上的具有周期 Ω 的連續实函数 $f(x)$，不失一般性，以后总認为这周期是 2π：

$$f(x+2\pi)=f(x);$$

类 $(\mathfrak{F})$ 是由实的三角多項式所构成，也就是由形状如下的和式所构成：

$$T(x)=\sum_{m=0}^{n}(a_m\cos mx+b_m\sin mx), \tag{2}$$

其中系数 a_m 与 b_m 是实数，而次数 n 可以預先規定，或者还加上其他限制．

上述各类型的問題都可以移到复数域上去，这时类 $(\mathfrak{F})$ 包涵了在全平面上或其一部分上的解析（正則）的函数；而所求的有理多項式或三角多項式的系数也假定是复数．

現在来討論最重要的問題，即是上面的概括的提法“函数 $P(x)$[1] 在某种意义上

1）一般是对于第一类型的問題运用这个符号，而这里我們是兼指两种类型的問題．

与已知函数 $f(x)$ 相差很小"应該怎样来理解.

数学理論發展的道路随着表写函数所采取的基本原則而不同. 在本書中准备收集某些最值得注意的函数表写理論.这里有插补法、平方逼近、平均冪逼近与一致(最好)逼近.

作为插补法理論基础的原則是: 所求多項式 $P(x)$ 在所指定的許多点上必須与已知函数 $f(x)$ 取相同的值,也就是差

$$P(x)-f(x) \tag{3}$$

在所給出的点处要等于零(第一章).

作为冪逼近理論基础的原則是:在基本区間上的积分

$$\int |P(x)-f(x)|^s dx \quad (s>0) \tag{4}$$

之值必須与零相差很小. 特别重要的就是 $s=2$ 的情形(平方逼近——見第三章与第四章的开始部分).

作为一致逼近理論基础的原則是: $P(x)$ 与 $f(x)$ 差的絕对值(在基本区間上)的極大值

$$\max|P(x)-f(x)| \tag{5}$$

必須与零相差最小(第二章和第四章).

这些原則中每一个可以有各种推广, 也可以应用到上述两种类型問題中任一种上去.

应該滿足怎样的条件,才能使函数表写問題是确定的呢?

在插补法的理論中,通常是这样来限制所求多項式的次数,即要使多項式未定系数的个数等于已給插补点的个数. 必須弄清楚这时所产生的方程組 (其未知数就是这些未知系数)是否有一組且仅有一組解.

在逼近(冪逼近或一致逼近)理論中,一方面要限制未知多項式的次数,同时还要求表达式(4)或者(5)取最小的可能的值. 如此就产生一个極值問題 (以未知系数作为变数),也需要弄清楚,它是否有解并且只有一个解.

以后还可能有这样的問題. 設多項式序列

$$P_0(x),\ P_1(x),\ P_2(x),\ \cdots, P_n(x),\ \cdots$$

是用 n $(n=0,1,2,\cdots)$ 次多項式来插补 (或逼近) 某一函数这一問題的解. 能不能断定这个多項式序列在某种意义下以原来的函数 $f(x)$ 为極限? 特别是,能不能断定一致收斂性成立,也就是能不能对任一小数 ε, 总存在充分大的数 n_0, 使得当 $n>n_0$ 时,

对于在所考慮的区間上所有的 x 值，不等式

$$|P_n(x)-f(x)|<\varepsilon \tag{6}$$

成立？換句話說，函数 $f(x)$ 能不能展开成一致收斂的多項式級数

$$f(x)=P_0(x)+[P_1(x)-P_0(x)]+[P_2(x)-P_1(x)]+\cdots+$$
$$+[P_n(x)-P_{n-1}(x)]+\cdots \tag{7}$$

呢？

如果要想知道能不能把給出的連續函数（根据所采取的原則）以任意精确度用多項式来表写，就应該回答这些問題。在以后要仔細地研究这些問題。

下列簡单的例子可以直接地加以考察；它們确鑿地也清楚地証实了函数逼近問題可以用若干不同的方法提出。

例 1. 設要用一次多項式 $P(x)=Ax+B$ 在区間 $-1\leqslant x\leqslant+1$ 上近似地表写指数函数 $f(x)=2^x$，并使它們在点 $x=\pm1$ 处完全相等。我們得到：

$$A+B=2,$$
$$-A+B=\frac{1}{2},$$

于是 $A=\frac{3}{4}$，$B=\frac{5}{4}$；因此就能写出近似的等式

$$2^x\approx\frac{1}{4}(3x+5).$$

所得到的近似式非常不完备，因为在所考慮的区間上曲綫 $y=2^x$ 与直綫相差很远。若将一次多項式換成二次多項式 $P(x)=Ax^2+Bx+C$（即是将直綫換成拋物綫），就会得到較为令人滿意的結果；这时我們还要再加上一点，例如 $x=0$，使已給的指数函数与二次多項式在这一点上也相等。从方程

$$A+B+C=2,$$
$$A-B+C=\frac{1}{2},$$
$$C=1,$$

我們就有 $A=\frac{1}{4}$，$B=\frac{3}{4}$，$C=1$，因此

$$2^x\approx\frac{1}{4}(x^2+3x+4).$$

例 2. 若想在区間 $-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$ 上用通常的多項式来逼近（偶）函数 $f(x)=\cos x$，自然地对多項式只須引进变数的偶次冪。令 $P(x)=Ax^2+B$ 并且要求它們在 $x=0$ 与 $x=\frac{\pi}{2}$ 处相等，我們就会得

$$\cos x\approx1-\frac{4}{\pi^2}x^2\approx1-0.405x^2.$$

同样，若是用四次多項式 $P(x)=Ax^4+Bx^2+C$ 并再加上一点 $x=\frac{\pi}{3}$，就会导出近似等式

$$\cos x\approx\frac{1}{10}\left(36\frac{x^4}{\pi^4}-49\frac{x^2}{\pi^2}+10\right).$$

例 3. 为了用三角多項式 $T(x)=A\cos x+B$ 来逼近函数 $f(x)=2^{\cos x}$，我們就要求它們在点 $x=0$ 与 $x=\pi$ 处恰好相等，这样就給出

$$2^{\cos x}\approx\frac{1}{4}(3\cos x+5).$$

用类似的方法，令 $T(x)=A\cos 2x+B\cos x+C$，并加上点 $x=\frac{\pi}{2}$，就得到

$$2^{\cos x}\approx\frac{1}{8}(\cos 2x+6\cos x+9).$$

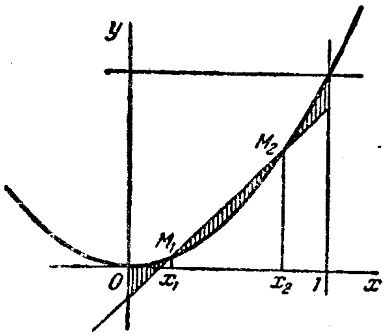

圖 1

例 4. 选取綫性函数 $P(x)=Ax+B$，使得积分

$$I=\int_0^1|x^2-P(x)|dx$$

(即圖 1 上有陰影的面积)尽可能地小.

直綫 $y=Ax+B$ 与抛物綫 $y=x^2$ 二交点的横坐标 x_1, x_2 滿足不等式 $0<x_1<x_2<1$，由此得到 $B<0, A+B<1, B>-\frac{A^2}{4}$；很显然，此外应該有 $A>0$ 与 $B>-1$. 这些不等式确定了变数 A 与 B 的平面中的一区域，它是在一閉曲綫內部的有限区域. 由計算得出

$$I=\int_0^{x_1}(x^2-Ax-B)dx-\int_{x_1}^{x_2}(x^2-Ax-B)dx+\int_{x_2}^{1}(x^2-Ax-B)dx=$$
$$=\frac{1}{3}-\frac{1}{2}A-B+\frac{1}{3}(A^2+4B)^{\frac{3}{2}},$$

于是

$$\frac{\partial I}{\partial A}=-\frac{1}{2}+A\sqrt{A^2+4B},\qquad \frac{\partial I}{\partial B}=-1+2\sqrt{A^2+4B},$$

令导数 $\frac{\partial I}{\partial A}$ 与 $\frac{\partial I}{\partial B}$ 等于零，我們就得到 A 与 B 的值：$A=1,\ B=-\frac{3}{16}$；而且在这些值处只可能有極小，由此应得：

$$P(x)=x-\frac{3}{16}.$$

例 5. 作綫性函数 $P(x)=Ax+B$，使积分

$$=\int_0^1[x^2-P(x)]^2dx$$

为極小.

这时

$$I=\int_0^1(x^2-Ax+B)^2dx=\frac{1}{3}A^2+AB+B^2-\frac{1}{2}A-\frac{2}{3}B+\frac{1}{5}.$$

令它的导数

$$\frac{\partial I}{\partial A}=\frac{2}{3}A+B-\frac{1}{2}\qquad 和\qquad \frac{\partial I}{\partial B}=A+2B-\frac{2}{3}$$

为零，就可得到

$$A=1,\qquad B=\frac{1}{6},$$

于是

$$P(x)=x-\frac{1}{6}.$$

例 6. 作綫性函数 $P(x)=Ax+B$，使表达式

$$E=\max_{0\leq x\leq 1}|x^2-P(x)|$$

（即是抛物綫与直綫縱坐标的差的最大絕对值）尽可能地小.

因为数量 $|x^2-P(x)|$ 在区間端点上取値 $-B$ 和 $1-A-B$，而在区間內有極大値 $\frac{A^2}{4}+B$，則 E 显然就等于三数

$$-B,\qquad 1-A-B\qquad 和\qquad \frac{A^2}{4}+B$$

中的最大者. 不难看到，这些数中最大的只有当它們彼此相等时

$$-B=1-A-B=\frac{A^2}{4}+B$$

才有最小値，而这就給出：$A=1$，$B=-\frac{1}{8}$，因此

$$P(x)=x-\frac{1}{8}.$$

例 7. 作一次多項式 $P(x)$ 逼近函数 $f(x)=2^x$，使得积分

$$\int_{-1}^{+1}[P(x)-f(x)]^2dx$$

有最小値.

答：
$$2^x\approx\frac{3}{4}\left[\left(\frac{5}{\lg 2}-\frac{3}{\lg^2 2}\right)x+\frac{1}{\lg 2}\right]\approx 0.727x+1.082.$$

例 8. 用一次多項式来逼近上題中的函数，使得値 $\max\limits_{|x|\leq 1}|P(x)-f(x)|$ 尽可能地小.

答：
$$2^x\approx\frac{3}{4}\left(x+\frac{1+\frac{11}{3}\lg 2-\lg 3+\lg\lg 2}{2\lg 2}\right)\approx 0.750x+1.123.$$

例 9. 用多項式 $P(x)=Ax^2+B$ 来逼近函数 $f(x)=\cos x$，使得积分

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}[P(x)-f(x)]^2dx$$

尽可能地小.

答：$\cos x \approx \frac{180}{\pi^3}\left[-\left(\frac{4}{\pi^2}-\frac{1}{3}\right)x^2+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{15}\frac{\pi^2}{4}\right)\right] \approx -0.418x^2+0.980.$

例 10. 用三角多項式 $T(x)=A\cos x+B$ 来逼近函数，使得偏差 $|T(x)-f(x)|$ 的極大值（在整个实軸上）尽可能地小.

令 $\cos x=X$，则可断定：表达式 $|A\cos x+B-2^{\cos x}|$（在整个实軸上）的極大值与表达式 $|AX+B-2^X|$（在 $|X|\leqslant 1$ 时）的極大值相等. 而在这种情况下，我們又得到了例 8 的条件，而 A 与 B 就与例 8 中所写出的相同.

在以下几节中，我們認为讀者有必要来回忆一下在代数、三角和函数論中某些已熟知的东西，并引进某些名詞和符号.

2. 函数論中的必要知識 当需要将經驗函数的关系写成公式的形状时，函数表写的問題就自然地被提出来了；这个經驗函数的关系可能是用表格或圖形給出来的。然而，如果以为函数表写的問題完全是在这些情况下被提出来的，那就錯了. 事实上不仅在沒有公式的时候需要适于运用的公式，而且即使有了公式，但这公式較为复杂，因而由于某种原因用起来比較困难，我們也要求提出适于运用的公式. 关于这一点，可以回想一下那些“积不出”的积分；那些由不能解出因变数的方程所給出的隐函数；还有那些由微分方程和初始条件所給出的函数，这时解的存在性与唯一性是由初始条件所保証.

我們有充分的根据只研究基本区間上的連續函数，如果对于任意小的 $\varepsilon(>0)$，总可以有这样的 $\delta[>0;\ \delta=\delta(\varepsilon, x_0)]$，使得从 $|x-x_0|<\delta$，便得 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$，则函数称作在点 $x=x_0$ 处連續（哥西的定义）. 如果它在一个区間的一切点处都連續，则称函数在这一区間上連續. 若一函数在一有限閉区間上連續，则它必为有界，而且一致連續（康托的定理）. 所謂一致連續就是：对于任意小的 $\varepsilon(>0)$，总可以有这样的 $\delta[>0;\ \delta=\delta(\varepsilon)]$，使得对于一切满足不等式 $|x'-x''|<\delta$ 的值 x' 与 x''，不論它們位于区間中的何处，不等式 $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$ 总成立.

在基本区間 I 上一致連續的一切函数都有連續模 $\omega(\delta)$ 与之对应，当 x' 和 x'' 彼此無关地取遍区間 I 上一切可能的值且满足不等式 $|x'-x''|\leqslant\delta$ 时，$\omega(\delta)$ 定义为表达式 $|f(x')-f(x'')|$ 的上确界. 連續模 $\omega(\delta)$ 是 $\delta(\delta>0)$ 的連續不减函数，并具有以下的性質

$$\lim_{\delta\to 0}\omega(\delta)=0. \tag{8}$$

我們将集中注意于在基本区間 I 上并且其連續模 $\omega(\delta)$ 满足不等式

$$\omega(\delta)\leqslant\omega^*(\delta) \tag{9}$$

的一致連續函数，其中 $\omega^*(\delta)$ 是 δ 的已知的固定函数 $(\delta>0,\ \omega^*(\delta)>0)$；所有这些函

数构成一类，而为 I 上一致連續函数类的子类．我們要特别提出下列的重要情况：

1. $\omega^*(\delta)=K\delta$，其中 K 是适当选取的正数．所得到的不等式

$$\omega(\delta)\leqslant K\delta \tag{10}$$

称为里卜希兹条件．特别是在函数 $f(x)$ 在区間 I 上有导数，而这导数的絕对值又不超过 K 时，这条件就能成立．

2. 不等式

$$\omega(\delta)\leqslant K\delta^{\alpha} \qquad (0<\alpha<1;\ K>0) \tag{11}$$

是广义的 α 級的里卜希兹条件．α 愈小时满足不等式（11）的函数类就愈寬．这里含有一切具有有界导数的函数（它們也满足普通里卜希兹条件），但在这类中也可能有这样情况，即

$$\lim_{h\to 0}\left|\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\right|=\infty。 \tag{12}$$

3. 关系式

$$\lim_{\delta\to 0}\omega(\delta)\lg\frac{1}{\delta}=0 \tag{13}$$

称为狄尼条件．它定义出連續函数中極广的一类，它包含了满足任意級广义里卜希兹条件的函数类．

在基本区間上可微分的函数类比連續函数类較窄．这是由于函数 $f(x)$ 若不在某点連續就不能在那点有导数

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}, \tag{14}$$

而在一点上为連續的函数，在該点也可能沒有导数存在．

如果需要所考慮的函数的导数是連續的或者满足某級的里卜希兹条件等等，就会得到更窄的函数类．如果在基本区間（有限閉区間）上导数連續，則函数满足 1 級里卜希兹条件．还可以假設二級导数、三級导数等等存在，也可在所設最后級的导数上附加一些补充条件．

現在設想無限可微分的函数类，即是具有一切級导数的函数类．各級导数均連續，且在有限閉区間上满足 1 級里卜希兹条件；因为这时它是有界的，故在某点处达到最大模 M_n：

$$M_n=\max|f^{(n)}(x)|.$$

由于各級导数存在，对于基本区間中任意点 x_0，可以写出泰乐級数的形式展开式

$$f(x)\sim f(x_0)+\sum_{m=1}^{\infty}f^{(m)}(x_0)\frac{(x-x_0)^m}{m!}. \tag{15}$$