工科研究生教材

工程矩阵分析

吴海容　倪筱颖　编著

黑龙江科学技术出版社

工 科 研 究 生 教 材

工 程 矩 阵 分 析

吴海[illegible]　倪[illegible]禄　编著

黑龙江科学技术出版社

（黑）新登字第2号

内 容 简 介

全书包括三部分。第一部分是基础知识，特征值问题和约当标准形。第二部分是矩阵分析，包括矩阵的各种微分，向量和矩阵的范数及其应用。第三部分是矩阵函数，矩阵方程（包括各种线性矩阵方程和矩阵 Ricatti 方程）和广义逆矩阵。本书的特点是，从工程应用观点出发选材，既有基本理论的系统阐述，又有工程技术人员关心的许多内容。

本书可作为工科院校研究生教材，也可作为高等学校教师和工程技术人员参考用书。

责任编辑：张丽生

工科研究生教材

工程矩阵分析

吴海容　倪筱颖　编著

黑龙江科学技术出版社出版

（哈尔滨市南岗区建设街35号）

哈尔滨电工学院印刷厂印刷

787×1092毫米　32开本　9.75印张　195千字

1994年9月第1版・1994年9月第1次印刷

印数：1—800册　　定价：8.00元

ISBN7-5388-2636-X/N・129

前　　言

“矩阵分析”是工科研究生的一门必修课程。近年来，虽然国内已经出版了一些这方面的教材，但多偏重于理科内容，或者线性代数部分所占比重较大。对于结合工科，特别是机电类专业所需内容较为欠缺。为此，很需要有一本着重于工程应用观点的教材。

本书是在1984年作者为电类工科研究生所编“线性代数Ⅱ－矩阵理论”讲义的基础上，结合在合肥工业大学和哈尔滨电工学院10多年的教学实践，经过修改、充实，重新编写而成的。本书的特点是，从应用观点出发选材，考虑到现代控制理论的发展和广泛应用，加强了矩阵函数和矩阵方程的内容；编写时力求达到基本概念准确，简明易懂，并能较全面地概括所涉及的主要内容。

本书的第一章到第六章由吴海容教授编写，第七章（广义逆矩阵）由倪筱颖同志编写。书中打＊号的章节为选学内容。全书由谢文翘教授审阅并对书中内容提出了许多宝贵意见，对此作者表示深切的谢意。本书的出版，得到了哈尔滨电工学院领导、研究生处、科研处、印刷厂的大力支持，在此一并表示感谢。

限于作者水平，书中不当之处，欢迎读者批评、指正。

作　　者

1994年7月

目　录

第一章　基础知识

§1　预备知识

1.1　常用符号

记 $\mathbf{R}$ 和 $\mathbf{C}$ 分别为实数全体和复数全体所组成的集合；$\mathbf{R}^n$ 和 $\mathbf{C}^n$ 分别为 n 维实向量和复向量全体所组成的集合；$\mathbf{R}^{m\times n}$ 和 $\mathbf{C}^{m\times n}$ 分别为 $m\times n$ 阶实矩阵和复矩阵全体所组成的集合。

在矩阵运算中，如不加特殊说明，向量 $\mathbf{x}$，$\mathbf{y}$，$\mathbf{a}$，$\mathbf{b}$ 等一般表示列向量，而将对应的行向量记为 $\mathbf{x}^T$，$\mathbf{y}^T$，$\mathbf{a}^T$，$\mathbf{b}^T$ 等。$\mathrm{span}\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2\cdots, \mathbf{x}_l\}$ 指向量 $\mathbf{x}_1$，$\mathbf{x}_2$，…，$\mathbf{x}_l$ 的线性组合全体所组成的集合。

对于正整数 m，符号 $i\in\underline{m}$ 是 $i=1$，2，…，m 的简写。此外，$\exists$ 表示存在；$\forall$ 指对所有情况。

以上这些符号均为通用符号。

1.2　矩阵乘积的行和列

设 $A\in\mathbf{C}^{m\times l}$，$B\in\mathbf{C}^{l\times n}$，我们都能算出乘积矩阵 AB。然而，进一步分析出乘积矩阵 AB 的行和列的形成，常常是有用的。

记 a_{ij} 和 b_{ij} 分别为矩阵 A 和 B 的 (i,j) 元素；记 $\mathbf{c}_i$ 为 AB 的第 i 个行向量，$\mathbf{c}_i$ 由 A 的第 i 行乘 B 而得到

$$AB=\begin{pmatrix}\cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{il}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n}\\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ b_{l1} & b_{l2} & \cdots & b_{ln}\end{pmatrix}$$

$$\mathbf{c}_i=a_{i1}[b_{11}\quad b_{12}\quad\cdots\quad b_{1n}]+a_{i2}[b_{21}\quad b_{22}\quad\cdots\quad b_{2n}]$$
$$+\cdots+a_{il}[b_{l1}\quad b_{l2}\quad\cdots\quad b_{ln}] \tag{1}$$

即乘积矩阵 AB 的第 i 行，是以 A 的第 i 个行向量的各个分量为线性组合系数，所作的 B 的行向量的线性组合。

另一方面，记 $\mathbf{d}_j$ 为 AB 的第 j 个列向量，$\mathbf{d}_j$ 是由 A 乘 B 的第 j 列而得到

$$AB=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1l}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2l}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{ml}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cdots & \cdots & b_{1j} & \cdots\\ \cdots & \cdots & b_{2j} & \cdots\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \cdots & \cdots & b_{lj} & \cdots\end{pmatrix}$$

$$\mathbf{d}_j=b_{1j}\begin{pmatrix}a_{11}\\ a_{21}\\ \vdots\\ a_{m1}\end{pmatrix}+b_{2j}\begin{pmatrix}a_{12}\\ a_{22}\\ \vdots\\ a_{m2}\end{pmatrix}+\cdots+b_{lj}\begin{pmatrix}a_{1l}\\ a_{2l}\\ \vdots\\ a_{ml}\end{pmatrix} \tag{2}$$

即乘积 AB 的第 j 列，是以 B 的第 j 个列向量的各个分量为线性组合系数，所作的 A 的列向量的线性组合。

借助于 AB 的第 j 列 $\mathbf{d}_j$ 的分析，引入以下的形式记法是方便和直观的。例如，实向量 $\mathbf{y}$ 是实向量 $\mathbf{x}_1$，$\mathbf{x}_2$，…，$\mathbf{x}_m$ 的线性组合，相当于 $\exists\,\mathbf{a}\in\mathbf{R}^m$，使

$$\mathbf{y}=[\mathbf{x}_1\quad \mathbf{x}_2\quad\cdots\quad \mathbf{x}_m]\mathbf{a}$$

又如，设复向量 $\mathbf{y}_1$，$\mathbf{y}_2$，…，$\mathbf{y}_l$，$\mathbf{y}_j\in\mathrm{span}\{\mathbf{x}_1,\ \mathbf{x}_2,\ \cdots,\ \mathbf{x}_m\}$，$\mathbf{x}_i$ 为复向量，$i\in\underline{m}$，$j\in\underline{l}$；相当于 $\exists A\in\mathbf{C}^{m\times l}$，使

$$[y_1 \quad y_2 \quad \cdots \quad y_l] = [x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_m]A$$

以后将经常采用这一形式记法。

§2 线性空间，维数，基和坐标

2.1 线性空间的概念

线性空间是线性代数的基本概念之一。粗略地讲，线性空间就是一个定义了加法和数乘的集合，此集合在这两种运算下保持封闭，即集合中的元素经过这两种运算后，仍属于该集合。加法和数乘满足规定的运算规则，数乘中的数，取自一个有和、差、积、商在其上定义的数集，该数集称为数域。下面正式给出其定义。

定义1 数域 设 $\mathbf{F}$ 是包含 0 和 1 在内的数集，如果 $\mathbf{F}$ 中任二数（此二数可相同）的和、差、积、商（除数不为 0）仍是 $\mathbf{F}$ 中的数，则 $\mathbf{F}$ 就称为一个数域。

显然，全体有理数、实数和复数所组成的集合 $\mathbf{Q}$，$\mathbf{R}$ 和 $\mathbf{C}$，都是数域。但是，数域不限于 $\mathbf{Q}$、$\mathbf{R}$ 和 $\mathbf{C}$。本书只涉及实数域 $\mathbf{R}$ 和复数域 $\mathbf{C}$。

定义2 线性空间 设 $\mathbf{V}$ 为一集合，$\mathbf{F}$ 为一数域，在 $\mathbf{V}$ 的元素之间定义了加法，使对任意 $\mathbf{x}$，$\mathbf{y}\in\mathbf{V}$，有 $\mathbf{x}+\mathbf{y}\in\mathbf{V}$；在 $\mathbf{V}$ 与 $\mathbf{F}$ 之间定义了数乘，使对任意 $\mathbf{x}\in\mathbf{V}$ 和 $\alpha\in\mathbf{F}$，有 $\alpha\mathbf{x}\in\mathbf{V}$；并且加法和数乘满足下列规则，则称 $\mathbf{V}$ 是数域 $\mathbf{F}$ 上的线性空间。

加法满足以下四条规则：

（1）加法交换律

$$\mathbf{x}+\mathbf{y}=\mathbf{y}+\mathbf{x} \qquad \forall \mathbf{x},\mathbf{y}\in\mathbf{V}$$

（2）加法结合律

$$(\mathbf{x}+\mathbf{y})+\mathbf{z}=\mathbf{x}+(\mathbf{y}+\mathbf{z}) \qquad \forall \mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}\in \mathbf{V}$$

（3）有唯一的零元素 $\mathbf{0}\in\mathbf{V}$，使

$$\mathbf{x}+\mathbf{0}=\mathbf{x} \qquad \forall \mathbf{x}\in\mathbf{V}$$

（4）对任何 $\mathbf{x}\in\mathbf{V}$，在 $\mathbf{V}$ 中存在一负元 $-\mathbf{x}$，使

$$\mathbf{x}+(-\mathbf{x})=\mathbf{0}$$

数乘满足以下两条规则：

（5）数 1 和数 0 的数乘

$$1\mathbf{x}=\mathbf{x}, \qquad 0\mathbf{x}=\mathbf{0} \qquad \forall \mathbf{x}\in\mathbf{V}$$

（6）数乘结合律

$$\alpha(\beta\mathbf{x})=(\alpha\beta)\mathbf{x} \qquad \forall \alpha,\beta\in\mathbf{F},\ \forall \mathbf{x}\in\mathbf{V}$$

加法与数乘之间满足以下规则：

（7）分配律

$$\alpha(\mathbf{x}+\mathbf{y})=\alpha\mathbf{x}+\alpha\mathbf{y} \qquad \forall \alpha\in\mathbf{F}, \qquad \forall \mathbf{x},\mathbf{y}\in\mathbf{V}$$

$$(\alpha+\beta)\mathbf{x}=\alpha\mathbf{x}+\beta\mathbf{x} \qquad \forall \alpha,\beta\in\mathbf{F},\ \forall \mathbf{x}\in\mathbf{V}$$

有时为了强调数域，而将线性空间 $\mathbf{V}$ 记为 $\mathbf{V}(\mathbf{F})$。当数域 $\mathbf{F}$ 取为 $\mathbf{R}$ 和 $\mathbf{C}$ 时，分别称 $\mathbf{V}$ 为实和复线性空间。

容易验证，在向量的加法和数乘的定义下，$\mathbf{R}^n$ 是实线性空间，$\mathbf{C}^n$ 是复线性空间。实际上应当认为，一般的线性空间概念是 $\mathbf{R}^n$ 和 $\mathbf{C}^n$ 的抽象或推广，故常称线性空间为向量空间，而将线性空间中的元素称为向量。作为特例，$\mathbf{R}$ 和 $\mathbf{C}$ 本身分别是实和复线性空间，但此时加法和数乘已退化为数之间的加法和乘法；许多其他类型的加法和数乘定义，实际上也都归结为相应实数间或复数间的加法和乘法。此时运算规则自然满足，非常易于验证，而关键是对加法和数乘是否满足封闭性的检验。例如，$\mathbf{R}^{m\times n}$ 和 $\mathbf{C}^{m\times n}$ 对于矩阵的加法和数

乘，分别构成实和复线性空间的检验，以及$[a,b]$上连续实函数全体的集合$C[a,b]$对于函数的加法和数乘构成实线性空间的检验，都属此情况。但是对于比较独特方式定义的加法和数乘，运算规则的逐条验证，有时要稍费周折（例如习题中的第 8 题）。

例1 检验 n 阶实对称矩阵全体 RS 所组成的集合，对矩阵的加法和数乘是否构成实线性空间。

解 记 $\mathbf{RS}=\{A \mid A\in\mathbf{R}^{n\times n},\ A=A^T\}$。设 A，B，$C\in\mathbf{RS}$，α，$\beta\in\mathbf{R}$，并记 $A=[a_{ij}]$，$B=[b_{ij}]$，$C=[c_{ij}]$；

$$\because\quad (A+B)^T=A^T+B^T=A+B,$$
$$(\alpha A)^T=\alpha A^T=\alpha A$$

所以 RS 对矩阵的加法和数乘满足封闭性，

$$A+B=[a_{ij}+b_{ij}]=[b_{ij}+a_{ij}]=B+A$$
$$(A+B)+C=[a_{ij}+b_{ij}]+[c_{ij}]=[(a_{ij}+b_{ij})+c_{ij}]$$
$$=[a_{ij}+(b_{ij}+c_{ij})]=A+(B+C)$$

显然，n 阶零矩阵 $[0]_{n\times n}\in\mathbf{RS}$，且

$$A+[0]_{n\times n}=A,$$

故 $[0]_{n\times n}$ 是 RS 中的零元。此外，$(-A)^T=-A^T=-A$，所以 $-A\in\mathbf{RS}$，且

$$(-A)+A=[(-a_{ij})+a_{ij}]=[0]_{n\times n}$$

故 $-A$ 是 A 的负元。另外，

$$1\cdot A=[1\cdot a_{ij}]=[a_{ij}]=A$$
$$0\cdot A=[0\cdot a_{ij}]=[0]_{n\times n}$$
$$\alpha(\beta A)=\alpha[\beta a_{ij}]=[(\alpha\beta)a_{ij}]=(\alpha\beta)A$$
$$\alpha(A+B)=[\alpha(a_{ij}+b_{ij})]=[\alpha a_{ij}]+[\alpha b_{ij}]=\alpha A+\alpha B$$
$$(\alpha+\beta)A=[(\alpha+\beta)a_{ij}]=[\alpha a_{ij}]+[\beta a_{ij}]=\alpha A+\beta A$$

即七条运算规则都满足，因此 **RS** 是实线性空间。

注意，如果加法与数乘的封闭性之一不满足，或者运算规则中的任何一条不满足，则不构成线性空间。例如，次数等于 $n(n\geqslant 1)$ 的实系数多项式全体所组成的集合，对于多项式的加法和数乘不构成线性空间，因为该集合对加法不满足封闭性；而次数不超过 n 的实系数多项式全体加上零多项式所组成的集合，则构成线性空间。

实的齐次线性方程 $L\mathbf{x}=\mathbf{0}$（微分方程或线性代数方程组）的解全体所组成的集合，对于函数或向量的加法和数乘构成实线性空间，称为该方程的解空间；但相应的非齐次线性方程 $L\mathbf{x}=\mathbf{f}$ 的解全体所组成的集合，就不构成线性空间。

2.2 线性子空间

定义3 线性子空间 线性空间 **V** 的非空子集 **W**，如果对 **V** 的加法与数乘也构成线性空间，则称 **W** 为 **V** 的一个线性子空间，简称 **W** 为 **V** 的子空间。

为验证子集 **W** 是 **V** 的子空间，只需验证它对加法与数乘自封闭。

这里要指出：

（1）零元 **0** 是所有子空间的公共元，故知不含零元 **0** 的子集不是子空间。

（2）子空间与原线性空间除了加法与数乘的定义一致外，数域也要一致。

（3）$\{\mathbf{0}\}$ 与 **V** 是 **V** 的平凡子空间。

命题1 设 $\mathbf{x}_1$，$\mathbf{x}_2$，…，$\mathbf{x}_r$ 是线性空间 $\mathbf{V}(\mathbf{F})$ 的一个向量组，则

$$\operatorname{span}\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \cdots, \mathbf{x}_r\}$$
$$\triangleq\left\{\mathbf{y} \;\middle|\; \mathbf{y}=\sum_{i=1}^{r} \alpha_i \mathbf{x}_i, \ \alpha_i \in \mathbf{F}, \ i \in \underline{r}\right\} \tag{3}$$

是 $\mathbf{V}(\mathbf{F})$ 的一个子空间。

证明 显然，$\operatorname{span}\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \cdots, \mathbf{x}_r\}$ 是 $\mathbf{V}(\mathbf{F})$ 的子集。

任取 $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2 \in \operatorname{span}\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \cdots, \mathbf{x}_r\}$，记 $\mathbf{y}_1=\sum\limits_{i=1}^{r} \alpha_i x_i$，

$\mathbf{y}_2=\sum\limits_{i=1}^{r} \beta_i x_i$，$\alpha_i, \beta_i \in \mathbf{F}$，$i \in \underline{r}$，则

$$\mathbf{y}_1+\mathbf{y}_2=\sum_{i=1}^{r}(\alpha_i+\beta_i) x_i, \ (\alpha_i+\beta_i) \in \mathbf{F}, \ i \in \underline{r}$$

即

$$\mathbf{y}_1+\mathbf{y}_2 \in \operatorname{span}\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \cdots, \mathbf{x}_r\}$$

任取 $k \in \mathbf{F}$，则

$$k \mathbf{y}_1=\sum_{i=1}^{r}(k \alpha_i) x_i, \quad (k \alpha_i) \in \mathbf{F}, \quad i \in \underline{r}$$

即

$$k \mathbf{y}_1 \in \operatorname{span}\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \cdots, \mathbf{x}_r\}$$

因此 $\operatorname{span}\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \cdots, \mathbf{x}_r\}$ 对 $\mathbf{V}(\mathbf{F})$ 的加法和数乘自封闭，故它是 $\mathbf{V}(\mathbf{F})$ 的一个子空间。

通常称 $\operatorname{span}\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \cdots, \mathbf{x}_r\}$ 是由 $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \cdots, \mathbf{x}_r$ 生成的子空间，这个子空间以后会经常遇到。

命题2 设 $A \in \mathbf{C}^{m \times n}$，则

$$R(A) \triangleq\{\mathbf{y} \mid \mathbf{y}=A \mathbf{x}, \ \mathbf{x} \in \mathbf{C}^n\} \tag{4}$$

是 $\mathbf{C}^m$ 的子空间；

$$N(A) \triangleq \{\mathbf{x} \mid A\mathbf{x} = \mathbf{0}\} \tag{5}$$

是 $\mathbf{C}^n$ 的子空间。

证明 显然，$R(A)$ 是 $\mathbf{C}^m$ 的子集。

任取 $\mathbf{y}_1$，$\mathbf{y}_2 \in R(A)$，则必存在 $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathbf{C}^n$，使 $\mathbf{y}_1 = A\mathbf{x}_1$，$\mathbf{y}_2 = A\mathbf{x}_2$；于是

$$\mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2 = A(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2), \qquad \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 \in \mathbf{C}^n$$

即

$$\mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2 \in R(A)$$

任取 $k \in \mathbf{C}$，则

$$k\mathbf{y}_1 = k(A\mathbf{x}_1) = A(k\mathbf{x}_1), \qquad k\mathbf{x}_1 \in \mathbf{C}^n$$

即

$$k\mathbf{y}_1 \in R(A)$$

因此 $R(A)$ 对 $\mathbf{C}^m$ 的加法和数乘自封闭，故 $R(A)$ 是 $\mathbf{C}^m$ 的一个子空间。

通常称 $R(A)$ 为矩阵 A 的值域，或 A 的象；$R(A)$ 也常记为 $\mathrm{Ima}A$ 。

类似地，由于 $N(A)$ 是 $\mathbf{C}^n$的子集，仿照上述做法可以证明，$N(A)$ 对于 $\mathbf{C}^n$ 的加法和数乘自封闭，故 $N(A)$ 是 $\mathbf{C}^n$ 的一个子空间。通常称 $N(A)$ 为矩阵 A 的零空间或 A 的核，$N(A)$ 也常记为 $\mathrm{Ker}A$ 。

$R(A)$ 和 $N(A)$ 是两个非常重要的子空间。

2.3 维数，基和坐标的概念

定义4 维数 若线性空间 $\mathbf{V}(\mathbf{F})$ 中存在 n 个线性无关的向量，而任何 $n+1$ 个向量都线性相关，则称 $\mathbf{V}$ 的维数为 n，记为

$$\dim \mathbf{V} = n$$

若对任何正整数 m，在 $\mathbf{V}$ 中都有 m 个向量线性无关，则称 $\mathbf{V}$ 为无穷维空间，记为 $\dim \mathbf{V} = +\infty$。

例如，$\dim \mathbf{C}^n = n$，$\dim \mathbf{R}^n = n$，$\dim(C[a, b]) = +\infty$。

由定义 4 可知，$\dim\{\mathbf{0}\} = 0$。

记 $\dim N(A)$ 为 $\mathrm{null}(A)$，称为矩阵 A 的零度。

线性代数主要讨论有限维空间。

定义5　基的三个等价定义　设 $\mathbf{V}(\mathbf{F})$ 为一线性空间，则基的定义可由下述三种等价方式之一给出：

（1）若向量组 $\mathbf{x}_1$，$\mathbf{x}_2$，…，$\mathbf{x}_r$ 本身是线性无关组，且任何 $\mathbf{x} \in \mathbf{V}(\mathbf{F})$ 均可由其线性、唯一表出，则称它是 $\mathbf{V}(\mathbf{F})$ 的一组基。

（2）若向量组 $\mathbf{x}_1$，$\mathbf{x}_2$，…，$\mathbf{x}_r$ 本身是线性无关组，且 $\mathrm{span}\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \cdots, \mathbf{x}_r\} = \mathbf{V}$，则称它是 $\mathbf{V}(\mathbf{F})$ 的一组基。

（3）若 $\dim \mathbf{V} = r$，则 $\mathbf{V}(\mathbf{F})$ 中任意 r 个线性无关向量 $\mathbf{x}_1$，$\mathbf{x}_2$，…，$\mathbf{x}_r$ 组成的向量组，称为 $\mathbf{V}(\mathbf{F})$ 的一组基。

由定义 5 可知，基不唯一；基的个数就是空间的维数。实际上线性空间的维数与基常常是同时得到的。

定义6　向量的坐标　设 $\boldsymbol{\varepsilon}_1$，$\boldsymbol{\varepsilon}_2$，…，$\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 是 n 维线性空间 $\mathbf{V}(\mathbf{F})$ 的一组基，则任何 $\mathbf{x} \in \mathbf{V}(\mathbf{F})$ 可唯一表示为

$$\mathbf{x} = x_1\boldsymbol{\varepsilon}_1 + x_2\boldsymbol{\varepsilon}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{\varepsilon}_n \qquad x_i \in \mathbf{F},\ i \in \underline{n}$$

在基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1$，$\boldsymbol{\varepsilon}_2$，…，$\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 取定的前提下，各个系数 x_i 由向量 $\mathbf{x}$ 唯一确定，这组系数就称为 $\mathbf{x}$ 在基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1$，$\boldsymbol{\varepsilon}_2$，…，$\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 下的坐标，记为 $[x_1\ x_2\ \cdots\ x_n]^T$。

例2　求 $\mathbf{R}^{2\times 3}$ 的维数，写出它的一组基，并求 $A=$

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & -1 & 4 \end{bmatrix}$在这组基下的坐标。

解 记 E_{ij} 为 (i,j) 元素为 1，其余元素为 0 的 2×3 矩阵，例如 $E_{13}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$，$E_{22}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$，则

E_{11}，E_{12}，E_{13}，E_{21}，E_{22}，E_{23} 为 $\mathbf{R}^{2\times3}$ 的一组基，而 $\mathbf{R}^{2\times3}$ 是 6 维线性空间，

$$A=1\cdot E_{11}+0\cdot E_{12}+(-3)\cdot E_{13}+2\cdot E_{21}+(-1)\cdot E_{22}+4\cdot E_{23}$$

所以 A 在这组基下的坐标为 $[1\ \ 0\ \ -3\ \ 2\ \ -1\ \ 4]^T$。

2.4 基变换与坐标变换

基之间的过渡矩阵 设 n 维线性空间 $\mathbf{V}$ 有两组基，旧基为 $\boldsymbol{\varepsilon}_1$，$\boldsymbol{\varepsilon}_2$，…，$\boldsymbol{\varepsilon}_n$，新基为 $\boldsymbol{\varepsilon}_1'$，$\boldsymbol{\varepsilon}_2'$，…，$\boldsymbol{\varepsilon}_n'$。把新基在旧基下的坐标写成列向量，并依次排成矩阵 A，有

$$[\boldsymbol{\varepsilon}_1'\ \ \boldsymbol{\varepsilon}_2'\ \ \cdots\ \ \boldsymbol{\varepsilon}_n']=[\boldsymbol{\varepsilon}_1\ \ \boldsymbol{\varepsilon}_2\ \ \cdots\ \ \boldsymbol{\varepsilon}_n]A \tag{6}$$

A 就称为由基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1$，$\boldsymbol{\varepsilon}_2$，…，$\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 到基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1'$，$\boldsymbol{\varepsilon}_2'$，…，$\boldsymbol{\varepsilon}_n'$ 的过渡矩阵。式（6）亦可以写成

$$[\boldsymbol{\varepsilon}_1'\ \ \boldsymbol{\varepsilon}_2'\ \ \cdots\ \ \boldsymbol{\varepsilon}_n']=[\boldsymbol{\varepsilon}_1\ \ \boldsymbol{\varepsilon}_2\ \ \cdots\ \ \boldsymbol{\varepsilon}_n]\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \tag{7}$$

或