

北 京 大 学 教 材

电 子 光 学 基 础

陈文雄 西门纪业 编著

北 京 大 学 出 版 社

内 容 简 介

本书系统地讲述电子光学的基本理论，同时力求反映电子光学的某些最新发展。全书从讨论旋转对称的静电场和静磁场的基本性质开始，运用变分原理导出静场中带电粒子的普遍的相对论轨迹方程，进而阐述高斯电子光学和象差理论，其中包括渐近象差理论。在此基础上讨论静电透镜和磁透镜的分类、性质、设计和应用，介绍了一种新型磁透镜——Mulvey的单极靴透镜。本书还讲述了非旋转对称系统，特别是四极透镜组合和电磁多极系统的理论。最后讨论电子光学系统的计算机辅助设计，介绍了有限差分法、有限单元法、傅里叶分析法以及计算电子轨迹的各种具有实用价值的方法。

本书可作为高等学校电子光学课程的教材，也可供研究生、教师和有关科技工作者参考。

电 子 光 学 基 础

陈文雄 西门纪业 编著

责任编辑：李采华

*

北京大学出版社出版

(北京大学校内)

隆昌印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

850×1168毫米 32开本 11印张 250千字

1986年11月第一版 1986年11月第一次印刷

印数：00001—4,000册

统一书号：13209·133 定价：2.30元

目 录

第一章 旋转对称的静电场和静磁场	1
§ 1 静场的基本方程	1
§ 2 旋转对称静电场	3
一、旋转对称静电场的级数表示式	3
二、旋转对称静电场的积分表示式	6
三、旋转对称静电场的等位面的性质	8
四、旋转对称静电场的力管的性质	12
§ 3 旋转对称静磁场	15
一、旋转对称静磁场的矢位和流函数	15
二、旋转对称静磁场的级数表示式	19
三、旋转对称静磁场的标位	21
四、旋转对称静磁场的积分表示式	22
五、存在微介质时的静磁场	23
§ 4 用解析方法决定旋转对称静电场	26
一、选择曲线坐标系求解圆孔单光侧问题	27
二、用分离变量法求解等径双圆筒静电系统的电位分布	31
三、用分离变量法求解具有不饱和铁壳(或极靴)的励磁线圈绕组(磁透镜)的磁场分布	34
§ 5 旋转对称静电场和静磁场的实验测量	38
一、电解槽模拟法	38
二、电阻网模拟法	43
三、磁场的直接测量	49
第二章 静场中带电粒子的轨迹	53
§ 1 费马原理和最小作用原理	53
一、费马原理	53
二、哈密顿原理	54
三、最小作用原理	56
§ 2 电子光学折射率	58

一、电子光学折射率的表示式	58
二、规范化电位	59
三、电子光学折射率的一些性质	80
§ 3 轨迹方程	80
一、自然坐标系中的轨迹方程	61
二、固定坐标系中的轨迹方程	63
三、直角坐标系中普遍的轨迹方程	65
四、圆柱坐标系中普遍的轨迹方程	86
§ 4 旋转对称静场中的角动量守恒定理	67
§ 5 轨迹的曲率·相似性和可逆性	69
一、轨迹的曲率	69
二、轨迹的相似性	72
三、轨迹的可逆性	75
第三章 高斯电子光学	77
§ 1 旋转对称静场中的高斯轨迹方程	77
一、傍轴区、傍轴条件和傍轴轨迹	77
二、高斯轨迹方程	78
三、筒正形式的高斯轨迹方程	83
§ 2 理想成象理论	83
一、理想成象	83
二、角放大率·拉格朗日-亥姆霍兹关系	86
三、象的旋转	87
§ 3 电子透镜的基点	89
一、实在基点元素(real cardinal elements)	90
二、密切基点元素(osculating cardinal elements)	94
三、渐近基点元素(asymptotic cardinal elements)	96
§ 4 Glaser钟形磁场的分析	99
一、高斯轨迹方程的解	100
二、钟形磁场的密切基点元素	101
三、钟形磁场的渐近基点元素	106
第四章 象差理论	110
§ 1 实在三级几何象差	111
一、球差·谢尔赤原理	113

二、彗形差	122
三、场曲和象散·贝兹伐尔定律	123
四、畸变	130
§2 渐近三级几何象差	132
一、渐近几何象差的概念	132
二、三级渐近几何象差的普遍公式	133
三、三级渐近几何象差系数	140
§3 色差	147
一、实在色差·谢尔赤原理	148
二、渐近色差	153
§4 机械象差	155
一、轴上象散	159
二、象的畸变	161
§5 衍射象差和理论分辨率	162
一、衍射象差	162
二、球差和衍射所决定的理论分辨率	163
三、轴上象散和衍射所决定的理论分辨率	164
四、色差和衍射所决定的理论分辨率	165
第五章 静电透镜	166
§1 静电透镜的分类	166
一、静电透镜分类的基础	166
二、短透镜	168
§2 单电位透镜	170
一、单电位透镜的型式及一般性质	170
二、三光阑组成的单电位透镜的光学性质	173
§3 单光阑透镜和浸没透镜	178
一、单光阑透镜	178
二、浸没透镜	179
§4 浸没物镜(阴极透镜)	182
一、发射式电子显微镜	182
二、电子枪	185
三、变象管	188
第六章 磁透镜	192

§ 1 无铁磁透镜	192
§ 2 磁透镜的磁路	193
一、磁透镜的结构·磁路	195
二、极靴处于不同磁饱和程度时轴上磁感应强度分布的变化	196
三、磁路的设计	198
四、轴上磁感应强度分布	202
五、激励磁透镜场需要的功率	204
§ 3 磁透镜的电子光学性质	205
一、表征磁透镜极靴形状、激励和电子光学性质的参数	205
二、通用曲线	206
三、当 D/S 趋于零时磁透镜的电子光学性质	208
四、对称磁透镜的电子光学性质	209
五、不对称磁透镜的电子光学性质	214
六、弱(短)磁透镜的电子光学性质	218
§ 4 磁透镜的分辨率·设计实例	220
一、电子显微镜的物镜	220
二、电子显微镜的投影镜	221
三、设计实例	222
§ 5 新型磁透镜——单极靴透镜	223
一、单极靴透镜的结构	224
二、磁化球模型	225
三、单极靴透镜的实际结构·例	227
第七章 非旋转对称系统的电子光学	230
§ 1 静电偏转系统	230
一、基本公式和基本问题	230
二、静电偏转板的设计计算	231
三、偏转后加速(PDA)系统	234
四、静电偏转系统的象差	236
§ 2 磁偏转系统	244
一、基本公式和基本问题	244
二、磁偏转线圈的设计计算	245
三、磁偏转系统的象差	254
§ 3 具有两个对称面的系统·四极透镜	255
一、四极透镜的电位分布	255

二、高斯轨迹方程	259
三、轨迹方程的解·基点元素	260
四、四极透镜组	263
§4 电磁多极系统	270
一、圆柱坐标系中电位和磁标位的普遍表示式	270
二、电磁多极场的分析和计算	273
第八章 电子光学系统的计算机辅助设计	276
§1 静电透镜的计算机辅助设计	276
一、静电场的计算·有限差分法	277
二、静电场中电子运动方程的求解	291
三、傍轴电子轨迹方程的求解	298
四、静电透镜电子光学性质的计算	299
五、用实际轨迹计算静电透镜的电子光学性质	302
§2 磁透镜的设计	308
一、用有限单元法计算不饱和磁透镜的磁场分布	309
二、用有限单元法计算饱和磁透镜的磁场分布	318
三、磁透镜电子光学性质的计算	322
四、例	323
§3 电磁多极系统的设计	326
一、多极场的傅里叶展开·谐波方程式	326
二、边界条件	326
三、逐次张弛法	329
四、等位线和力线的描绘	329
五、例	330
参考资料	335

第一章 旋转对称的静电场和静磁场

§ 1 静场的基本方程

为了对电子光学系统的性质作详细的研究，首先必须获知电子光学系统的电场和磁场的具体分布。例如，在静电电子光学系统中，若能获知其电位分布（即等位面的形状及其分布），就可以求出折射率的分布（即折射面的形状及其分布），从而能够决定该系统的聚焦和成象的性质。对于任何电子光学系统的理论研究或实验工作，都必须从确定该系统的电场和磁场的分布开始。因此，确定电场和磁场的分布是研究电子光学时首先面临的一个课题。

大家知道，确定电场和磁场分布的问题涉及到电磁学，它们可以归结为求解电磁场所满足的偏微分方程的边值问题。通常只有在少数比较简单的情形下，才能用数学物理的方法把电场或磁场的分布表示成有限的解析形式；而在大多数情形下，则必须借助于数值计算和实验方法。在本章中，我们将讨论电子光学中的静电场和静磁场的一般性质，并介绍确定电场和磁场分布的各种方法。

在本书中，对于所讨论的电磁场的性质有以下几个基本假定：

1. 静场，即所讨论的电磁场都是不随时间变化的场；
2. 真空中的场；
3. 场中没有自由空间电荷或空间电流分布。换句话说，我们将忽略电子束本身的空间电荷和空间电流的影响。

电子光学中的静电场是利用若干一定形状的电极加上直流电压形成的。例如，具有旋转对称分布的静电场是由若干具有旋转对称形状的电极加以一定的直流电压所产生的。电子光学中的静

磁场则是由恒定电流系统所产生的。例如，具有旋转对称分布的静磁场是由具有一定横截面的圆形线圈绕组通以恒定电流所产生的，这种线圈绕组还可以带有铁磁体的外壳或极靴。

我们知道，真空中的静电场和静磁场的麦克斯韦方程组为

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0, \quad (1.1.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho / \epsilon_0, \quad (1.1.2)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}, \quad (1.1.3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (1.1.4)$$

其中 $\mathbf{E}$ 是电场强度， $\mathbf{B}$ 是磁感应强度， ρ 和 $\mathbf{J}$ 分别是自由空间电荷和自由空间电流密度， ϵ_0 和 μ_0 分别为真空中的介电常数和磁导率。本书中我们采用了国际单位制（SI制）。

根据上述第三个假定，我们忽略电子束本身的空间电荷与空间电流分布，即 ρ 和 $\mathbf{J}$ 可认为是零。于是方程（1.1.2）和（1.1.3）成为

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0, \quad (1.1.5)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = 0. \quad (1.1.6)$$

从方程（1.1.1）、（1.1.4）、（1.1.5）、（1.1.6）可以看出，静电场和静磁场是互相独立的，因此可以分别加以讨论。

首先讨论静电场。（1.1.1）式表明，静电场是无旋的，因此可以引入电位 φ 来描写它。电场强度 $\mathbf{E}$ 和电位 φ 的关系由下式给出：

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi. \quad (1.1.7)$$

这里 φ 可以确定到一个任意可加常数。把（1.1.7）式代入（1.1.5）式，我们得到

$$\nabla^2\varphi = 0. \quad (1.1.8)$$

因此，没有空间电荷的静电场是无源、无旋的，而且电位满足拉普拉斯方程。

其次我们来看静磁场。（1.1.4）式表明，静磁场是无源的，因此可以引入矢位 $\mathbf{A}$ 来描写它。磁感应强度 $\mathbf{B}$ 和磁矢位 $\mathbf{A}$ 的关系

由下式给出:

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}. \quad (1.1.9)$$

这里 $\mathbf{A}$ 只有其无源场部分是确定的, 而其无旋场部分可以任取。也就是说, $\mathbf{A}$ 可以确定到一个任意函数的梯度。通常我们令 $\mathbf{A}$ 的无旋场部分为零, 亦即令 $\mathbf{A}$ 满足下面的规范条件:

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0. \quad (1.1.10)$$

把 (1.1.9) 式代入 (1.1.6) 式, 我们得到

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = 0.$$

通过矢量分析运算把上式展开后, 考虑到条件 (1.1.10), 不难得到

$$\nabla^2 \mathbf{A} = 0. \quad (1.1.11)$$

因此没有自由空间电流的静磁场也是无源、无旋的, 而且矢量 $\mathbf{A}$ 满足二阶偏微分方程 (1.1.11)。

在几何光学中, 通常利用合轴的旋转对称系统作为成像系统。与此相似, 在电子光学中, 通常也是利用旋转对称的电磁场作为电子射线的成像系统。下面我们将详细讨论旋转对称的静电场和静磁场。

§ 2 旋转对称静电场

一、旋转对称静电场的级数表示式

在旋转对称静电场的情形下, 我们选择圆柱坐标系 (r, θ, z) , 并使 z 轴和旋转对称轴重合。在圆柱坐标系中, 拉普拉斯方程 (1.1.8) 可以写成

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} = 0.$$

由于旋转对称性, 电位 φ 与 θ 无关, 故上式简化为

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) = 0,$$

或

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} = 0. \quad (1.2.1)$$

同样由于旋转对称性，在同一个子午面($r-z$)内看来， φ 是 r 的偶函数，即

$$\varphi(r, z) = \varphi(-r, z).$$

大家知道，在无点电荷、面电荷和偶电层的区域内，电位函数 $\varphi(r, z)$ 没有奇异性，因此可以展成 r 的幂级数

$$\varphi(r, z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z) r^{2k} \quad (1.2.2)$$

在这里我们已利用了 φ 是 r 的偶函数的条件，因此展开式中只含有 r 的偶次幂项。由(1.2.2)式可以得出

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k''(z) r^{2k}$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} = \sum_{k=1}^{\infty} 2k(2k-1) a_k(z) r^{2k-2},$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} = \sum_{k=1}^{\infty} 2k a_k(z) r^{2k-2}.$$

把上面三式代入(1.2.1)式，不难看出 r^{2k-2} 项的系数应满足下面的方程：

$$a_{k-1}''(z) + 2k a_k(z) + 2k(2k-1) a_k(z) = 0,$$

即

$$a_{k-1}''(z) + (2k)^2 a_k(z) = 0.$$

于是可以得到递推关系：

$$a_k(z) = (-1) \frac{1}{(2k)^2} a_{k-1}''(z), \quad k=1, 2, \dots \quad (1.2.3)$$

以上各式中的撇号表示对 z 的微商。

电位函数展开式(1.2.2)中的系数 $a_k(z)$ 将由一定的边界条件来决定。假定对称轴上的电位分布为 $V(z)$ ，则在(1.2.2)式中令 $r=0$ 即可得出

$$\varphi(0, z) = a_0(z) = V(z). \quad (1.2.4)$$

因此，我们可以利用轴上的电位分布 $V(z)$ 作为边界条件。事实

上利用轴上电位分布定出 $a_0(z)$ 后, 从递推关系(1.2.3)可以定出全部的展开系数 $a_k(z)$:

$$\begin{aligned} a_0(z) &= V(z), & a_1(z) &= -\frac{1}{2^2} V''(z), \\ a_2(z) &= \frac{1}{2^2 \cdot 4^2} V^{(4)}(z), & a_3(z) &= -\frac{1}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} V^{(6)}(z), \\ & \dots\dots\dots \end{aligned}$$

对任意的 k 值, $a_k(z)$ 的普遍表示式为

$$a_k(z) = (-1)^k \frac{1}{2^{2k} (k!)^2} V^{(2k)}(z), \quad k=0, 1, 2, \dots, \quad (1.2.5)$$

把上述系数代入(1.2.2)式, 就可以得到电位函数的级数展开式:

$$\varphi(r, z) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{(k!)^2} V^{(2k)}(z) \left(\frac{r}{2}\right)^{2k}. \quad (1.2.6)$$

这个公式表明, 在旋转对称静电场中, 我们可以利用轴上电位分布来表示空间的电位分布. 换句话说, 在旋转对称静电场中, 只要知道轴上电位分布, 就可以唯一地确定空间电位分布. 因此(1.2.6)式是旋转对称静电场的基本公式.

在研究大多数电子光学问题时, 只需取(1.2.6)式的前三项就够了, 即

$$\varphi(r, z) = V(z) - \frac{1}{4} V''(z) r^2 + \frac{1}{64} V^{(4)}(z) r^4 - \dots, \quad (1.2.7)$$

与此对应, 可以求出电场强度的各分量的级数表示式为

$$E_r(r, z) = -\frac{\partial \varphi}{\partial r} = -\frac{1}{2} V''(z) r - \frac{1}{16} V^{(4)}(z) r^3 + \dots, \quad (1.2.8)$$

$$E_z(r, z) = -\frac{\partial \varphi}{\partial z} = -V'(z) + \frac{1}{4} V'''(z) r^2 - \dots, \quad (1.2.9)$$

$$E_{\theta}(r, z) = -\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = 0. \quad (1.2.10)$$

由此可见，在旋转对称静电场中， E_r 是 r 的奇函数，在轴上其值为零；而 E_z 则是 r 的偶函数。

级数展开式(1.2.6)的收敛半径不超过从轴上某点到离该点最近的奇异点的距离。所谓奇异点，即指有点电荷、面电荷或偶电层之处。在点电荷处电位将趋于无穷，即电位不连续；在面电荷处电场强度沿该面的法向分量不连续；在偶电层处电位分布不连续。

利用(1.2.6)式可以很方便地从轴上电位分布求出空间的电位分布。但是实际上只有在对称轴附近的一个小范围内，级数才较快地收敛，从而只需取其前几项就足以定出空间的电位分布。对于离轴较远的区域，由于 r 较大，级数收敛颇慢，这时必须取级数中较多的项，因此用级数展开式就显得不方便了。由于这个原因，下面我们将介绍旋转对称静电场的另一种表示式，即积分表示式。

二、旋转对称静电场的积分表示式

我们要证明，当已知旋转对称静电场的轴上电位分布 $V(z)$ 时，空间电位分布 $\varphi(r, z)$ 可以用下面的积分公式表示：

$$\varphi(r, z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} V(z + ir \sin \alpha) d\alpha. \quad (1.2.11)$$

在上式中我们把轴上电位分布 $V(z)$ 中的实变数 z 换成了复变数 $(z + ir \sin \alpha)$ 。这里 z 和 r 即为圆柱坐标，而 α 是和 z, r 无关的积分变量。

证明可以分成两款：第一要证明(1.2.11)式表示的函数 $\varphi(r, z)$ 满足圆柱坐标系中的拉普拉斯方程(1.2.1)；第二要证明当 $r=0$ 时 $\varphi(r, z)$ 正好等于轴上电位分布 $V(z)$ 。

首先证明第一款。为此求出以下各个偏微商：

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} V''(z + ir \sin \alpha) d\alpha,$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{i \sin \alpha}{r} V'(z + ir \sin \alpha) d\alpha,$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin^2 \alpha V''(z + ir \sin \alpha) d\alpha.$$

这里撇号是对复变数 $(z + ir \sin \alpha)$ 求微商。将上面三式相加可得

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[V''(z + ir \sin \alpha)(1 - \sin^2 \alpha) \right. \\ & \quad \left. + \frac{i}{r} V'(z + ir \sin \alpha) \sin \alpha \right] d\alpha \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[V''(z + ir \sin \alpha) \cos^2 \alpha \right. \\ & \quad \left. - \frac{i}{r} V'(z + ir \sin \alpha) \frac{d \cos \alpha}{d \alpha} \right] d\alpha \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[\frac{-i}{r} V'(z + ir \sin \alpha) \cos \alpha \right] \Big|_{\alpha=0}^{\alpha=2\pi} \\ & \quad + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} V''(z + ir \sin \alpha) (\cos^2 \alpha - \cos^2 \alpha) d\alpha \\ &= 0. \end{aligned}$$

这就证明了积分表示式(1.2.11)确实满足拉普拉斯方程。

其次证明第二款。在(1.2.11)式中令 $r=0$ ，即有

$$\varphi(0, z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} V(z) d\alpha = V(z).$$

因此积分表示式(1.2.11)当 $r=0$ 时即为轴上电位分布 $V(z)$ 。

旋转对称场的积分表示式的优点在于：不论在轴附近的区域或离轴较远的区域中，只要给定轴上电位分布，都可以用积分公式(1.2.11)求出空间的电位分布。然而实际上只有当(1.2.11)式中的被积函数具有简单的形式时，才能利用积分表示式得出解析形式的空间电位分布函数。当轴上电位分布是一个复杂的函数，或者甚至只能用数值或图表给出时，我们只能利用(1.2.11)式进行数值积分，而给出的空间电位分布也只能是数值解。

顺便指出，(1.2.11)式中的被积函数的变数虽是复数，但积分的结果是实数。事实上，只要注意到 $\sin\alpha$ 的性质就不难得出

$$\varphi(r, z) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \operatorname{Re}[V(z + ir \sin\alpha)] d\alpha.$$

上式中 Re 表示对 $[\]$ 中的函数取实部。

利用(1.2.11)式还可以求出电场强度的积分表示式：

$$E_z = -\frac{\partial \varphi}{\partial z} = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} V'(z + ir \sin\alpha) d\alpha,$$

$$E_r = -\frac{\partial \varphi}{\partial r} = -\frac{i}{2\pi} \int_0^{2\pi} V'(z + ir \sin\alpha) \sin\alpha d\alpha.$$

同样可以证明上面两式的积分结果都是实数。

三、旋转对称静电场的等位面的性质

旋转对称静电场的等位面是旋转对称的几何曲面，它们具有一定的形状、位置和电位数。如果我们希望获知某个电子光学系统的静电场分布的一般性质，就必须求出它的等位面的形状及其分布。获知等位面的形状及其分布有两方面的价值：一方面由于等位面就是静电电子光学系统的折射面，因此从等位面可以推知该系统的聚焦或发散的大致情形；另一方面可从求得的等位面族中选择一些等位面，按其形状制作金属电极，在其上加以相应的电压，便可近似地实现所需的电位分布。

设旋转对称静电场的空间电位分布为 $\varphi(r, z)$, 则等位面的方程为

$$\varphi(r, z) = C, \quad (1.2.12)$$

其中 C 是常数. 不同的 C 值对应于不同电位值的等位面. 方程(1.2.12)即是以 C 为参数表示的 z 和 r 之间的隐函数关系, 它们表征了等位面族. 从(1.2.12)式可以求出显函数形式的等位面族

$$z = z(r, C). \quad (1.2.13)$$

显然这些等位面都是旋转对称曲面, 它们与子午面的交截线称为子午等位线. 方程(1.2.13)也就是子午等位线的方程. 现在我们来讨论等位面的最重要的性质, 即其曲率. 为要知道空间曲面上任一点处的弯曲情形, 必须而且只须决定通过该点的任何两个彼此垂直的方向上的曲率. 在旋转对称曲面的情形下, 通常是决定下述两个最重要的方向上的曲率:

第一, 子午面内等位线上某一点的曲率, 即子午曲率, 以 $1/R_M$ 表之. 显然这个量仅是 r 和 z 的函数, 与 θ 无关.

第二, 弧矢平面与等位面的交截线, 即弧矢等位线上某一点的曲率, 也就是弧矢曲率, 以 $1/R_S$ 表之. 所谓弧矢平面是指通过曲面上某一点的法线, 并与通过该点的子午面相垂直的平面. 显然 $1/R_S$ 也只是 r 和 z 的函数, 与 θ 无关.

根据微分几何的知识, 不难求出这两种曲率的表示式. 首先我们来计算子午曲率. 如图1.1所示, S 是旋转对称等位面, z 是对称轴. S 上任意一点 N 处的子午曲率由下式给出:

$$\frac{1}{R_M} = \frac{z''}{[1 + (z')^2]^{3/2}}. \quad (1.2.14)$$

其中 z' 和 z'' 是子午等位线方程(1.2.13)中 z 对 r 的一次和二次微商. 将(1.2.12)式分别对 r 微分一次和二次, 可以得出

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial z} z' + \frac{\partial \varphi}{\partial r} &= 0, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial z} z'' + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} (z')^2 + 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r \partial z} z' + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} &= 0. \end{aligned}$$

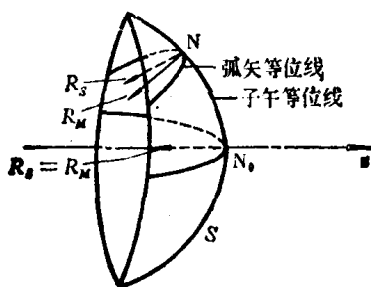


图 1.1 旋转对称等位面S上轴外点N和轴上点 N_0 处的子午曲率和弧矢曲率

引用简化的记号:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} = \varphi'_r, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \varphi'_z, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} = \varphi''_{rr},$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = \varphi''_{zz}, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r \partial z} = \varphi''_{rz},$$

则可得

$$z' = -\frac{\varphi'_r}{\varphi'_z},$$

$$z'' = -\frac{1}{\varphi'_z} \left[\left(\frac{\varphi'_r}{\varphi'_z} \right)^2 \varphi''_{zz} - 2\varphi''_{rz} \left(\frac{\varphi'_r}{\varphi'_z} \right) + \varphi''_{rr} \right].$$

把上面两式代入 (1.2.14) 式即可得出子午曲率的表示式:

$$\frac{1}{R_M} = -\frac{(\varphi'_r)^2 \varphi''_{zz} - 2\varphi''_{rz} \varphi'_r \varphi'_z + \varphi''_{rr} (\varphi'_z)^2}{[(\varphi'_z)^2 + (\varphi'_r)^2]^{3/2}}. \quad (1.2.15)$$

其次我们来计算弧矢曲率。根据微分几何中的公式，旋转对称曲面上某一点的弧矢曲率由下式给出:

$$\frac{1}{R_s} = \frac{z'}{r[1+(z')^2]^{1/2}}. \quad (1.2.16)$$

把 z' 的表示式代入上式可以得到

$$\frac{1}{R_s} = -\frac{\varphi'_r}{r} \cdot \frac{1}{[(\varphi'_r)^2 + (\varphi'_z)^2]^{1/2}}. \quad (1.2.17)$$

在轴上点 N_0 处 (图1.1)，由于旋转对称性，容易看出子午