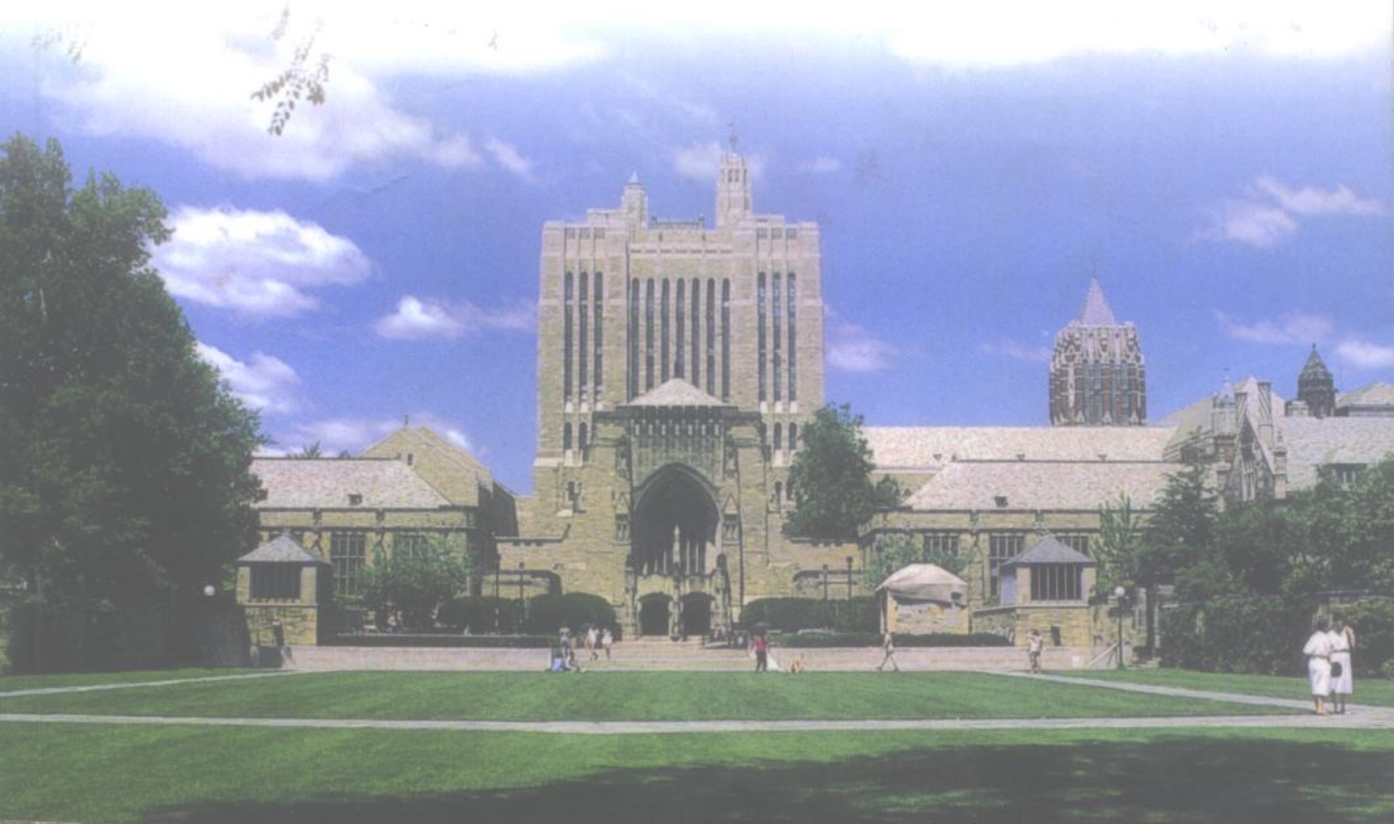
新东方学校出国考试丛书

GRE&GMAT

数学难题精解



钱永强 著

世界知识出版社

GRE & GMAT

数学难题精解

钱永强 著

世界知识出版社

图书在版编目(CIP)数据

GRE & GMAT 数学难题精解/钱永强著 . - 北京:世界知识出版社,1999.6
ISBN 7-5012-1190-6
Ⅰ.G… Ⅱ.钱… Ⅲ.①高等数学-研究生-水平考试-解题②高等数学-研究生-入学考试-解题 Ⅳ.013-44
中国版本图书馆 CIP 数据核字(1999)第 23846 号

责任编辑 / 陆 边
封面设计 / 文 敏
责任出版 / 尧 阳

出版发行 / 世界知识出版社
地址电话 / 北京东单外交部街甲 31 号 (010)65265933
E-mail: gcgjlz@public.bat.net.cn.
邮政编码 / 100005
经　　销 / 新华书店
排　　版 / 北京东远先行彩色图文中心
印　　刷 / 北京兆成印刷厂
开本印张 / 787×1092 毫米 16 开本 12.25 印张
版次印数 / 1999 年 6 月第 1 版 2000 年 1 月第 3 次印刷 印数:22001—43000
定　　价 / 22.00 元

新东方丛书策划委员会

主　任　俞敏洪
副主任　王　强　王文成

委　员　（按姓氏笔划为序）
　　　　王　强　王文成　包凡一　杜子华
　　　　何庆权　胡　敏　俞敏洪　徐小平

新东方出国考试丛书编委会

主　编　俞敏洪
副主编　杜子华　包凡一
编　委　王　强　徐小平　王文成　何庆权
　　　　钱向阳　杨　继　钱永强　胡　敏

前　言

GMAT 和 GRE 考试中的数学部分一向是中国考生拿分的强项，但自 1997 年 GMAT 考试改成计算机考试后，其数学部分显著变难，经常出现中国考生难以在短时间内回答的问题，考生因此难以在总分上取得高分。同样，GRE 考试在 1999 年也转向了计算机化考试，数学部分也不可避免地变难。其实这并不是 ETS 改变了 GRE 和 GMAT 的数学考试大纲，加入了一些较高要求的数学概念，而是由于计算机考试的智能化性质决定的。智能化考试是指根据考生的答题状况而智能型地给出下一道题，即如果考生前面的答题一直保持正确，那么下一道题会相应变难。中国考生在以往的 GRE 和 GMAT 笔试的数学部分中有把握答对大部分数学题，所以在机考中也会有良好的表现，但这就不可避免地会在机考中遇见更多的数学难题。综上分析，并不是机考的数学内容的考查范围和整体难度变大了，而是智能化的性质决定了中国考生面临的数学考题会难度加大。

那么对准备参加 GRE 和 GMAT 的中国考生，特别是一些文科学生，需要用更多的精力准备 GRE 和 GMAT 的数学内容。由于 GMAT 和 GRE 都是 ETS 所设计的考试，且 GRE 的数学考试大纲与 GMAT 完全相同，只是由于考试性质略有不同，GMAT 的数学题难度略大于 GRE。因为 GRE General 考试中的数学是针对所有学科领域的申请者，包括艺术、体育、文学类的申请者，所以数学难度和大纲适用于所有学科领域内的学生，绝不可能出现诸如微积分等高等数学中的概念。对于传说中的一些危言耸听的高等数学范围内的考题，即使涉及也绝不会参与计分，其考试性质决定了考查范围。同样，GMAT 考试所针对的考生范围与 GRE 大致相同，MBA 的招生范围同样覆盖各个领域内的学生，但由于 MBA 的学习中需要很强的数理推理能力，所以 GMAT 数学的考查难度超过 GRE。对于面临 GRE 计算机化考试的中国考生而言，GMAT 的数学考题是不可多得的最佳应考练习；同样对于 GMAT 考生，GRE 数学题中的难题也可以作为很好的补充材料。

本书针对 GRE 和 GMAT 计算机化考试中的数学大纲，全面复习了 GRE 和 GMAT 考试中所涉及的数学概念，弥补了中国考生对英文数学概念不熟悉的缺陷。本书选取了近 20 年 GRE 和 GMAT 考试中所有的数学难题，收集了计算机化考试中考生所遇见的数学难题，并对其进行详细解答。相信在阅读完本书后，对数学信心不足的中国考生会对 GRE 和 GMAT 数学考试有一个全新的认识。

本书共分为三章,第一章介绍了 GRE 和 GMAT 数学考试中所涉及的概念、内容、要点以及一些高难度的考题解法。第二章针对 GRE 计算机化考试题型及考查模式做出具体介绍,并且给出 6 个计算机化考试标准数学 Section,每个部分 28 道题,内容为 GRE 历史上所出现的所有数学难题,并对其进行详细分析和解答。这些考题同样是 GMAT 考生的最佳应考练习。读者应当首先在 45 分钟内完成这些练习,并参照分析和解答找出自己的问题所在。第三章针对 GMAT 计算机化考试题型及考查模式做出具体介绍,给出 5 个 GMAT 计算机化考试数学标准 Section,每个部分 37 道题。相应做出详细解答,这些考题同时是 GRE 考生准备考试的最佳素材,读者应在 75 分钟内完成。本书最后的附录收录了 GRE 和 GMAT 考试涉及的所有数学概念、公式及可能出现的数学概念的中英文对照表。中国考生在 GRE 和 GMAT 中遇见的所有数学难题在本书中基本都可以找到。需注意的是:无论 GRE 数学还是 GMAT 数学,均不需要记太多的数学规律。当遇见此类题时,排除法永远是最快速、最简捷的方法。

也许是理工科毕业的缘故吧,本人在北京新东方学校教授 GRE 及 GMAT 数学逻辑 4 年多的时间中从未想过写一本关于数学复习的书,因为 GRE 和 GMAT 的数学对中国考生实在算不了什么。尽管我也遇见许多文科考生对数学信心不足,但经过一段时间的学习,他们都会在考试中取得很好的成绩。写这本书的创意还是新东方学校校长俞敏洪老师提出的,针对计算机化考试难度增加的现实,也许这本书会对一些中国考生尽一份微薄之力,那么本书也就有了存在的价值。

钱永强

1999 年 6 月 1 日于新东方

目　录

第 一 章

GRE 和 GMAT 中的数学知识复习

GRE 和 GMAT 考试由于考查对象有所不同,GRE General 考试所针对的是除 MBA、JD 以外的所有申请者,而 GMAT 针对的是 MBA 的申请者,MBA 的学习需要较强的数理推理能力,所以 GMAT 数学考试难度相对于 GRE General 而言较难。但 ETS 所给出的数学考试大纲完全相同,都要求掌握:

- **Arithmetic** 算术
- **Elementary Algebra** 基本代数
- **Commonly Known Concepts of Geometry** 一般的几何概念
- **Data Analysis** 数据分析

GRE 和 GMAT 数学部分的所有题目都以两种方式——数学背景和日常生活背景给出,考查考生所具有的 basic mathematical skill(基本数学技巧)、understanding of elementary math concept(基本数学概念的理解)以及 ability to reason quantitatively and solve problems in quantitative setting(在数字环境中的数字推理和解题的能力)。

对于中国考生而言,GRE 和 GMAT 数学部分的考查内容大部分是中国初中数学所涉及的内容,所以并不构成太大困难。但因其也会涉及少量统计学中的简单概念,强调数学概念在日常生活中的运用,并且以英文出题,所以中国考生需了解其考查特点,熟悉英文概念,掌握在 GRE 或 GMAT 考试中的应试方法和技巧。

本章从算术、代数、几何及文字考题四方面全面复习 GRE 和 GMAT 中的数学概念、出题思路及解题方法。

第一节 算术(Arithmetic)

一、整数(integer, whole number):

1. 因子(*factor or divisor*):

If x and y are integers and $x \neq 0$, x is a divisor (factor) of y provided that $y = xn$ for some integer n. In this case y is also said to be divisible by x or to be a multiple of x. For example, 7 is a divisor or factor of 28 since $28 = 7 \cdot 4$, but 8 is not a divisor of 28 since there is no integer n such that $28 = 8n$.

divisible *adj*.可以被整除的　multiple *n*. 倍数

2. 商和余数(*quotients and remainders*)

If x and y are positive integers, there exist unique integers q and r, called the quotient and remainder, respectively, such that $y = xq + r$ and $0 \leqslant r < x$. For example, when 28 is divided by 8, the quotient is 3 and the remainder is 4 since $28 = (8)(3) + 4$. Note that y is divisible by x if and only if the remainder r is 0; for example, 32 has a remainder of 0 when divided by 8 since 32 is divisible by 8. Also note that when a smaller integer is divided by a larger integer, the quotient is 0 and the remainder is the smaller integer. For example, 5 divided by 7 has the quotient 0 and the remainder 5 since $5 = (7)(0) + 5$.

注意:余数和商都可以为 0。

3. 奇数和偶数(*odd and even integers*):

Any integer that is divisible by 2 is an even integer; the set of even integers is $\{\ldots -4, -2, 0, 2, 4, 6, 8, \ldots\}$. Integers that are not divisible by 2 are odd integers; $\{\ldots -3, -1, 1, 3, 5, \ldots\}$ is the set of odd integers. If at least one factor of a product of integers is even, the product is even; otherwise the product is odd. If two integers are both even or both odd, their sum and their difference are even. Otherwise, their sum and their difference are odd.

注:奇数和偶数都可以是负数;零一定是偶数。

4. 质数和合数(*prime numbers and composite numbers*):

A prime number is a positive integer that has exactly two different positive divisors, 1 and itself. For example, 2, 3, 5, 7, 11, and 13 are prime numbers, but 15 is not, since 15 has four different positive divisors, 1, 3, 5, and 15. The number 1 is not a prime number, since it has only one positive divisor. Every integer greater than 1 is either prime or can be uniquely expressed as a product of prime factors. For example, $14 = (2)(7)$, $81 = (3)(3)(3)(3)$, and $484 = (2)(2)(11)(11)$.

注:除了 1 和其本身外,还有其他因子的数叫合数。最小的质数为 2,最小的合数为 4,在讨论质数和合数时,都指正数。1 和 0 既不是质数,也不是合数。

5. 整数中的重要概念:

·Perfect square 完全平方数,诸如 $9 = 3^2$

·Perfect cube 完全立方数,诸如 $8 = 2^3$

·the greatest common divisor 最大公约数

几个数所公有的最大因子称最大公约数,诸如:48 与 36 的公因子有 1,2,3,4,6,12,其中 12 为最大公约数。

·the least common multiple 最小公倍数

几个数所公有的最小倍数称最小公倍数。诸如:3,7 和 14 的最小公倍数为 42。

·连续正整数的算术平均值也是首项和末项的算术平均值。

同理,连续奇数与连续偶数的算术平均值也是首项与末项的算术平均值

·the properties of the number of factors 因子个数的特性

①当一个正整数 n 有奇数个因子,则 n 必为一完全平方数。

②除了$\sqrt{n}$为其中一个因子外,小于$\sqrt{n}$的因子与大于$\sqrt{n}$的因子数相同。

③当某一正整数 n 有偶数因子时,则 n 必不是完全平方数,且大于$\sqrt{n}$的因子与小

于$\sqrt{n}$的因子数相同。

例:问64有多少个小于8的因子?

64共7个因子,小于8的有1,2,4,大于8的有16,32,64,所以共3个。

问60有多少个小于$\sqrt{60}$的因子?

60共12个因子,小于$\sqrt{60}$的因子有1,2,3,4,5,6,大于$\sqrt{60}$的因子有10,12,15,20,30,60,所以共6个。

·**因子数的求解公式**:将整数n分解为质因子相乘的形式,然后将每个质因子的幂分别加1之后连乘所得的结果就是n的因子的个数。

例:80的因子个数可以如下方式求得:

$80 = 2^4 \cdot 5$,则因子个数为$(4+1)(1+1)=10$

·**整除特性**:

能够被2整除的数其个位一定是偶数。

能够被3整除的数是各位数的和能够被3整除。

能够被4整除的数是最后两位数能够被4整除。

能够被5整除的数的个位是0或5。

能够被8整除的数是最后三位能够被8整除。

能够被9整除的数是各位数的和能够被9整除。

能够被11整除的数是其奇数位的和减去偶数位的和的差值可以被11整除

在整数的整除中,应充分利用上面所列整除特性,记住:**一个数要想被另一数整除,该数需含有对方所具有的质数因子**。例如一个数要被28整除,其必须满足被7和2整除,且具有两个2的因子。所以在解整除题时,若遇见一个较大的数,则将其分解为质因子连乘积形式,利用上面所列整除特性,判断一个数是否能够被另一个数整除。例如判断一个数是否能够被105整除,该数应具有能够分别被3,5,7三个质因子整除的特性。

·**整数n次幂尾数特性**:

尾数为2的数的幂的个位数一定以2,4,8,6循环

尾数为3的数的幂的个位数一定以3,9,7,1循环

尾数为4的数的幂的个位数一定以4,6循环

尾数为7的数的幂的个位数一定以7,9,3,1循环

尾数为8的数的幂的个位数一定以8,4,2,6循环

尾数为9的数的幂的个位数一定以9,1循环

例:问7^{123}和3^{321}的个位哪个大?

7和3幂的个位数均每4次循环一次,则将7^{123}的幂指数$123 \div 4$余3,因此7^{123}的个位一定为3,同理将3^{321}的幂指数$321 \div 4$余1,则3^{321}的个位为3,则7^{123}与3^{321}的个位数相同。

·**大于2的偶数都可以写成两个质数的和的形式。**

在实际解题中,以上所总结的数字规律能够起到一定的辅助作用,但笔者认为:排除法在解GRE和GMAT的数字规律题时是最好的办法。

二、分数(fractions):

In a fraction $\frac{n}{d}$, n is the numerator and d is the denominator. The denominator of a frac-

分母

tion can never be 0, because division by 0 is not defined. Two fractions are said to be equivalent if they represent the same number. For example, $\frac{8}{36}$ and $\frac{14}{63}$ are equivalent since they both represent the number $\frac{2}{9}$. In each case, the fraction is reduced to lowest terms by dividing both numerator and denominator by their greatest common divisor (gcd). The gcd of 8 and 36 is 4 and the gcd of 14 and 63 is 7.

1. 分数的加法和减法: *Addition and subtraction of fractions*

两个不同分母的分数加减首先需要把它们变成相同分母的分数(equivalent fractions), 然后加减,通分时选择最小公倍数(least common multiple),简称 lcm。

2. 分数的乘法和除法: *Multiplication and division of fractions*

乘法时分子相乘,分母相乘。

除法时颠倒除数(divisor),即算出其倒数(reciprocal),然后相乘。

3. 繁分数和假分数: *mixed number and improper fraction*

繁分数指一个数由一个整数和一个分数构成。例如: $8\frac{1}{4}$

假分数指分子大于分母的分数。例如: $\frac{7}{3}$

三、小数(decimals):

In the decimal system, the position of the period or decimal point determines the place value of the digits. For example, the digits in the number 7, 654.321 have the following place values:

Thousands	Hundreds	Tens	Ones or units		Tenths	Hundredths	Thousandths
7,	6	5	4	·	3	2	1
千位	百位	十位	个位		十分位	百分位	千分位

科学计数法(scientific notation)

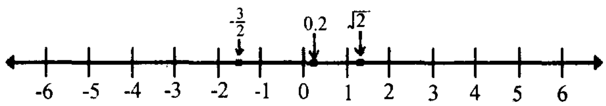
Sometimes decimals are expressed as the product of a number with only one digit to the left of the decimal point and a power of 10. This is called scientific notation. For example, 231 can be written as 2.31×10^2 and 0.0231 can be written as 2.31×10^{-2}. When a number is expressed in scientific notation, the exponent of the 10 indicates the number of places that the decimal point is to be moved in the number that is to be multiplied by a power of 10 in order to obtain the product. The decimal point is moved to the right if the exponent is positive and to the left if the exponent is negative. For example, 20.13×10^3 is equal to 20, 130 and 1.91×10^{-4} is equal to 0.000191.

四舍五入: To the nearest

小数点: decimal point, period

四、实数(real numbers):

All real numbers correspond to points on the number line and all points on the number line correspond to real numbers.



注:实数所对应的概念为虚数 imaginary numbers。另外数轴一定是由左至右逐渐增大的。在 GRE 及 GMAT 数学考试中数轴往往习惯画为如上双箭头模式。

·正数和负数 positive and negative numbers

All real numbers except zero are either positive or negative.

注:0 既不是正数也不是负数

To say that the number n is between 1 and 4 on the number line means that $n > 1$ and $n < 4$; that is, $1 < n < 4$. If n is "between 1 and 4, inclusive", then $1 \leqslant n \leqslant 4$.

·绝对值 absolute value

某数在数轴上与零点之间的距离称为该数的绝对值。例如:$|-5| = |5| = 5$

·实数的性质 properties of real numbers

Here are some properties of real numbers that are used frequently. If x, y, and z are real numbers, then

(1) $x + y = y + x$ and $xy = yx$

(2) $(x + y) + z = x + (y + z)$ and $(xy)z = x(yz)$

(3) $x(y + z) = xy + xz$

(4) If x and y are both positive, then $x + y$ and xy are positive.

(5) If x and y are both negative, then $x + y$ is negative and xy is positive.

(6) If x is positive and y is negative, then xy is negative.

(7) If $xy = 0$, then $x = 0$ or $y = 0$. For example, $3y = 0$ implies $y = 0$.

(8) $|x + y| \leqslant |x| + |y|$

For example, if $x = 10$ and $y = 2$, then $|x + y| = |12| = 12 = |x| + |y|$; and if $x = 10$ and $y = -2$, then $|x + y| = |8| = 8 < 12 = |x| + |y|$.

五、比率与比例(ratio and proportion):

一个比率 ratio 可以表示成许多方式,例如:the ratio of 2 to 3 可以被表达为 2 to 3,2:3,或者$\frac{2}{3}$。注意比率中项的顺序是重要的,即 2 to 3 和 3 to 2 不同。A proportion is a statement that two ratios are equal。例如:$\frac{2}{3} = \frac{8}{12}$是一个 proportion。

六、百分比(percent):

Percent means per hundred or number out of 100。

在考题中经常会问到从某一数量到另一数量百分比的增加或减少。首先算出增加或减少的量,然后除以原来的那个量,即"from"或"than"后面的量。

例:If the price of an item decrease from \$30 to \$24, what is the percent decrease in price?

$(30-24)/30=20\%$ numerator 分子 denominator 分母

七、数的幂和根(powers and roots of numbers):

x^n 意味着 the nth power of x。例如:64 is the 6th power of 2。$\sqrt{nx}$ 意味着 the 6th root of x,例如:2 is a 6th root of 64。

注意:平方根 square root。每个正数有两个平方根,一个正的,一个负的;但是$\sqrt{n}$定义为一个正数的平方是 n,即$\sqrt{9}=3$;$\sqrt{x^2}=|x|$;cube root 指立方根。

八、描述统计(descriptive statistics):

1.平均数〔*Average or (arithmetic) mean*〕:

One of the most common statistical measures of the center of a list of data is the average, or (arithmetic) mean. The average of n numbers is defined as the sum of the n numbers divided by n. For example, the average of 6,4,7,10, and 4 is $(6+4+7+10+4)/5=6.2$

注意:GRE 和 GMAT 不会考查其他类型的平均值,即使涉及也会给出运算公式,如:geometric average 几何平均数为 n 个数的乘积开 n 次方,例如 $\sqrt[3]{abc}$。注意一个性质:$\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$(当 a,b 相等时等号成立),即算术平均数总是大于或等于几何平均数。

2. 中数(*median*):

To calculate the median of n numbers, first order the numbers from least to greatest; if n is odd, the median is defined as the middle number, while if n is even, the median is defined as the average of the two middle numbers. For the data 6, 4, 7, 10, 4, the numbers, in order, are 4, 4, 6, 7, 10, and the median is 6, the middle number. For the numbers 4, 6, 6, 8, 9, 12, the median is $(6+8)/2=7$. Note that the mean of these numbers is 7.5.

The median of a set of data can be less than, equal to, or greater than the mean. Note that for a large set of data (for example, the salaries of 800 company employees), it is often true that about half of the data are less than the median and about half of the data are greater than the median; but this is not always the case, as the following data show

3,5,7,7,7,7,7,7,8,9,9,9,9,10,10

Here the median is 7, but only 2/15 of the data are less than the median.

若得到 n 个数的中数,首先将数字由小至大排序,如果 n 是奇数,中数被定义为中间的那个数;如果 n 是偶数,中数被定义为中间两个数的平均值。

当个数 n 较大时,中数指 50%的线所通过的有序排列中的位置的那个数。

3. 众数(*mode*):

一组数中的众数是指出现频率最高的数。

例:the mode of 7,9,6,7,2,1 is 7。

注意:一组数中可以有超过一个众数,把它们分别指出即可。

例:the list of 4,4,4,6,7,8,8,11,11,11,18 has two modes:4,11

4. 值域(*range*):

range是表明数的分布的量,其被定义为最大值减最小值的差。

例:The range of $-1,7,27,27,36$ is $36-(-1)=37$

注意:Range 在一组数中仅依赖最大值和最小值两个量。

5. 标准方差(*standard deviation*):定义是什么

One of the most common measures of dispersion is the *standard deviation*. Generally speaking, the greater the data are spread away from the mean, the greater the standard deviation. The standard deviation of n numbers can be calculated as follows: (1)find the arithmetic mean; (2)find the differences between the mean and each of the n numbers; (3) square each of the differences; (4)find the average of the squared differences; and (5)take the nonnegative square root of this average. Shown below is this calculation for the data 0, 7,8,10,10, which have arithmetic mean 7.

x	$x-7$	$(x-7)^2$
0	-7	49
7	0	0
8	1	1
10	3	9
10	3	9
	Total	68

Standard deviation: $\sqrt{\dfrac{68}{5}} \approx 3.7$

Notice that the standard deviation depends on every data value, although it depends most on values that are farthest from the mean. This is why a distribution with data grouped closely around the mean will have a smaller standard deviation than data spread far from the mean. To illustrate this, compare the data 6,6,6,5,7,5,9, which also have mean 7. Note that the numbers in the second set of data seem to be grouped more closely around the mean of 7 than the numbers in the first set. This is reflected in the standard deviation, which is less for the second set (approximately 1.1) than for the first set (approximately 3.7).

例:求 3,13,17 的标准方差

标准方差的计算公式为 $\sigma=\sqrt{\dfrac{(3-11)^2+(13-11)^2+(11-17)^2}{3}}=5.89$

求 6,9,23,26 的标准方差

$$\sigma=\sqrt{\frac{(6-16)^2+(9-16)^2+(23-16)^2+(26-16)^2}{4}}=9.55$$

注意:许多读者对标准方差计算公式中分母为 n 表示怀疑,认为应当是 $n-1$,这种理解是不对的,在计算几个固定数的 standard deviation 时,分母一定为 n。只有当要计算的个数太大,而从中随机选取一个样本 sample 来计算标准方差时,分母才为 $n-1$。

6. 频率分布表(*frequency distribution*):

Frequency distribution 用于展示以不同频率出现的数据。例如:下图左边展示了 20 个数字,而右边以频率分布图列出每个不同的值出现的频率。

-4	-1	-1	-5
0	-1	-5	-2
0	0	0	0
-3	-1	-2	0
-2	-4	0	-1

Data Value x	Frequency f
-5	2
-4	2
-3	1
-2	3
-1	5
0	7
Total	20

根据上面的频率分布图,分别计算 mean, median, mode, range 和 standard deviation

$$\text{mean} = \frac{(-5)(2)+(-4)(2)+(-3)(1)+(-2)(3)+(-1)(5)+(0)(7)}{20} = -1.6$$

$\text{median} = \dfrac{(-1)+(-1)}{2} = (-1)$ (第 10th 和 11th 的算术平均值)

mode = 0(出现频率最高的是 0,7 次)

range = 0 - (-5) = 5

$$\text{standard deviation} = \sqrt{\frac{(-5+1.6)^2(2)+(-4+1.6)^2(2)+\ldots+(0+1.6)^2(7)}{20}} \approx 1.7$$

九、集合(sets):

算术中的集合是一组数或其他符号。其中的元素称之为 element。

假如 S 是一个有限数量元素的集合,那 $|S|$ 被定义为元素的数目。

例:$S=\{1,8,27\}$ 则 $|S|=3$

注:集合中元素的顺序 does not matter。

如果一个集合中的元素也是另一个集合中的元素,则称之为另一个集合的子集(subset)。

1. 集合之间的关系(*relationship between sets*):

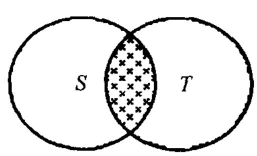
union:并集。the union of set A and set B 指两集合中所有共同元素。$A\cup B$

intersection:交集。the intersection of set and set B 指两集合中的所有共同元素,$A\cap B$

两个集合中没有共同元素称之为 disjoint or mutually exclusive。

2. 维恩图(*venn diagram*):

集合关系可以用维恩图来表示。例如下面的图形表示:For two sets S and T that are not disjoint and neither of which is a subset of the other, the intersection $S\cap T$ is represented by the shaded region of the diagram below.



This diagram illustrates a fact about any two finite sets S and T: the number of elements in their union equals the sum of their individual numbers of elements minus the number of elements in their intersection (since the latter are counted twice in the sum); more concisely,

$$|S \cup T| = |S| + |T| - |S \cap T|.$$

This counting method is called the general addition rule for two sets. As a special case, if S and T are disjoint, then

$$|S \cup T| = |S| + |T|$$

since $|S \cap T| = 0$.

例:一个班有 50 名学生学英语,30 名学生学法语,同时学英语法语的学生有 10 名,这个班上每个学生至少学英语或法语中的一门语言,问一共有多少学生?

$50 + 30 - 10 = 70$

注意:GRE 中只会考查两个集合之间的关系,但 GMAT 可能考查三个集合之间的运算,所以须注意以下集合运算公式:

$$|A \cup B \cup C| = A + B + C - A \cap B - A \cap C - B \cap C + A \cap B \cap C$$

例:A 子集有 35 人,B 子集有 30 人,C 子集有 32 人,A 与 B 的交集有 20 人,B 与 C 的交集有 15 人,A 与 C 的交集有 22 人,A,B,C 的交集有 8 人,求 A,B,C 共多少人?

解:总集为 $35 + 30 + 32 - 20 - 15 - 22 + 8 = 48$

十、计算方法(counting methods):

There are some useful methods for counting objects and sets of objects without actually listing the elements to be counted. The following principle of multiplication is fundamental to these methods.

If a first object may be chosen in m ways and a second object may be chosen in n ways, then there are mn ways of choosing both objects.

As an example, suppose the objects are items on a menu. If a meal consists of one entree and one dessert and there are 5 entrees and 3 desserts on the menu, then $5 \times 3 = 15$ different meals can be ordered from the menu. As another example, each time a coin is flipped, there are two possible outcomes, heads and tails. If an experiment consists of 8 consecutive coin flips, the experiment has 2^8 possible outcomes, where each of these outcomes is a list of heads and tails in some order.

·阶乘(factorial notation)　假如一个大于 1 的整数 n,计算 n 的阶乘被表示为 $n!$,被定义为从 1 至 n 所有整数的乘积。

例如:$4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$

注意:$0! = 1! = 1$

·排列(permutations)

The factorial is useful for counting the number of ways that a set of objects can be ordered. If a set of n 阶乘 objects is to be ordered from 1st to nth, there are n choices for the 1st object, $n - 1$ choices for the 2nd object, $n - 2$ choices for the 3rd object, and so on, until there is only 1 choice for the nth object. Thus, by the multiplication principle, the number of ways of ordering the n objects is

$$n(n-1)(n-2)\ldots(3)(2)(1) = n!$$

For example, the number of ways of ordering the 排列 letters A, B, and C is 3!, or 6:

ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, and CBA.

These orderings are called the permutations of the letters A, B, and C. 也可以用 P_3^3 表示。
从 n 个元素中选出 k 个元素，排序的数目为：

$$P_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

例：1,2,3,4,5 这 5 个数字构成不同 5 位数的总数为 $P_5^5 = 5! = 120$

·组合(combination)

A permutation can be thought of as a selection process in which objects are selected one by one in a certain order. If the order of selection is not relevant and only k objects are to be selected from a larger set of n objects, a different counting method is employed. Specially consider a set of n objects from which a complete selection of k objects is to be made without regard to order, where $0 \leqslant k < n$. Then the number of possible complete selections of k objects is called the number of combinations of n objects taken k at a time and is C_n^k.

从 n 个元素中任选 k 个元素的数目为：

$$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

例：从 5 个不同元素中任选 2 个的组合为 $C_5^2 = \frac{5!}{2!\ 3!} = 10$

例：从 1,2,3,4,5 这 5 个数字中选出 3 个数字组成 3 位数的所有可能是多少？

解：$P_5^3 = \frac{5!}{(5-3)!} = 60$

·排列组合的一些特性(properties of permutation and combination)

① $C_n^m = C_n^{n-m}$　即：$C_5^4 = C_5^1$　$C_7^3 = C_7^4$

②加法原则(Rule of Addition)

加法原则是指：做某件事有 x 种方法，每种方法中又有各种不同的解决方法。例如第一种方法中有 y_1 种方法，第二种方法有 y_2 种方法，等等，第 x 种方法中又有 y_x 种不同方法，每一种方法均可完成这件事，即它们之间的关系用"or"表达，那么一般使用加法原则，即有 $y_1 + y_2 + \ldots + y_x$ 种方法。

例：从 A 至 B，由 A 可以通过 C 或 D 或 E 3 个城镇，由 C 至 B 又有 3 条不同的路，从 D 至 B 有 4 条不同的路，由 E 到 B 有 2 条不同的路，问由 A 至 B 一共有多少条不同的路？

解：根据加法原则：3 + 4 + 2 = 9

③乘法原则(Rule of Multiplication)

乘法原则为：完成一件事有 x 个步骤，第一步中有 y_1 种方法，第二步中有 y_2 个方法，…，第 x 步中有 y_x 种方法，完成这件事一共有 $y_1 \cdot y_2 \cdot y_3 \ldots y_x$ 种方法。

例：由 A 至 B 有 3 条路，由 B 至 C 有 4 条路，问由 A 至 B 到 C 共有多少条路？

解：3 × 4 = 12 条

总结：在 GRE 和 GMAT 中，排列组合不会考得很难。在涉及顺序时用排列即 P_n^m，在涉及选择时用组合即 C_n^m。有时考生会遇到几个数字构成几位数的考题，需注意有时考题会限制首位数字不能是零，如几个数字构成分机号、密码等，就不存在首位数字是否为 0 的问题。同时在解排列组合题时，需建立反向思维解题的习惯。如让你找出符合条件的可能，你即可从总的可能中减去不符合条件的可能，答案也就出来了。GRE 和 GMAT 均喜欢将简单的排列组合题