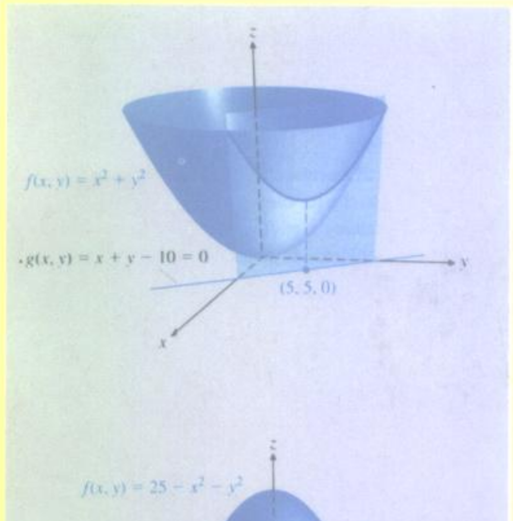
南开大学数学教学丛书

数学分析

下册

黄玉民　李成章　编



科学出版社

内 容 简 介

本书是南开大学数学系老师在多年教学经验的基础上编写而成的.是一本大学数学系基础课程的教材.本书介绍了数学分析的基本内容,主要包括:多元函数极限与连续函数;多元函数的积分学;含参变量的积分;重积分;线积分和面积分.本书每章中都附有丰富的习题,供学生练习之用.

本书可供高校数学系师生;数学工作者使用.

图书在版编目(CIP)数据

数学分析(下)/黄玉民,李成章编. -北京:科学出版社,1999.5
(南开大学数学教学丛书)
ISBN 7-03-007184-0
Ⅰ.数… Ⅱ.①黄… ②李… Ⅲ.数学分析 Ⅳ.017
中国版本图书馆 CIP 数据核字(98)第 38346 号

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码:100717
科地亚印刷厂印刷
新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售
*
1999 年 5 月第 一 版 开本:850×1168 1/32
1999 年 5 月第一次印刷 印张:14 3/4
印数:1—3 000 字数:392 000

定价:22.00 元

目　　录

第十二章　多元函数的极限与连续

在此之前我们主要讨论一元函数微积分，把关于一元函数的主要概念，运算和定理推广到多元函数在理论和实际应用上都是至关重要的．一元函数微积分与多元函数微积分有相同的理论基础，即实数理论和极限．但是由于多元函数的定义域和多元极限的复杂性，这就给讨论多元函数的问题带来新的困难．因此在我们学习多元函数微积分时，既要注意到它与一元函数微积分的联系，又要注意到它们之间的区别．本章主要有两部分，第一部分是多元函数定义的空间，即 n 维欧氏空间的基本拓扑概念，这一部分不仅对于本课程，而且对于许多后继课程来说都是必不可少的基础知识．第二部分主要讨论多元函数的极限与连续，以及连续函数的重要性质．

§1 n 维欧氏空间

一、 n 维欧氏空间的定义与结构

众所周知，实数轴上的点与全体实数 $1-1$ 对应．在确定的坐标系下平面上的点与所有有序实数对 (x,y) $1-1$ 对应，空间中点与所有有序三元实数组 (x,y,z) $1-1$ 对应．一般来说，定义所有有序 n 元实数组 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 所组成的集合为 n 维欧几里德 (Euclid) 空间，简称 n 维欧氏空间，记为 R^n，即

$$R^n=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n);x_1,x_2,\cdots,x_n\text{为实数}\}$$

全体实数的集合 $R=R^1$，实平面上的所有点的集合等同于 R^2，通常现实空间中所有点的集合等同于 R^3．

R^n 中一个点 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 常常简单记为

$$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n),$$

其中 $x_i(i=1,2,\cdots,n)$ 称为 x 的第 i 个分量. 任取 $x\in R^n$, 我们既把它看作 R^n 中的一个点, 又把它看作以 $O=(0,0,\cdots,0)$ 为始点, x 为终点的一个向量, 我们按以下法则定义向量的加法和数乘.

(i) 对于任意 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n),y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)\in R^n$, 定义

$$x+y=(x_1+y_1,x_2+y_2,\cdots,x_n+y_n)$$

(ii) 对于任意 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in R^n$ 和实数 λ, 定义

$$\lambda x=(\lambda x_1,\lambda x_2,\cdots,\lambda x_n).$$

按上述加法和数乘, 易证 R^n 成为一个 n 维实线性空间, $O=(0,0,\cdots,0)$ 为其零元素, 这就是 R^n 上的代数结构.

除代数结构, R^n 上还有距离结构, 对任意 R^n 中的两点 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 和 $y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$, 定义 x 与 y 之间的欧氏距离 (以下简称距离) 为

$$\rho(x,y)=\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

$\rho(x,0)$ 记为 $|x|$ 称为向量 x 的欧氏长度或欧氏范数 (简称长度或范数). 可以证明 R^n 上的距离满足所谓距离公理

(i) 正定性: $\rho(x,y)\geq 0$ 且 $\rho(x,y)=0$ 的充要条件是 $x=y,\forall x,y\in R^n$.

(ii) 对称性: $\rho(x,y)=\rho(y,x),\forall x,y\in R^n$.

(iii) 三角形不等式:

$$\rho(x,z)\leq\rho(x,y)+\rho(y,z),\forall x,y,z\in R^n.$$

(i) 和 (ii) 显然成立, 只须证 (iii). 为此, 先介绍所谓柯西 (Cauchy) 不等式:

设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 和 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 均为实数, 则

$$\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\leq\left(\sum_{i=1}^{n}|a_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{i=1}^{n}|b_i|^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

Cauchy 不等式的证明留给读者. 现证三角形不等式.

设 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n), y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$, $z=(z_1, z_2, \cdots, z_n)$, 则

$$\rho(x,z)^2=\sum_{i=1}^{n}|x_i-z_i|^2=\sum_{i=1}^{n}|(x_i-y_i)+(y_i-z_i)||x_i-z_i|$$

$$\leq\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i||x_i-z_i|+\sum_{i=1}^{n}|y_i-z_i||x_i-z_i|.$$

由 Cauchy 不等式可得

$$\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i||x_i-z_i|\leq\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i-z_i|^2\right)^{\frac{1}{2}};$$

$$\sum_{i=1}^{n}|y_i-z_i||x_i-z_i|\leq\left(\sum_{i=1}^{n}|y_i-z_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i-z_i|^2\right)^{\frac{1}{2}};$$

从而 $\rho(x,z)^2\leq\rho(x,y)\rho(x,z)+\rho(y,z)\rho(x,z)$. 由此立即可得三角形不等式成立.

以后为简单起见, 经常用向量长度或范数的记号代替距离记号, 即

$$\rho(x,y)=|x-y|, \forall x,y\in R^n.$$

二、 R^n 中的点收敛及完备性

定义 1 设 $\{x^m\}_{m=1,2,\cdots}$ 是 R^n 中的点列 (如无声明, 所说点列总是无穷点列), $x^0\in R^n$, 称点列 $\{x^m\}$ 收敛于 x^0 或 x^0 是点列 $\{x^m\}$ 的极限, 记为 $\lim\limits_{m\to\infty}x^m=x^0$, 如果

$$\lim_{m\to\infty}|x^m-x^0|=0,$$

即任给 $\varepsilon>0$, 存在正整数 M 使得当 $m>M$ 时总有

$$|x^m-x^0|<\varepsilon.$$

对于任意实数 $r>0$ 和 $a\in R^n$, 形象地称集合

$$\{x\in R^n; |x-a|<r\}$$

为 R^n 中以 a 为中心 r 半径的开球体, 经常记为 $B(a,r)$. 点列 $\{x^m\}$ 收敛于 x^0 直观地可叙述为: 对于任意的 $\varepsilon>0$, 存在正整数 M, 使得 $\{x^m\}$ 中第 M 点以后的点全部进入以 x^0 为中心 ε 为半径的开球内. 类似于数列极限的性质, 容易证明 R^n 中点列收敛的一些简单性质, 例如

性质 1 极限的唯一性, 即 R^n 中收敛点列的极限只能有一个.

证 设 $a,b\in R^n$ 都是 R^n 中收敛点列 $\{x^m\}$ 的极限, 则由三角形不等式可得

$$|a-b|\le|a-x^m|+|x^m-b|,\ m=1,2,\cdots.$$

由于

$$\lim_{m\to\infty}|a-x^m|=\lim_{m\to\infty}|x^m-a|=0,\ \lim_{m\to\infty}|x^m-b|=0,$$

所以

$$|a-b|=0.$$

由此可知 $a=b$.

性质 2 在 R^n 中, 设 $\lim\limits_{m\to\infty}x^m=x^0$, $\lim\limits_{m\to\infty}y^m=y^0$, α 和 β 是两个任意实数, 则点列 $\{\alpha x^m+\beta y^m\}$ 收敛, 且

$$\lim_{m\to\infty}(\alpha x^m+\beta y^m)=\alpha x^0+\beta y^0.$$

证 由三角形不等式

$$\begin{aligned}|(\alpha x^m+\beta y^m)-(\alpha x^0+\beta y^0)|&=|\alpha(x^m-x^0)+\beta(y^m-y^0)|\\&\le|\alpha(x^m-x^0)|+|\beta(y^m-y^0)|.\end{aligned}$$

根据数乘与距离的定义可知

$$|\alpha(x^m-x^0)|=|\alpha|\,|x^m-x^0|,$$

$$|\beta(y^m - y^0)| = |\beta|\,|y^m - y^0|.$$

从而有

$$|(\alpha x^m + \beta y^m) - (\alpha x^0 + \beta y^0)| \le |\alpha|\,|x^m - x^0| + |\beta|\,|y^m - y^0|.$$

再由假设 $\lim\limits_{m\to\infty} |x^m - x^0| = \lim\limits_{m\to\infty} |y^m - y^0| = 0$, 所以

$$\lim_{m\to\infty} |(\alpha x^m + \beta y^m) - (\alpha x^0 + \beta y^0)| = 0,$$

即点列 $\{\alpha x^m + \beta y^m\}$ 收敛于 $\alpha x^0 + \beta y^0$.

有关 R^n 中点列极限的其它一些简单性质不再一一赘述. 下面给一个定理说明 R^n 中点列的收敛与实数列的收敛性之间的关系.

定理 1 设 R^n 中的点列

$$x^m = (x_1^m, x_2^m, \cdots, x_n^m),\ m = 1, 2, 3, \cdots,$$

则 $\{x^m\}$ 收敛的充分必要条件是 x^m 的每一个分量数列都收敛, 即对于每一个 i $(i = 1, 2, \cdots, n)$, 数列 $\{x_i^m\}, m = 1, 2, 3, \cdots$, 收敛.

证 必要性. 设 $\lim\limits_{m\to\infty} x^m = x^0 = (x_1^0, x_2^0, \cdots, x_n^0)$. 对于每一个 $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$, 由于

$$|x_i^m - x_i^0| \le \left(\sum_{k=1}^n |x_k^m - x_k^0|^2\right)^{\frac{1}{2}} = |x^m - x^0|,$$

又 $\lim\limits_{m\to\infty} |x^m - x^0| = 0$, 所以 $\lim\limits_{m\to\infty} |x_i^m - x_i^0| = 0$, 即

$$\lim_{m\to\infty} x_i^m = x_i^0,\ i = 1, 2, \cdots, n.$$

充分性. 设 $\lim\limits_{m\to\infty} x_i^m = x_i^0,\ i = 1, 2, \cdots, n$. 显然有

$$\lim_{m\to\infty} |x^m - x^0| = \lim_{m\to\infty} \left(\sum_{i=1}^n |x_i^m - x_i^0|^2\right)^{\frac{1}{2}} = 0,$$

其中 $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \cdots, x_n^0)$. 于是 $\lim\limits_{m\to\infty} x^m = x^0$.

以上我们用 R^n 中的欧氏距离定义出点列的收敛概念. 一般来说, 若一个集合的每一对元素均可唯一确定一个实数, 使得三条距离公理 (正定性, 对称性, 三角形不等式) 成立, 则该实数就可称为这对元素之间的距离. 一个集合连同其上定义的距离称为一个距离空间. 同一个集合可以有不同的距离, 因此作为距离空间是不同的. 例如 R^n 上除去欧氏距离, 还可以定义其它类型的距离, 常用的有

$$|x-y|_1=\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|,$$

$$|x-y|_\infty=\max_{1\le i\le n}|x_i-y_i|,$$

其中 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n), y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)\in R^n$. 请读者验证以上两种均满足距离公理. 较一般的还有取定 $1\le p<+\infty$, 记

$$|x-y|_p=\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

显然当 $p=2$ 时对应的是欧氏距离. 对于一般的 p 可以证明 $|x-y|_p$ 也满足距离公理. 事实上, 正定性和对称性显然, 只须证三角形不等式, 不妨设 $1<p<+\infty$. 先证明两个著名的不等式.

霍尔德 (Hölder) **不等式**: 设 $1<p<+\infty, 1<q<+\infty$ 且 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, 对于任意实数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 和 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 有

$$\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\le\left(\sum_{i=1}^{n}|a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^{n}|b_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

证 考虑函数 $f(x)=x^{\frac{1}{p}}-\frac{x}{p}-\frac{1}{q}\quad(0\le x\le 1)$. 当 $0<x<1$ 时 $f'(x)=\frac{1}{p}\left(x^{\frac{1}{p}-1}-1\right)>0$, 又 $f(1)=0$, 所以

$$f(x)<0,\ \forall x\in(0,1),$$

任取实数 $0<a\le b$, 令 $x=\dfrac{a}{b}$, 则

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{p}}\le\frac{1}{p}\frac{a}{b}+\frac{1}{q}.$$

经整理得

$$a^{\frac{1}{p}}b^{\frac{1}{q}}\le\frac{a}{p}+\frac{b}{q},$$

即

$$ab\le\frac{|a|^p}{p}+\frac{|b|^q}{q}. \tag{1}$$

显然 (1) 对于任意实数 a,b 成立.

不妨设 $\sum\limits_{i=1}^{n}|a_i|^p>0$, $\sum\limits_{i=1}^{n}|b_i|^q>0$. 对于任意正数 t 由 (1) 可得

$$a_ib_i=(ta_i)\left(\frac{b_i}{t}\right)\le\frac{t^p|a_i|^p}{p}+\frac{|b_i|^q}{t^qq}.$$

从而

$$\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\le\frac{t^p}{p}\sum_{i=1}^{n}|a_i|^p+\frac{1}{t^qq}\sum_{i=1}^{n}|b_i|^q.$$

取

$$t=\left(\sum_{i=1}^{n}|b_i|^q\right)^{\frac{1}{pq}}\left(\sum_{i=1}^{n}|a_i|^p\right)^{-\frac{1}{pq}},$$

则

$$\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\le\frac{1}{p}\left(\sum_{i=1}^{n}|a_i|^p\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\sum_{i=1}^{n}|b_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$
$$+\frac{1}{q}\left(\sum_{i=1}^{n}|a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^{n}|b_i|^q\right)^{1-\frac{1}{p}}.$$

再由 $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$, 可知 Hölder 不等式成立.

闵可夫斯基 (Minkovski) 不等式：设 $p \geq 1$ 对于任意实数 $a_i, b_i \quad (i=1,2,\cdots,n)$, 则

$$\left(\sum_{i=1}^{n}|a_i+b_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^{n}|a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n}|b_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

证 $p=1$ 不等式显然成立，设 $p>1$. 易知

$$\sum_{i=1}^{n}|a_i+b_i|^p \leq \sum_{i=1}^{n}|a_i|\,|a_i+b_i|^{p-1} + \sum_{i=1}^{n}|b_i|\,|a_i+b_i|^{p-1}.$$

取 $q>1$ 使得 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, 即 $q=\frac{p}{p-1}$. 利用 Hölder 不等式可得

$$\sum_{i=1}^{n}|a_i+b_i|^p \leq \left[\left(\sum_{i=1}^{n}|a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n}|b_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right]\left[\sum_{i=1}^{n}|a_i+b_i|^p\right]^{\frac{1}{q}}.$$

由此立即可知 Minkovski 不等式成立.

利用 Minkovski 不等式可直接推出：当 $1 \leq p < +\infty$ 时, $|x-y|_p$ 满足三角形不等式. 综上所述，对于任何 $1 \leq p \leq \infty$, $|x-y|_p$ 都可以定义为 R^n 上的距离，称之为 R^n 上的 $p-$ 距离. 这些距离与欧氏距离有如下关系：

命题 1 对于任意 $x, y \in R^n$ 有

$$\frac{1}{\sqrt{n}}|x-y| \leq |x-y|_\infty \leq |x-y|, \tag{2}$$

$$\frac{1}{\sqrt{n}}|x-y| \leq |x-y|_p \leq n^{\frac{1}{p}}|x-y|, \tag{3}$$

其中 $1 \leq p < +\infty$ (注意 $|x-y| = |x-y|_2$ 表示 x, y 之间的欧氏距离.)

证 设 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$, $y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$. 由于

$$|x-y|_\infty = \max\{|x_1-y_1|, |x_2-y_2|, \cdots, |x_n-y_n|\},$$

从而

$$|x-y|_\infty \le \left(\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \le n^{\frac{1}{p}}|x-y|_\infty,$$

其中 $1 \le p < +\infty$, 即

$$|x-y|_\infty \le |x-y|_p \le n^{\frac{1}{p}}|x-y|_\infty. \tag{4}$$

在 (4) 中取 $p=2$ 即得 (2). 对任意 $1 \le p < +\infty$, 由 (4) 得

$$|x-y|_p \le n^{\frac{1}{p}}|x-y|_\infty \le n^{\frac{1}{p}}|x-y|,$$

$$|x-y|_p \ge |x-y|_\infty \ge \frac{1}{\sqrt{n}}|x-y|.$$

从而 (3) 成立.

推论 1 设 $\{x^m\}$ 是 R^n 中的点列, x^0 是 R^n 中一点, 对于任意 $1 \le p \le \infty$, $\{x^m\}$ 在 p - 距离意义下收敛于 x^0 等价于 $\{x^m\}$ 在欧氏距离意义下收敛于 x^0, 即

$$|x^m - x^0|_p \to 0 \iff |x^m - x^0| \to 0. \tag{5}$$

证 由 (2) 和 (3) 可直接推出 (5).

注 此推论的结论可简单叙述为 R^n 上所有 p - 距离都与欧氏距离等价. R^n 上并非任意距离都与欧氏距离等价. 例如

$$\delta(x,y)=\begin{cases}0, & x=y\\ 1, & x\ne y,\end{cases} \quad \forall x,y\in R^n.$$

易证 $\delta(x,y)$ 满足距离公理. 由 δ 所得到的 R^n 上的距离称为离散距离. 在离散距离意义下点列 $\{x^m\}$ 收敛于 x^0, 即 $\lim\limits_{m\to\infty}\delta(x^m,x^0)=0$, 充分必要条件是存在自然数 M, 当 $m \ge M$ 时 $x^m = x^0$. 显然在离散距离意义下的收敛性不等价于在欧氏距离下的收敛性. 如无声明, 本课程所提到的 R^n 中点列的收敛性都是按欧氏距离意义下的收敛性.

关于实数列的 Cauchy 收敛原理可以推广到 R^n 中的点列, 首先给出一个定义:

R^n 中的点列 $\{x^m\}$ 称为基本列或 Cauchy 列，如果任给 $\varepsilon > 0$, 存在 M, 使得只要 $m, l > M$ 就有

$$|x^m - x^l| < \varepsilon.$$

定理 2 (Cauchy 收敛原理) R^n 中点列 $\{x^m\}$ 是收敛的充分必要条件是 $\{x^m\}$ 为基本列.

证 设 $x^m = (x_1^m, x_2^m, \cdots, x_n^m), m = 1, 2, 3, \cdots$. 首先证必要性. 如果 $\lim\limits_{m\to\infty} x^m = x^0 = (x_1^0, x_2^0, \cdots, x_n^0)$, 由定理 1 可知

$$\lim_{m\to\infty} x_i^m = x_i^0, \quad i = 1, 2, \cdots, n.$$

利用实数的 Cauchy 收敛原理可得，对于任给的 $\varepsilon > 0$, 存在 M, 使得只要 $m, l > M$, 就有

$$|x_i^m - x_i^l| < \frac{1}{\sqrt{n}}\varepsilon,\ i = 1, 2, \cdots, n.$$

从而当 $m, l > M$ 时

$$|x^m - x^l| = \left(\sum_{i=1}^n |x_i^m - x_i^l|^2\right)^{\frac{1}{2}} < \varepsilon,$$

即 $\{x^m\}$ 是 R^n 中的基本列. 再证充分性. 设 $\{x^m\}$ 是 R^n 中的基本列，任给 $\varepsilon > 0$, 存在 M, 只要 $m, l > M$ 时，就有

$$|x^m - x^l| < \varepsilon.$$

从而

$$|x_i^m - x_i^l| \le \left(\sum_{k=1}^n |x_k^m - x_k^l|^2\right)^{\frac{1}{2}} = |x^m - x^l| < \varepsilon,$$

其中 $i = 1, 2, \cdots, n$. 由此可知 $\{x_i^m\}$ 是实数的基本列. 再用实数的 Cauchy 收敛原理可知存在 x_i^0, 使得

$$\lim_{m\to\infty} x_i^m = x_i^0, \quad i = 1, 2, \cdots, n.$$

由定理 1 得 $\lim\limits_{m\to\infty} x^m = x^0 = (x_1^0, x_2^0, \cdots, x_n^0)$.

此定理说明 R^n 是完备的，从证明可以看出 R^n 的完备性是从实数的完备性推出的.

三、邻域、开集、闭集

邻域，开集，闭集都是最基本的拓扑概念. 我们所叙述的是从 R^n 上的距离诱导出的这些概念.

设 $x^0 \in R^n, U$ 是 R^n 的子集，称 U 是 x^0 的一个邻域，如果存在 $r > 0$, 使得

$$U \supseteq B(x^0, r) = \{x \in R^n; |x - x^0| < r\}.$$

设 $A \subseteq R^n$, 如果 $x \in A \Rightarrow$ 存在 x 的邻域 $U \subseteq A$, 则称 A 为开集. 如果 A 的余集 (记为 A^c 或者 $R^n \setminus A$) 是开集，则称 A 为闭集. 显然 R^n 是开集，所以空集 ϕ 是闭集，约定 ϕ 也是开集，从而 R^n 也是闭集.

定理 3 有限多个开集的交是开集, 任意多个开集的并是开集.

证 设 $A_1, A_2, \cdots, A_m$ 都是 R^n 中的开集，令

$$A = \bigcap_{i=1}^{m} A_i.$$

如果 $x \in A$, 则 $x \in A_i, i = 1, 2, \cdots, m$. 由于 A_i 是开集，从而存在 $r_i > 0$, 使得

$$B(x, r_i) \subseteq A_i, \quad i = 1, 2, \cdots, m.$$

取 $r = \min\{r_1, r_2, \cdots, r_m\} > 0$, 显然

$$B(x, r) \subseteq B(x, r_i) \subseteq A_i, \quad i = 1, 2, \cdots, m.$$

从而

$$B(x, r) \subseteq \bigcap_{i=1}^{m} A_i = A,$$

即 A 是开集. 设

$$A=\bigcup_{i\in I}A_i,$$

其中 I 是任意指标集 (有限集或无穷集), 且 $\forall i\in I, A_i$ 是开集. 如果 $x\in A$, 则存在 $i\in I$ 使得 $x\in A_i$, 再由 A_i 是开集, 从而存在 $r>0$, 使得

$$B(x,r)\subseteq A_i\subseteq A,$$

于是 A 为开集.

定理 4 有限多个闭集的并是闭集, 任意多个闭集的交是闭集.

证 设 $A_1,A_2,\cdots,A_m$ 均是 R^n 中的闭集, 令

$$A=\bigcup_{i=1}^{m}A_i.$$

由于

$$A^c=\bigcap_{i=1}^{m}A_i^c,$$

A_i^c 是开集 $(i=1,2,\cdots,m)$, 利用定理 3 可知 A^c 为开集, 所以 A 是闭集. 同理可证任意多个闭集的交是闭集.

下面给一个判断 R^n 中的集合是否为闭集的常用准则:

定理 5 设 $A\subseteq R^n, A$ 为闭集的充要条件是: 对于 A 中任意点列 $\{x^m\}$, 如果 $\lim\limits_{m\to\infty}x^m=x^0$, 则 $x^0\in A$.

证 必要性. 用反证法, 设 A 是闭集, 且存在 A 中的点列 $\{x^m\}$, 使得 $\lim\limits_{m\to\infty}x^m=x^0$, 但 $x^0\notin A$, 即 x^0 属于 A 的余集 A^c. 由于 A 是闭集, 则 A^c 是开集, 从而存在 x^0 的邻域 U 使得 $U\subseteq A^c$. 由此可知存在 $r>0$, 使得当 $|x-x^0|<r$ 时, $x\notin A$. 这与 $x^m\in A(m=1,2,3,\cdots)$, 且 $x^m\to x^0$ 矛盾!

充分性. 设 A 中收敛点列的极限均属于 A. 任取 $x\in A^c$, 则存在 $r>0$, 使得 $B(x,r)\subseteq A^c$, 事实上, 否则取正数列 $\{r_m\}$ 满足 $r_m\to 0, B(x,r_m)\cap A\neq\phi$, 于是可选取 A 中的点列 $\{x^m\}$, 使得

$$|x^m-x|<r_m\to 0,$$

即 $\lim\limits_{m\to\infty} x^m = x$. 由假设得 $x \in A$, 矛盾！于是 A^c 为开集，即 A 为闭集.

注 若 A 中收敛点列的极限均属于 A, 则通常称 A 为列闭. 定理 5 说明在 R^n 中闭与列闭等价，这一结论对一般距离空间都成立.

设 $A \subseteq R^n, x \in R^n$, 现给出以下定义：

如果 A 包含 x 的一个邻域. 则称 x 为 A 的内点. 若 A^c 包含 x 的一个邻域，则称 x 为 A 的外点，如果 x 既不是 A 的内点，也不是 A 的外点，即对于 x 的任意邻域 U 均有 $U\cap A \neq \phi, U\cap A^c \neq \phi$, 则称 x 是 A 的边界点. 如果 x 的任一邻域都含有 A 中的点，则称 x 是 A 的触点. 如果 x 的任一邻域都含有 A 中异于 x 的点，则称 x 是 A 的聚点.

A 的所有内点组成的集合称为 A 的内部，记为 A^0, A 的所有外点组成的集合称为 A 的外部. A 的所有边界点组成的集合称为 A 的边界，记为 ∂A. A 的所有触点组成的集合称为 A 的闭包，记为 $\overline{A}$. A 的所有聚点组成的集合称为 A 的导集，记为 A'. 显然有以下关系

(i) $A^0 \subseteq A \subseteq \overline{A},\ A^0 \subseteq A' \subseteq \overline{A}$

(ii) $\overline{A} = A \cup \partial A = A' \cup \partial A = A^0 \cup \partial A$

(iii) $A^0 = A \setminus \partial A = A' \setminus \partial A = \overline{A} \setminus \partial A$

(iv) $(A^c)^0$ 是 A 的外部且 $((A^c)^0)^c = \overline{A}, (\overline{A^c})^c = A^0$.

这些关系的证明留给读者. 若 $x \in A \setminus A'$, 则存在 x 的邻域，使得该邻域内属于 A 的点仅为 x, 这样的点称为 A 的孤立点. 此外，易证以下性质：

(a) $A \subseteq B \Rightarrow A^0 \subseteq B^0, \overline{A} \subseteq \overline{B}$.

(b) $\overline{A\cup B} = \overline{A} \cup \overline{B},\ \overline{A\cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$.

(c) $(A\cap B)^0 = A^0 \cap B^0,\ (A\cup B)^0 \supseteq A^0 \cup B^0$.

证 (a) 显然成立，现证 (b). 若 $x \in \overline{A\cup B}$, 则 x 的每一个邻域