傅里叶级数与广义函数论

周锦诚 著

科 学 出 版 社

1 9 8 3

内 容 简 介

自从广义函数理论创立以来，在数学、力学和物理学中有了日益广泛的应用，本书使用傅里叶级数的技巧，简明扼要地介绍广义函数理论的基础，以便于广大科技人员学习这一理论. 本书第一章论述周期广义函数与傅里叶级数的关系；第二章介绍在 $\mathbf{R}^d$ 的开集上定义的广义函数；第三章阐述傅里叶变换；最后第四章介绍积分理论.

本书可供高等学校数理专业师生和有关科技工作者参考.

傅里叶级数与广义函数论

周锦诚 著

责任编辑 刘嘉善

科 学 出 版 社 出版

北京朝阳门内大街 137 号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1983 年 4 月第 一 版 开本：850×1168 1/32

1983 年 4 月第一次印刷 印张：6 7/8

印数：0001—10,400 字数：176,000

统一书号：13031·2202

本社书号：3012·13—1

定价：1.30 元

目　　录

第一章　周期广义函数

给定一个函数 $f: \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$[1]. 如果它是周期函数，即

$$f(x+2\pi k)=f(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}^d \qquad \forall k \in \mathbb{Z}^d,$$

并且连续(其实只要可积)，那末可以定义它的 Fourier 系数

$$\hat{f}(k)=\int_0^{2\pi}\cdots\int_0^{2\pi} f(x)e^{ik\cdot x}dx,$$

其中 $k\cdot x=k_1x_1+\cdots+k_dx_d$ 表示 $k\in\mathbb{Z}^d$ 看作 $\mathbb{R}^d$ 的元素时与 $x\in\mathbb{R}^d$ 的数量积. 通常人们研究下列称作 Fourier 级数的函数项级数的收敛性:

$$x \longmapsto \frac{1}{(2\pi)^d}\sum_{k\in\mathbb{Z}^d}\hat{f}(k)e^{-ik\cdot x} \tag{1}$$

及其与给定函数 f 的联系.

单从收敛问题来说，即只考虑点收敛，级数(1)并不一定收敛.另一方面，$(x\longmapsto \hat{f}(k)e^{-ik\cdot x})$ 函数的导数将会自然地涉及到 Fourier 级数

$$x \longmapsto \left(\frac{1}{2\pi}\right)^d\sum_{k\in\mathbb{Z}^d}\frac{\partial^{\alpha_1+\cdots+\alpha_d}}{\partial x_1^{\alpha_1}\cdots\partial x_d^{\alpha_d}}\hat{f}(k)e^{-ik\cdot x} \tag{1'}$$

的研究. 假如我们称一数列 $g(k)$ 满足以下条件:

$\exists C$ 和 $\exists l$ 使得 $\forall k$, $(1+|k|)^{-l}|g(k)|\leqslant C$, 为一"缓增数列"; (1′) 式提供给我们充足的理由去研究具有缓增数列为系数的 Fourier 级数. 我们证明它定义了一个"周期广义函数". 反之，所有周期广义函数也总可表示为一个系数为缓增的 Fourier 级数.

---

1) 本书以 $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}$ 分别表示实数域，复数域，整数环和自然数集. $\mathbb{R}^d$, $\mathbb{Z}^d$ 等则表示它们的 d 次乘积.

另一方面，指数函数 $x \longmapsto \exp(ik \cdot x)$ 的好处之一在于(如同多项式一样)计算导数和积分很方便．如果微积分运算都能在$\sum$号下进行，那末对 Fourier 级数来说，这两种运算都是非常简单的．我们将指出，这恰好可以把级数 (1) 解释为广义函数，并直接导出所有 $\mathbf{R}^d$ 上的周期广义函数就是 2^d 个连续函数的(若干阶)导数(结构定理)的和．

§1. 关于函数项级数的回顾

由于一个多变量函数的 Fourier 级数是一个多重级数，我们将给出有关这方面的结果．但尽管如此，如有需要，我们仍可回到习常的单变量情形．

定义．所谓由 F 上在 E 中取值的函数组成的 (j) 多重 (以后我们将略去“多重”这个词)函数列，是指对于每个 $k \in \mathbf{Z}^j$，有一个从集合 F 到集合 E 的函数 f_k 相对应的因变量．

例．

1. 对每一个 $k \in \mathbf{Z}^d$，定义 $\mathbf{R}^d$ 上的函数 $f_k: x \longmapsto c_k e^{-ik\cdot x}$，其中 $c_k \in \mathbf{C}$；这样，一个 Fourier 级数以自然的方式提供了一个特殊的函数列．

2. 为了方便，可置 $\mathbf{R}^0 = \{0\}$，即空间缩减为它的零元，那末每个函数 $f_k: \mathbf{R}^0 \to E$ 可看作等同于它的值 $a_k = f_k(0) \in E$；从而这样的函数列等价于 E 内的一个点列．

当 E 是 $\mathbf{R}$ 或 $\mathbf{C}$ 上的赋范向量空间时，其范数将记作 $|\ |$，特别是当 $E = \mathbf{C}$ 或 $\mathbf{R}$ 时，范数 $|z| = [a^2 + b^2]^{\frac{1}{2}}$，其中 $z = a + ib \in \mathbf{C}$，或者 $|x|$，其中 $x \in \mathbf{R}$．这时，对于每个函数 f_k，有一个有限或无限的非负数 $\|f_k\|$，定义为

$$\|f_k\| = \sup_{x \in F} |f_k(x)|.$$

当它有限时，称作 f_k 的**一致范数**．

此后，我们将总假设空间 E 是完备赋范向量空间；甚至将取

$E = \mathbf{C}$ 或 $\mathbf{R}$，这对我们的目的来说也已足够.

定义.（指标 k 遍历整数集）. 一个函数列 g_k 称作"点"（相应地，"一致"）收敛于函数 g，是指对于所有 $\varepsilon>0$ 和 $x\in F$（相应地，对于所有 $\varepsilon>0$），存在一个可能依赖于 ε 和 x（相应地，只依赖于 ε）的整数 l_0，使得对于所有 $k\in \mathbf{N}$，条件 $k>l_0$ 蕴含 $|g_k(x)-g(x)|\leqslant\varepsilon$（相应地，$\|g_k-g\|\leqslant\varepsilon$）.

设 J_l 为 $\mathbf{Z}^j$ 的一个子集列，即对于每个整数 l，有一子集 $J_l\subset\mathbf{Z}^j$ 相对应. J_l 称为 $\mathbf{Z}^j$ 的竭尽子集列，是指它满足

i) $J_l\subset J_{l+1}$，且 $\bigcup\limits_{l=1}^{\infty} J_l=\mathbf{Z}^j$；

ii) 每个 J_l 只包含有限个元素.

条件 i) 意味着集合 J_l 全体是一个套一个的，而每个 $k\in\mathbf{Z}^j$ 最终都将属于某个 J_l.

给定一个函数列 $(f_k)_{k\in\mathbf{Z}^j}$，对每个 $\mathbf{Z}^j$ 的竭尽列 J_l，可以作一个单重函数列

$$g_l=\sum_{k\in J_l} f_k.$$

这样，如果取 $J_l=\{k\in\mathbf{Z}^j;\ |k_1|+\cdots+|k_j|\leqslant l\}$，那末有

$$g_l=\sum_{|k|\leqslant l} f_k,$$

其中对于 $k\in\mathbf{Z}^j$，置 $|k|=|k_1|+\cdots+|k_j|$.

定义.（通项为 f_k 的收敛级数）设 $(f_k)_{k\in\mathbf{Z}^j}$ 是一个给定的函数列. 我们称通项为 f_k 的级数点收敛（相应地，一致收敛），是指对于每个竭尽列 $J_l\subset\mathbf{Z}^j$，对应的函数列 $(g_l)_{l\in N}$ 点收敛（相应地，一致收敛）于一个极限 g. 注意，这个极限与所选择的序列 J_l 无关；它称为通项为 f_k 的级数的极限，记作 $g=\sum f_k$.

按. 1) g 与序列 J_l 的选择无关性可由赋范空间上的极限唯一性得出. 事实上，对于任何两个 $\mathbf{Z}^j$ 的竭尽子集列 J_l 和 J'_l，可以如下构造（参看定理 1 的证明）第三个由 J_l 和 J'_l 中提取的元素所组成的序列 J''_l：对于每一个给定的 l_0，存在 $p\geqslant l_0$ 和 $q\geqslant l_0$，使

得 J_p 和 J_q' 是 J_l'' 的组成部分.换句话说,可从序列 $g_l=\sum\limits_{k\in J_l} f_k$ 中选出子列,它也是 $g_l''=\sum\limits_{k\in J_l''} f_k$ 的子列. 由于一个收敛序列的所有子列收敛于同一极限，从而 g_l 和 g_l'' 有相同的极限. 同样，g_l' 和 g_l'' 也有相同的极限,以至 g 是唯一确定的.

2）我们引入的级数收敛的概念,在大部分经典论述中,(对于数值单重级数情形)对应所谓"绝对收敛",因为我们规定级数的收敛与求和过程中所取项的次序无关. 通常在经典论述中所运用的收敛,总是取序列 $J_l=\{1, 2, \cdots, l\}$. 当然,在 N 中,选取 $J_l=\{1, \cdots, l\}$ 看来是自然的,但在 $\mathbf{Z}^j$ 情形,并非如此. 考虑到在第四章中定义的奇异积分，我们还将对级数提出关于特殊选择的序列 J_l 的收敛性，即"J_l 奇异收敛性". 有些文献把我们的收敛概念仍叫做"可和".

3）符号 $\sum f_k$ 是意味着 $\lim\limits_{l\to+\infty}\sum\limits_{k\in J_l} f_k$，其中 J_l 是一个任意的竭尽列. 这个符号在极限不存在，或只对个别的序列 J_l 存在时没有意义. 这时称谓 $\sum f_k$ 无意义,或发散.

定理 I-1.

1）如果 $\sum f_k$ 一致收敛,那末它也点收敛.

2）为了 $\sum f_k$ 一致收敛，只需 $\sum\|f_k\|$ 收敛，而为了 $\sum\|f_k\|$ 收敛,只需存在一个竭尽列 J_l，使得正数列 $h_l=\sum\limits_{k\in J_l}\|f_k\|$ 有界.(在后一情形,级数 $\sum f_k$ 称作**范数收敛**.)

证明.

1）因为 $\sum f_k$ 一致收敛，故存在函数 $g: F\to E$，使得对于任何 $\mathbf{Z}^j$ 的竭尽子集列 (J_l) 和任何给定的 $\varepsilon>0$，存在 p 满足

$$\sup_x\left|\sum_{k\in J_l} f_k(x)-g(x)\right|\leqslant\varepsilon,\quad \forall l>p.$$

从而对于每个固定的 $x_0\in F$，自然有

$$\left|\sum_{k\in J_l} f_k(x_0)-g(x_0)\right|\leqslant\varepsilon,\quad \forall l>p.$$

2）先指出，如果正数列 $h_l = \sum_{k\in J_l} \|f_k\|$ 收敛，那末对于所有的竭尽列 J'_l，所对应的序列 h'_l 收敛于同一极限．事实上，序列 h_l 的极限 h 也就是它的上确界，因为这一序列递增．我们再指出，h 也等于序列 h'_l 的上确界．论证如下：

设 $J'_l = \{a_1, \cdots, a_q\}$，则对于每个 a_i，可求得整数 $p(i)$，使得 $a_i \in J_{p(i)}$，因为 J_l 是竭尽的．如果再置 $p = \max(p(1), \cdots, p(q))$，那末对于 $i = 1, \cdots, q$，便有

$$a_i \in J_{p(i)} \subset J_p, \quad 因为\ p \geqslant p(i);$$

从而 $J'_l \subset J_p$，以至

$$h'_l = \sum_{k\in J'_l} \|f_k\| \leqslant \sum_{k\in J_p} \|f_k\| \leqslant h.$$

上式对于任何 l 都成立，即 h 是 h'_l 的上界．因此有界递增列 h'_l 收敛于极限 $h' \leqslant h$．交换 J_l 和 J'_l 的地位，同理可得 h' 也是序列 h_l 的上界，以至 $h \leqslant h'$．

最后指出，在这些条件下一致收敛成立，即给定竭尽列 J_l，则对于任何 $\varepsilon > 0$，存在 $l_0 \in \mathbf{N}$，使得当 $p > l_0$ 和 $q > l_0$ 时，有

$$\sup_{x\in F} |g_p(x) - g_q(x)| \leqslant \varepsilon, \tag{I-1.1}$$

其中 $g_l(x) = \sum_{k\in J_l} f_k(x)$．这也就是说，$g_l$ 形成从 F 到 E 的有界函数空间中对一致收敛范数的 Cauchy 列（这一空间是完备赋范空间，因为 E 假定是完备的）．但（I-1.1）式是显然的，因为对于所有 $x \in F$，有

$$\begin{aligned}|g_p(x) - g_q(x)| &\leqslant |g_p(x) - g_{l_0}(x)| + |g_{l_0}(x) - g_q(x)| \\ &\leqslant (h_p - h_{l_0}) + (h_q - h_{l_0}).\end{aligned}$$

但由假设正数列 h_l 收敛，故不等式右端当 l_0 充分大时便小于 ε．证毕．

注．在第 2）部分的证明中，我们也证明了：为了一个正项级数 $\sum_k a_k$，$a_k \geqslant 0$ 收敛，只需它对某个列 J_l 收敛．从而对于这样的级数，J_l 奇异收敛等价于收敛（在我们的意义下，即对于所有

竭尽列收敛). 为了 $\sum a_k$ 收敛，只需它的每一项不大于某一收敛级数的对应项(称为"比较准则").

例.

1. 设 $a_k \in \mathbf{R}$. 我们将指出: $\sum a_k, k \in \mathbf{Z}^j$ 收敛(在我们的意义下)当且仅当 $\sum |a_k|$ 收敛. 这点我们已在上一个按 2)中提到过.

事实上,由定理 1, 只需指出必要性,而这当 a_k 同号时是显然的. 因此考虑 a_k 不同号的情形. 我们以 J^+ 表示 $a_k \geqslant 0$ 的指标 $k \in \mathbf{Z}^j$ 的集合, J^- 则是它的余集. 那末可以指出, 如果 $\sum |a_k|$ 不收敛, 则必存在一个竭尽列 J_l 使得序列 $g_l = \sum_{k \in J_l} a_k$ 也不收敛. 其实当 $\sum |a_k|$ 不收敛时, 对于任何给定的竭尽列 J_l, 下列序列之一:

$$g_l^+ = \sum_{k \in J_l \cap J^+} |a_k| \quad 和 \quad g_l^- = \sum_{k \in J_l \cap J^-} |a_k|$$

必趋向于无限,否则 $h_l = \sum_{h \in J_l} |a_k|$ 有界, 因而收敛. 为了确定起见, 不妨设 $\lim\limits_{l \to +\infty} g_l^+ = +\infty$. 则我们可构造一个 $\mathbf{Z}^j$ 的竭尽列, 记作 J'_l, 使得 $g'_{2l+1} = \sum_{k \in J'_{2l+1}} a_k \geqslant l$, 以至 g'_l 发散. 事实上, 由于 $g_l^+ \to +\infty$, 存在 l_1 使得 $g_{l_1}^+ \geqslant 1$. 因此, 置 $J'_1 = J_{l_1} \cap J^+$ 和 $J'_2 = J_{l_1}$; 则有

$$g'_2 = \sum_{k \in J'_2} a_k = \sum_{k \in J'_1} a_k + \sum_{k \in J_{l_1} \cap J^-} a_k = \sum_{k \in J'_1} |a_k| - \sum_{k \in J_{l_1} \cap J^-} |a_k|.$$

但 $\sum_{k \in J_{l_1} \cap J^-} |a_k|$ 是一个有限和; 由 g_l^+ 趋向无穷, 又可得 l_2 满足

$\sum_{k \in J_{l_2} \cap J^+} a_k - \sum_{k \in J_{l_1} \cap J^-} |a_k| \geqslant 2$. 显然, 可假设 $l_2 > l_1$, 因为所有包含 J_{l_2} 的 J_l 也满足该不等式. 再置 $J'_3 = J'_2 \cup (J_{l_2} \cap J^+)$ 和 $J'_4 = J_{l_2}$, 并依此类推. 所构造的序列 J'_l 即符合要求.

2. 设 $a_k \in E$, 而 E 为有限维空间. 那末仍有同样结果. 事实上, 首先可假设 E 是 $\mathbf{R}$ 上的向量空间, 因为所有 $\mathbf{C}$ 上的向量空间

也是 $\mathbf{R}$ 上的向量空间. 另一方面. 可以指出[1], 所有有限维向量空间上的范数是等价的,从而对元素 $e = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n \in E$, 可取下列量作为范数:

$$|e| = |\lambda_1| + \cdots + |\lambda_n|.$$

其中 $e_1, \cdots, e_n$ 是 E 中的任意一组基. 这样一来, 元素 a_k 可记作

$$a_k = \lambda_{1k} e_1 + \cdots + \lambda_{nk} e_n;$$

同时,

$$|a_k| = |\lambda_{1k}| + \cdots + |\lambda_{nk}|.$$

注意到 $\sum a_k$ 的收敛等价于 n 个级数 $\sum\limits_k \lambda_{1k}, \cdots, \sum\limits_k \lambda_{nk}$ 的收敛,以及 $\sum |a_k|$ 的范数收敛等价于 n 个级数 $\sum\limits_k |\lambda_{1k}|, \cdots, \sum\limits_k |\lambda_{nk}|$ 的绝对收敛,我们又回到了例 1.

3. 以下例子指出, 甚至当 $E = \mathbf{R}$ 时, 一致收敛也不一定蕴含范数收敛.

我们取 $F = [0, 1]$, $f_k: F \to \mathbf{R}$ 满足

$$f_k(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{k}, & \text{当 } x = \dfrac{1}{k}, \\ 0, & \text{当 } x \neq \dfrac{1}{k}, \end{cases} \quad \forall k \in \mathbf{N}.$$

由于 $\sup\limits_{x \in F} |f_k(x)| = \dfrac{1}{k}$ 和级数 $\sum \dfrac{1}{k}$ 发散, 级数 $\sum f_k$ 并非范数收敛. 另一方面,对于所有给定的 $\mathbf{N}$ 的竭尽子集列 J_l 和任何 $\varepsilon > 0$, 可求得 l_0 和固定的 $J_{l_0} \supset \{1, \cdots, k_0\}$, 其中 $\dfrac{1}{k_0} < \varepsilon$. 从而当 q 和 p 为大于 l_0 的整数时,有

---

1) 参看 J. Dieudonné, Eléments d'Analyse, t. 1, p. 112. 有关命题简证如下: 设有限维空间 E 的元素 e 有坐标 $(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$, 那末对 E 上的任何范数 $|\cdot|$, 可指出 $c_1 \max\limits_i |\lambda_i| \leqslant |e| \leqslant c_2 \max\limits_i |\lambda_i|$.

不等式右端可用三角形不等式得到,左端可利用 $e \longmapsto \lambda_i$ 是连续线性泛函.

$$\left|\sum_{k\in J_q} f_k(x)-\sum_{k\in J_p} f_k(x)\right|\leqslant\frac{1}{k_0},\quad \forall x\in F=[0,1].$$

4. 最后我们给出一个例子，它指出当 E 不是有限维时，例 2 的结果不成立. 即存在着在 E 上取值的级数，它在我们的意义下收敛，但并非范数收敛.

取 E 为 $[0,1]\to\mathbf{R}$ 的有界函数（不一定连续）空间，赋以范数 $\|f\|=\sup_{x\in[0,1]}|f(x)|$. 则它是完备赋范空间；再取 $f_k\in E$ 如上例所定义. 正如我们刚指出的，级数 $\sum f_k$ 收敛但不范数收敛.

下面我们不加证明地给出确保求和号下求积和求导的合法性的一些初等定理.

定理 I-2. 设 $f_k:K\to\mathbf{C}$, $k\in\mathbf{Z}^j$ 是 $\mathbf{R}^d$ 的紧集（即有界闭集）K 上的连续函数列.

1）如果级数 $\sum f_k$ 一致收敛于 f，那末函数 f 连续，且

$$\int_K f(x)dx=\sum\int_K f_k(x)dx.$$

2）如果每个函数 f_k 在 K 的某个邻域上有定义，且在 K 上有导数 f_k'，使得 $\sum f_k'$ 在 K 上一致收敛，而 $\sum f_k$ 在 K 上点收敛，那末 $\sum f_k$ 在 K 上一致收敛于可导函数 f，且

$$f'=\sum f_k',$$

其中 f_k' 表示关于变量 x_j 之一的导数.

§2. 空间 $\mathscr{D}_{2\pi}(\mathbf{R}^d)$ 和 Fourier 级数

我们以 $\mathscr{D}_{2\pi}(\mathbf{R}^d)$ 表示 $\mathbf{R}^d$ 上在 $\mathbf{C}$ 中取值的 C^∞ 周期函数构成的向量空间，这里周期性是指

$$f(x+2\pi k)=f(x),\quad \forall k\in\mathbf{Z}^d.$$

由于每个元素 $f\in\mathscr{D}_{2\pi}(\mathbf{R}^d)$ 连续，对于每个 $k\in\mathbf{Z}^d$ 可考虑

$$\hat{f}(k)=\int_0^{2\pi}\cdots\int_0^{2\pi}f(x)e^{ik\cdot x}dx,$$

它称为 f 的第 k 个 Fourier 系数.

命题I-3. 函数 $f\in\mathscr{D}_{2\pi}(\mathrm{R}^d)$ 的 Fourier 系数 $\hat{f}(k)$ 形成一个急降序列，即用 $|k|$ 代表 $|k_1|+\cdots+|k_2|$，有

$$\forall p\in\mathrm{N},\quad \lim_{|k|\to+\infty}|k|^p\hat{f}(k)=0.$$

证明. 在 $\hat{f}(k)$ 的定义式中对 x_j 进行分部积分，则对 $k_j\neq 0$，可得

$$\hat{f}(k)=\int_0^{2\pi}\cdots\int_0^{2\pi}\left[\left(\frac{1}{ik_j}f(x)e^{ik\cdot x}\right)_{x_j=0}^{x_j=2\pi}\right.$$

$$\left.-\int_0^{2\pi}\frac{1}{ik_j}\left(\frac{\partial}{\partial x_j}f\right)(x)e^{ik\cdot x}dx_j\right]dx_1,\cdots dx_{j-1}dx_{j+1}\cdots dx_d.$$

考虑到 f 的周期性，被积出部分(对 x_j 而言)为零，即

$$-ik_j\hat{f}(k)=\int\left(\frac{\partial}{\partial x_j}f\right)(x)e^{ik\cdot x}dx,$$

其中我们以 $\int g(x)dx$ 来记 $\int_0^{2\pi}\cdots\int_0^{2\pi}g(x)dx_1\cdots dx_d$. 依此类推，当 $k_1k_2\cdots k_d\neq 0$，我们得到

$$(-ik_1)^{\alpha_1}\cdots(-ik_d)^{\alpha_d}\hat{f}(k)=\int\left(\frac{\partial^{\alpha_1+\cdots+\alpha_d}}{\partial x_1^{\alpha_1}\cdots\partial x_d^{\alpha_d}}f\right)(x)e^{ik\cdot x}dx. \tag{I-2.1}$$

再利用多项展开公式

$$(|k_1|+\cdots+|k_d|)^p=\sum_{p_1+\cdots+p_d=p}\frac{p!}{p_1!\cdots p_d!}|k_1|^{p_1}\cdots|k_d|^{p_d},$$

其中求和对所有满足 $p_1+\cdots+p_d=p$ 的 $(p_1,\cdots,p_d)\in\mathrm{N}^d$ 来进行，则得到

$$|k|^p|\hat{f}(k)|=\sum_{p_1+\cdots+p_d=p}\frac{p!}{p_1!\cdots p_d!}\left|\int\left(\frac{\partial^{p_1+\cdots+p_d}}{\partial x_1^{p_1}\cdots\partial x_d^{p_d}}f\right)(x)e^{ik\cdot x}dx\right|. \tag{I-2.1$'$}$$

引入

$$F_p=\max_{p_1+\cdots+p_d=p}\max_x\left|\left(\frac{\partial^{p_1+\cdots+p_d}}{\partial x_1^{p_1}\cdots\partial x_d^{p_d}}f\right)(x)\right|,$$

从而对于所有 p 有下式成立

$$|k|^p|\hat{f}(k)|\leqslant(2\pi)^dF_pd^p \tag{I-2.2}$$

或

$$|k|^p|\hat{f}(k)| \leqslant \frac{1}{|k|}[(2\pi)^d F_{p+1} d^{p+1}],$$

后者当 $|k| \to +\infty$ 时趋向于零.

记号. 从现在开始，当不致引起混淆时，我们以 $\int \cdots dx$ 表示多重积分 $\int_0^{2\pi} \cdots \int_0^{2\pi} \cdots dx_1 \cdots dx_d$，而对每个 $(q)=(q_1, \cdots, q_d) \in \mathbf{N}^d$，则以 $D^{(q)}f$ 表示 $(i)^{q_1+\cdots+q_d} \frac{\partial^{q_1+\cdots+q_d} f}{\partial x_1^{q_1} \cdots \partial x_d^{q_d}}$. 对于 $(p)=(p_1, \cdots, p_d)$，$(p) \leqslant (q)$ 是指 $p_1 \leqslant q_1, \cdots, p_d \leqslant q_d$. 同时，还记 $C_{(q)}^{(p)} = \frac{(q)!}{(p)!(q-p)!}$，这里 $(q)! = q_1! \cdots q_d!$ 等等. $|p|$ 则表示 $p_1 + \cdots + p_d$，而 $k^{(q)} = k_1^{q_1} \cdots k_d^{q_d}$. 这样一来，公式 (I-2.1) 可重写为

$$k^{(q)}\hat{f}(k) = \int (D^{(q)}f)(x) e^{ik\cdot x} dx,$$

即

$$k^{(q)}\hat{f}(k) = (\widehat{D^{(q)}f})(k)$$

且 (I-2.1)′ 可重写为

$$|k|^p|\hat{f}(k)| = \sum_{|q|=p} \frac{p!}{(q)!} \left|\int (D^{(q)}f)(x) e^{ik\cdot x} dx\right|.$$

我们最经常用字母 x, y, u 来表示 $\mathbf{R}^d$ 的元素，用字母 k, h 来表示 $\mathbf{Z}^d$ 的元素，用字母 l, p, q 来表示非负整数，用 $(p), (q), (\alpha), (\beta), (\gamma)$ 来表示 $\mathbf{N}^d$ 的元素. $x=(x_1, \cdots, x_d) \in \mathbf{R}^d$ 的范数记作 $|x|$，等于 $|x_1| + \cdots + |x_d|$.

命题 I-4. 设 a_k 是一个急降复数列；置 $f_k(x) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^d a_k e^{-ik\cdot x}$，那末，定义在 $\mathbf{R}^d$ 上的函数项级数 $\sum f_k$ 范数收敛，从而也一致收敛. 同时，对于每个固定的 $(p) \in \mathbf{N}^d$，级数 $\sum D^{(p)} f_k$ 也如此. 从而，$\sum f_k$ 定义了一个元素 $f \in \mathscr{D}_{2\pi}(\mathbf{R}^d)$，且满足 $\int f(x) e^{ik\cdot x} dx = a_k$.

证明. 显然，对于任何 $(p) \in \mathbf{N}^d$，有

$$(2\pi)^d \sup_x |D^{(p)} f_k(x)| = |k^{(p)} a_k|.$$

由比较准则，只需指出 $|k^{(p)} a_k|$ 可小于某收敛级数的通项.

由序列 a_k 的急降假设，给定 $(p) \in \mathrm{N}^d$，可求得常数 C，使得

$$\left| k^{(p)} |a_k| \right| \leqslant \frac{C}{(1+|k|)^{d+1}}.$$

而根据与积分相比较的判别法，已知通项为 $\dfrac{C}{(1+|k|)^{d+1}}$ 的级数是收敛的. 证毕.

定义. 对于所有 $f \in \mathscr{D}_{2\pi}(\mathrm{R}^d)$，我们称级数 $\sum_{k \in \mathbf{Z}^d} \left(x \longmapsto \left(\frac{1}{2\pi}\right)^d \hat{f}(k) e^{-ik\cdot x} \right)$ 为 f 的 Fourier 级数，$\hat{f}(k)$ 为 f 的第 k 个 Fourier 系数.

命题 I-3 和 I-4 显示了下列性质：从一个函数 $f \in \mathscr{D}_{2\pi}(\mathrm{R}^d)$ 出发，我们可以计算它的 Fourier 系数，而从这些系数出发，我们也可构造 Fourier 级数，它范数收敛于某个元素 $\tilde{f} \in \mathscr{D}_{2\pi}(\mathrm{R}^d)$，且 $\tilde{f}$ 具有与 f 一样的 Fourier 系数；其实，我们还将指出 $f = \tilde{f}$. 换句话说，如果以 S 表示急降列 $(a_k)_{k\in \mathbf{Z}^d}$ 形成的向量空间，则映射 $F: f \longmapsto (a_k) = \left(\int f(x) e^{ik\cdot x} dx\right)$ 是从 $\mathscr{D}_{2\pi}(\mathrm{R}^d)$ 到 S 上的双射[1]线性算子，其逆算子是 $(a_k)_{k\in \mathbf{Z}^d} \longmapsto \sum_{k\in \mathbf{Z}^d} f_k$，这里 $f_k: x \longmapsto \left(\frac{1}{2\pi}\right)^d \times a_k e^{-ik\cdot x}$.

为了证明 $f = \tilde{f}$，我们暂时先承认：

Parseval 等式.

设 $h \in \mathscr{D}_{2\pi}(\mathrm{R}^d)$，$(a_k)_{k\in \mathbf{Z}^d}$ 为 h 的 Fourier 系数. 那末下列等式成立：

$$\int |h(x)|^2 dx = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^d \sum_{k\in \mathbf{Z}^d} |a_k|^2.$$

1) 设映射 $g: A \to B$（A, B 为任何集合）. 若 $gA = B$，则称 g 为满射 (surjective). 若 $\forall a, b \in A$, $g(a) = g(b) \Rightarrow a = b$，则称 g 为单射 (injective)；若 g 既满射又单射，则称 g 为双射 (bijective). ——译者注

这个等式导致 $\int |f-\tilde{f}|^2 dx = 0$。但由于函数 $x \longmapsto |f(x)-\tilde{f}(x)|^2$ 连续非负，其积分为零只可能当它本身恒为零.

Parseval 等式的证明. 事实上，对于 $\mathbf{Z}^d$ 中的所有有限子集 J，若以 h_J 表示函数 $x \longmapsto \sum_{k\in J}\left(\frac{1}{2\pi}\right)^d a_k e^{-ik\cdot x}$，则有

$$\int |h-h_J|^2 dx \leqslant \int \Big|h-\sum_{k\in J} c_k e^{-ik\cdot x}\Big|^2 dx, \qquad \text{(I-2.3)}$$

这里 c_k 可以是任意复数. 这也就是说，如果 E_J 表示 $\mathscr{D}_{2\pi}(\mathbf{R}^d)$ 中由元素 $(x \longmapsto e^{-ik\cdot x})_{k\in J}$ 张成的向量子空间，h_J 是达到 $\inf\limits_{g\in E_J}\int |h-g|^2 dx$ 的极小元素. 另一方面，对于任何 $\varepsilon>0$，存在 J 和 $g \in E_J$，使得

$$\int |h-g|^2 dx \leqslant \varepsilon. \qquad \text{(I-2.4)}$$

这两个结果导致

$$\lim_{l\to\infty}\int |h-h_{J_l}|^2 dx = 0$$

对于所有 $\mathbf{Z}^d$ 中的竭尽列 J_l 成立. 再由

$$\int |h-h_J|^2 dx = \int |h|^2 dx - \int h\bar{h}_J dx - \int h_J \bar{h} dx + \int |h_J|^2 dx$$

$$= \int |h|^2 dx - \left(\frac{1}{2\pi}\right)^d \sum_{k\in J} |a_k|^2,$$

(这里字上的短横表示共轭复数)，便可得到所求等式.

余下的任务是证明不等式 (I-2.3) 和 (I-2.4).

不等式 (I-2.3) 等价于

$$\int |h-h_J|^2 dx \leqslant \int |h-h_J-g|^2 dx, \qquad \forall g \in E_J. \qquad \text{(I-2.3)}'$$

直接计算可指出，积分 $\int (h-h_J)\bar{g}\,dx$ 和 $\int g(\bar{h}-\bar{h}_J)dx$ 为零. 因此

$$\int |h-h_J-g|^2 dx = \int |h-h_J|^2 dx + \int |g|^2 dx,$$

以至不等式 (I-2.3)′ 成立.

为了证明(I-2.4)，先考虑单变量情形．设 $\theta\longmapsto f(\theta)$ 是单变量连续周期(周期为 2π)函数．定义 $\mathbf{R}^2$ 上的用极坐标表示的连续函数：

$$(\rho,\theta)\longmapsto \rho f(\theta).$$

则这个函数尤其在 $[-1,+1]^2$ 上连续．根据 Weierstrass 逼近定理(在稍后回顾并证明)，对于任何给定的 $\varepsilon>0$，可求得某多项式，它在 $[-1,+1]^2$ 中与这个连续函数一致地相差 ε，从而在单位圆上也是如此．利用极坐标表示，由此可得，存在某些系数 $c_{j_1j_2}$ 使得

$$\sup_{\rho\leqslant 1,\theta}\left|\rho f(\theta)-\sum c_{j_1j_2}(\rho\cos\theta)^{j_1}(\rho\sin\theta)^{j_2}\right|\leqslant\varepsilon.$$

当 $\rho=1$，并以 $\dfrac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$ 和 $\dfrac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$ 分别代替 $\cos\theta$ 和 $\sin\theta$，即得(I-2.4)．

在 $\mathbf{R}^d$ 情形，同样可考虑定义在 $(\mathbf{R}^2)^d$ 上的函数

$$((\rho,x_1),\cdots,(\rho,x_d))\longmapsto \rho_1\cdots\rho_d f(x_1,\cdots,x_d).$$

这个函数是连续的． Weierstrass 定理仍能保证逼近多项式的存在．

注．可以证明，对于 $\mathscr{D}_{2\pi}(\mathbf{R}^d)$ 中给定的两个元素 f, g，有下列 Parseval-Plancherel 等式：

$$\int f(x)\overline{g(x)}dx=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^d\sum_{k\in\mathbf{Z}^d}\hat{f}(k)\overline{\hat{g}(k)}.$$

Weierstrass 定理．设 f 是 $[a,b]^d$ 上的连续函数．那末对于任何 $\varepsilon>0$，存在 $\mathbf{R}^d$ 上的多项式 P，使得

$$\sup_{x\in[a,b]^d}|f(x)-P(x)|\leqslant\varepsilon.$$

证明． 设 I 表示点 $(a,\cdots,a)\in\mathbf{R}^d$． 则变量代换 $x\longmapsto\dfrac{1}{b-a}(x-I)$ 可使函数变为定义在 $[0,1]^d$ 上．

当 $d=1$，对每个固定的整数 n，考虑多项式

$$q_k(t)=\frac{n!}{k!(n-k)!}(1-t)^{n-k}t^k,\quad 0\leqslant k\leqslant n.$$