郭仲衡 著

应用数学和力学丛书

张量

（理论和应用）

科学出版社

内 容 简 介

本书前五章用近代的观点系统介绍 n 维欧氏空间的张量理论．张量是作为多重线性函数定义的．概念的引入、定理的证明均采用内禀方式．为使表述和论证严谨扼要，充用发挥了置换群和外代数的作用．接着的三章介绍该理论的应用，包括用抽象记法扼要介绍弹性的一般理论；用笛氏张量记法介绍经典弹性力学；n 维欧氏空间的曲线论和曲面论以及在曲面上的张量分析．最后两章介绍诸如微分形式、Lie 导数、外微分和 Frobenius 定理等张量分析的一些近代概念及其在力学中的应用．

本书既是一本张量分析的入门书，又为进一步学习近代张量分析（即流形上的张量分析）架起了一座坚实的桥梁．本书不但透彻地论述了经典张量分析的一般理论，而且简明扼要地介绍了近代张量分析的基本概念，同时用生动的例子表明了张量分析实际应用的巨大潜力．

本书可供大学应用数学和力学专业师生和有关科研人员参考．

应用数学和力学丛书

张　量

（理论和应用）

郭仲衡 著

责任编辑　杨　岭　李成香

科学出版社 出版

北京朝阳门内大街 137 号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售

*

1988 年 1 月第 一 版　开本：850×1168　1/32

1988 年 1 月第一次印刷　印张：10 1/8

印数：0001—8,300　字数：260,000

ISBN 7-03-000120-6/O · 31

定价：　2.90 元

前　　言

虽说写这本书的念头是近几年才有的，但本书体系的形成却经历了差不多 30 年。

作者在这领域早期受到 A. E. Green 和 W. Zerna 的《理论弹性》(1954) 和 S. Gołąb 的《张量运算》(1956) 的启蒙. Gołąb 教授是属于 Schouten 学派的. 尽管有些作者还没有意识到，"芯字母"和"带撇指标"在指标记法中却早已决定性地显示出它们的优越性.

1960 年，C. Truesdell & R. A. Toupin 的《经典场论》问世. 作者的导师 W. Urbanowski 教授对作者说，指标固然好，但抽象记法更佳. 老师的思想感染了学生. 作者在波兰发表的 22 篇论文全是本着这个精神写的.

1963 年作者回国在北大任教. 当时国际学术界使用张量方法的尚属少数. 但作者的信念是：张量的普及只是时间问题. 作者讲授的"非线性弹性理论"固然非用张量不可. 对基础课"弹性力学"，作者也尝试了用笛氏张量记法讲授. 从未受过这方面训练的学生感到困难. 教学效果如何作者也无把握，感到压力很大. 作者采取了发补充讲义和加强辅导等措施设法将课坚持到底. 学期终了，克服了重重困难的学生终于尝到了甜头，反映说："这种方法就是好！"学生的肯定是对教师的最大支持和鼓励，增强了作者在教学上沿这路子走下去的信心. 但是，"十年动乱"使作者的想法成了泡影，只留下了一本用张量书写的"非线性弹性理论"讲义.

雨过天晴. 翻开杂志一看，果然不出所料，几乎每篇理论性文章无一不在不同程度上用了张量的工具. 1978 年，作者参与了"全国力学规划"中的"理性力学和力学中的数学方法"部分的工

作. 原来的想法死灰复燃了. 遂修改了留下的讲义,出版成书《非线性弹性理论》.

过去主要是固体和流体力学工作者应用张量分析, 而且仅是三维欧氏空间的张量分析. 这是很自然的, 因为物体仅在三维的物理空间运动.

正当我们"内战"正酣的时候, 国际上兴起了一门"新几何力学". 突破口在 Hamilton 力学. 它需要在构形空间, 相空间或增广相空间中进行张量分析, 从中发掘每个系统的最本质的数学结构——自然辛结构. 这些空间已经不是我们生活所在的物理空间, 而是高一层的抽象空间, 维数可以是任意的. 当讨论连续体时,维数还是无穷的. 这就要求人们跳出狭窄的三维物理空间,转入抽象的 n 维, 甚至无穷维空间, 对于约束系统来说,则是流形. 一般情况下,系统或多或少是受到约束的. 这样,张量分析就从古典阶段进入近代阶段——流形上的张量分析. 流形的维数可以是任意的,坐标系一般只是局部的,与之相伴又产生了一系列的新概念, 接受这些概念需要在观念上来一个大转弯. 1979 年起作者有机会到外面走一走, 所接触到的新朋旧友, 许多都谈到这个新阶段.

本书的原始意图是一本入门读物, 但入门也有现代化问题. 古典张量分析的书已出版甚多,大同小异,多一本少一本已无关大局. 作者把前面谈及的几个阶段的思想有机地加以融合, 经反复酝酿下, 最后决定把这本书写成一本现代化的古典张量分析的入门书. 从整体上是古典的,因为本书未进入流形和无限维领域. 但从局部上,每一概念的叙述和定理的证明却尽可能是现代化的. n 维的空间,作为多重线性函数的张量定义,抽象记法的突出,置换,行列式及外代数的普遍使用等等使得全书的叙述和证明成为一个有机的整体,克服了古典分析中的一些逻辑上的不彻底性. 第 IX 章集中介绍一些主要的近代概念, 旨在为读者架起一座较易通向近代张量分析的桥梁. 第 X 章举出非完整力学系统作为第 IX 章概念应用的生动例子. 读者从这个例子将会预感到近代分析的生

命力.

由于 Stokes 定理涉及流形的许多概念,本书没有介绍这个极为重要的定理,这是一个不得已的美中不足.

全书的各部分内容包含了作者各阶段的研究心得. 从 79 年起作者在国内外曾多次讲授过,书稿几经修改. 学生的问题和建议使本书得以不断完善. 这里作者想特别提到他的研究生綦小武和高普云同志.

科学出版社《应用数学和力学丛书》主编钱伟长教授有意将本书列入丛书. 种种原因,迟迟未能完稿. 正是他的一再督促使作者下决心趁暑假完成这项工作.

正在本书完稿之际,噩耗传来,8 月 23 日波兰学派的创始人之一,W. Nowacki 教授与世长辞了. W. Urbanowski 教授则在作者博士论文答辩后两个月就逝世了. 这两位记忆犹新的波兰恩师的学术思想,严谨作风和谆谆教导影响着作者的整个学术生涯. 请允许作者在这里一表怀念他们之意.

郭仲衡

(Guo Zhong-heng)

1986 年 9 月

于北京大学

目　　录

前言

绪论 ……………………………………………… 1

第Ⅰ章　准备 ……………………………………… 4

§1　三维欧氏空间的笛氏张量记法 ……………… 4

§2　若干符号 ………………………………………… 7

§3　置换 …………………………………………… 8

第Ⅱ章　张量代数 ………………………………… 11

§1　向量空间和基 ………………………………… 11

§2　内积空间，度量张量和对偶基 ……………… 13

§3　张量和张量积 ………………………………… 17

§4　基的转换和标准正交基 ……………………… 23

§5　缩并与点乘 …………………………………… 27

§6　对称和反称 …………………………………… 30

§7　置换算子，对称化和反称化 ………………… 33

§8　外形式和外积 ………………………………… 38

§9　广义 Kronecker 符号，Ricci 符号和矩阵的行列式 … 48

§10　定向，容积元和 Hodge 对偶性 …………… 55

第Ⅲ章　仿射量 …………………………………… 65

§1　二阶张量和线性变换 ………………………… 65

§2　仿射量的积和转置 …………………………… 68

§3　仿射量的行列式 ……………………………… 70

§4　正则和退化 …………………………………… 73

§5　主不变量和矩 ………………………………… 76

§6　特征方程，特征值和特征方向 ……………… 82

§7　Cayley-Hamilton 定理 ……………………… 84

§ 8 对称仿射量 …… 86
§ 9 反称仿射量 …… 92
§ 10 正交仿射量 …… 95
§ 11 仿射量的主向 …… 105
§ 12 仿射量的分解 …… 106
第 IV 章 张量函数及分析 …… 110
§ 1 各向同性张量函数 …… 110
§ 2 对称仿射量的各向同性标量值函数 …… 114
§ 3 对称仿射量的各向同性仿射量值函数 …… 115
§ 4 仿射量的线性各向同性标量值函数 …… 120
§ 5 对称仿射量的线性各向同性仿射量值函数 …… 121
§ 6 仿射量的线性各向同性仿射量值函数 …… 122
§ 7 张量函数的微分和导数 …… 125
§ 8 Leibniz 法则和链式法则 …… 136
第 V 章 绝对微分学 …… 140
§ 1 仿射空间和欧氏空间 …… 140
§ 2 平行性和同态扩张 …… 142
§ 3 仿射坐标系，典则基和笛氏坐标系 …… 145
§ 4 张量场 …… 147
§ 5 曲线及其速度向量 …… 148
§ 6 张量场的绝对微分和梯度 …… 149
§ 7 曲线坐标系和自然局部基 …… 153
§ 8 协变导数，联络系数和 Christoffel 符号 …… 158
§ 9 非完整系 …… 164
§ 10 正交坐标系和物理标架 …… 169
§ 11 不变性微分算子 …… 176
§ 12 自然平行性的后果 …… 178
§ 13 积分和散度定理 …… 180
第 VI 章 弹性的一般理论 …… 184
§ 1 形变几何学 …… 184

§ 2　运动学 ………………………………………… 187
§ 3　质量 …………………………………………… 191
§ 4　动力学分析 …………………………………… 193
§ 5　能量守恒律和动能定理 ……………………… 198
§ 6　弹性的本构关系和问题的建立 ……………… 200
第 VII 章　经典弹性力学 ……………………………… 205
§ 1　形变的分析 …………………………………… 205
§ 2　协调方程 ……………………………………… 207
§ 3　动力学分析 …………………………………… 209
§ 4　广义 Hooke 定律 …………………………… 210
§ 5　数学问题的建立 ……………………………… 212
§ 6　扭转问题 ……………………………………… 213
第 VIII 章　E^n 曲线和曲面上的张量分析 ………… 220
§ 1　曲线 …………………………………………… 220
§ 2　Frenet 标架和曲线的曲率 …………………… 222
§ 3　曲面及其上的张量代数 ……………………… 226
§ 4　曲面的绝对微分学 …………………………… 228
§ 5　Weingarten-Gauss 公式 ……………………… 230
§ 6　Riemann-Christoffel 张量和 Ricci 恒等式 ……… 232
§ 7　Gauss-Codazzi 方程 ………………………… 234
第 IX 章　张量分析的若干近代概念 ………………… 237
§ 1　切空间，余切空间和微分形式 ……………… 237
§ 2　向量场的 Lie 括弧积和 Lie 代数 …………… 247
§ 3　区域映射和导映射 …………………………… 250
§ 4　流，单参群和无穷小生成元 ………………… 261
§ 5　Lie 导数 ……………………………………… 265
§ 6　里积和外微分 ………………………………… 280
§ 7　Frobenius 定理 ……………………………… 289
第 X 章　非完整力学系统 ……………………………… 302
全书参考书目 …………………………………………… 309

绪　　论

作为一门数学学科，起初称作“绝对微分学”的张量分析的发展差不多已有一百年历史了．张量的概念源于描述弹性体的应力状态．但弹性力学，或更一般地，连续介质力学真正拿起这个武器还是近二、三十年的事(参阅理性力学先驱的经典文献：C. Truesdell, The mechanical foundations of elasticity and fluid dynamics, *Journal of Rational Mechanics and Analysis*, **1** (1952), pp. 125—300)．从那时起，张量分析在力学理论工作者中普及，已成为一个不可阻挡的趋势．力学的近代理论性文献都不同程度地运用这个工具．在应用张量分析方面，理论物理走在力学的前面．远在本世纪初，Einstein 成功地提出广义相对论，在相当程度上归功于这个有力的数学工具．今天，熟悉这个工具已是应用科学工作者的当务之急．本书正是为他们而写的．

提起张量运算，人们自然地就联想到一连串的“指标运算”，它在省去和号的 Einstein 约定下，神秘地把冗长的公式变得简洁和紧凑，并突出了现象的几何和物理特点．这是一大优点．但使张量分析获得成功的实质是在于它的不变性，即不随坐标系的选择而变化的性质．在处理具体问题时，我们总得引进坐标系，例如直角坐标系或其他曲线坐标系．众所周知，同一物理法则在不同坐标系里具有完全不同的形式，例如可以描述许多物理现象的 Laplace 方程在直角坐标系里是 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}=0$，在圆柱坐标系里是 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial r^2}+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial^2 f}{\partial r\partial\theta}+\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 f}{\partial\theta^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}=0$，而在球坐标系里则更为复杂．我们说，这些方程不具有(与坐标系无关的)不

变性．原因是：一个坐标系好比一种"面纱"，它蒙在上面使我们看不清物理事实的本质．张量分析的目的在于寻求一种摆脱具体坐标系影响的描述几何和物理规律的手段及其运算法则．

乾脆抛弃坐标系是一个办法，就是所谓"抽象记法"．只运用标量和向量的一些力学分支,所谓"向量力学"，就属于这种方法．它的简洁形式曾有过很大吸引力．意大利学者们曾试图将抽象记法推广到比向量更复杂的二阶张量的场合．他们引进了一大套难以记忆和掌握的运算法则，因此该方法未能普及．另一种办法就是"指标记法"，它辩证地既用坐标系而又摆脱坐标系的影响．它的简单的"指标游戏"法则易于掌握和记忆，使它赢得了广泛的承认．但指标记法也有弱点．除了在指标过多时显得累赘外，这方法在逻辑上有许多不透彻之处,而且每一步,严格地说，都应有烦琐的不变性证明．为了克服这些弱点,近代的倾向又重新回到"抽象记法",或叫"不变性方法"．但这并非历史的简单重现，而是吸收其他数学分支的思想，克服自身的初期弱点而完成的一个质的飞跃，它使理论具有一个完整体系而趋于更成熟．近代张量运算的另一个重要特点是在微分流形上进行分析，它是近代微分几何的基本工具,为研究近代自然科学理论展现出新的和广阔的前景．

由于本书的预定对象和篇幅的限制，我们在这里不准备进行这种最一般的讨论． 但我们也不重复现有坊间书籍的古老做法，而是争取在不用过多的数学基础知识的前提下，使叙述尽可能简单而现代化,从而构成一个完整的理论体系,同时又易于为初学者所接受。

我们生活及周围自然现象发生所在的场所是三维欧氏空间．本书是为讨论在这空间里的自然现象提供工具，并举力学的若干方面作为应用范例． 但我们仍从建立一般的 n 维空间理论入手，而把三维空间作为特殊情形包括进去．这样，理论上可以简浩和透彻些，也为进一步深造打下基础．

本书采用的公式编号和引用法则如下．公式在本节范围内一律用一个数依次编号．在本章内引用时，前面添一个表示节号的

数，如(5.8)．在章外引用时，再在前面添一个表示章号的罗马数字，如(III. 4. 2)表示第III章§4的公式(2)．

作者不准备列举浩瀚的参考文献，而只在书末给出写稿中主要参考的文献(专用于第X章)和书目(适用于全书)．

第1章 准　备

§1　三维欧氏空间的笛氏张量记法

设在三维欧氏空间有直角坐标系 $\{x, y, z\}$. 按习惯，它的单位基向量组是 $\{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\}$ 或 $\{\boldsymbol{i}_x, \boldsymbol{i}_y, \boldsymbol{i}_z\}$. 任意向量 $\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{v}$ 可表为

$$\boldsymbol{u} = u_x\boldsymbol{i}_x + u_y\boldsymbol{i}_y + u_z\boldsymbol{i}_z,\quad \boldsymbol{v} = v_x\boldsymbol{i}_x + v_y\boldsymbol{i}_y + v_z\boldsymbol{i}_z. \tag{1}$$

省去通常的点"·",我们简单地用并列表示两向量的点积

$$\boldsymbol{uv} = u_xv_x + u_yv_y + u_zv_z. \tag{2}$$

标量场 $f(x, y, z)$ 的梯度和向量场 $\boldsymbol{u}(x, y, z)$ 的散度分别是

$$\mathrm{grad}f = \frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{i}_x + \frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{i}_y + \frac{\partial f}{\partial z}\boldsymbol{i}_z, \tag{3}$$

$$\mathrm{div}\boldsymbol{u} = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z}. \tag{4}$$

如果有描述变形体每点应力状态的应力张量场

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}, \tag{5}$$

则在静力学问题里，该场应满足平衡方程

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} = 0, \\ \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} = 0, \\ \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

熟知的奥高公式是

$$\int_V \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z}\right) dV = \oint_S [u_x \cos(\boldsymbol{n}, x)$$

$$+ u_y \cos(\boldsymbol{n}, y) + u_z \cos(\boldsymbol{n}, z)] dS, \tag{7}$$

其中 V 是积分区域，S 是其边界.

这些常见的很有规律的普通公式书写起来已经显得有点累赘. 如果要完整地讨论,例如,弹性力学问题，我们还要遇到麻烦得多的公式.

只要将符号略加改变,并引进两个约定，即可消除这些累赘. 做法如下：将直角坐标系及其基向量组改记为 $\{x_1, x_2, x_3\}$ 和 $\{\boldsymbol{i}_1, \boldsymbol{i}_2, \boldsymbol{i}_3\}$，或

$$\{x_i | i = 1, 2, 3\} \text{ 和 } \{\boldsymbol{i}_i | i = 1, 2, 3\} \tag{8}$$

1.1 取值约定 指标从 1 至 n 取值.

n 是空间维数，这里 $n = 3$. 这样，(8) 式的取值范围 $i = 1, 2, 3$ 就可省去而成 $\{x_i\}$ 和 $\{\boldsymbol{i}_i\}$. 如果向量 $\boldsymbol{u}$ 在 x_i 轴方向的分量记为 u_i，$\boldsymbol{v}$ 为 v_i，则 (1) 式变成

$$\boldsymbol{u} = u_1\boldsymbol{i}_1 + u_2\boldsymbol{i}_2 + u_3\boldsymbol{i}_3 = \sum_{i=1}^{3} u_i\boldsymbol{i}_i, \tag{9}$$

$$\boldsymbol{v} = v_1\boldsymbol{i}_1 + v_2\boldsymbol{i}_2 + v_3\boldsymbol{i}_3 = \sum_{i=1}^{3} v_i\boldsymbol{i}_i. \tag{10}$$

这里我们发现一个规律：上两式均对重复一次的下标求和.

1.2 求和约定 对重复一次且仅一次的指标从 1 至 n 求和.

这时 (9)，(10) 两式又可略去和号而写成

$$\boldsymbol{u} = u_i\boldsymbol{i}_i, \quad \boldsymbol{v} = v_i\boldsymbol{i}_i, \tag{11}$$

而两向量的点积就简化为

$$\boldsymbol{u}\boldsymbol{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 = \sum_{i=1}^{3} u_iv_i = u_iv_i. \tag{12}$$

类似地，(3)，(4) 式成为

$$\operatorname{grad} f = \frac{\partial f}{\partial x_1}\boldsymbol{i}_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}\boldsymbol{i}_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3}\boldsymbol{i}_3, \tag{13}$$

$$\operatorname{div}\boldsymbol{u} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3}. \tag{14}$$

如果进一步用( )$_{,i}$ 表示偏导数$\frac{\partial()}{\partial x_i}$，而逗号后的字母也看作服从上述约定的下标，则更简单地有

$$\operatorname{grad} f = f_{,1}\boldsymbol{i}_1 + f_{,2}\boldsymbol{i}_2 + f_{,3}\boldsymbol{i}_3 = \sum_{i=1}^{3} f_{,i}\boldsymbol{i}_i = f_{,i}\boldsymbol{i}_i, \tag{15}$$

$$\operatorname{div}\boldsymbol{u} = u_{1,1} + u_{2,2} + u_{3,3} = \sum_{i=1}^{3} u_{i,i} = u_{i,i}. \tag{16}$$

类似于向量分量的下标记法，把应力张量记成

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix} \text{或}\ (\sigma_{ij}), \tag{17}$$

则平衡方程变成

$$\left.\begin{aligned} \sigma_{11,1} + \sigma_{12,2} + \sigma_{13,3} = 0 \\ \sigma_{21,1} + \sigma_{22,2} + \sigma_{23,3} = 0 \\ \sigma_{31,1} + \sigma_{32,2} + \sigma_{33,3} = 0 \end{aligned}\right\} \text{即} \left.\begin{aligned} \sum_{j=1}^{3} \sigma_{1j,j} = 0, \\ \sum_{j=1}^{3} \sigma_{2j,j} = 0, \\ \sum_{j=1}^{3} \sigma_{3j,j} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

应用两个约定，复杂的平衡方程 (6) 最终可写成

$$\sigma_{ij,j} = 0. \tag{19}$$

奥高公式的各方向余弦 $\{\cos(\boldsymbol{n}, x), \cos(\boldsymbol{n}, y), \cos(\boldsymbol{n}, z)\}$ 实际上是积分区域边界单位外法向 $\boldsymbol{n}$ 的分量 $\{n_x, n_y, n_z\}$，按现在的记法就是 $\{n_i\}$，于是 (7) 就变成

$$\int_V u_{i,i} dV = \oint_S u_i n_i dS. \tag{20}$$

这里出现两种指标：不重复的指标(即**取值指标**)称为**自由指标**，重复的指标(即**求和指标**)称为**哑指标**。哑指标可以任意代换，例如 $u_j v_j = u_i v_i$。 上面这些只是所谓"三维欧氏空间的笛氏张量运算"的某些片断，是引进两个约定改写熟知公式的结果。虽然没有实质性的新内容，但已部份地显出它的优越性。

现在问题是：从一个直角坐标系转换至另一个直角坐标系或斜角坐标系(即仿射坐标系)，甚至任意的曲线坐标系时，情况又将如何？这些问题的解决将是本书第一部分的基本内容.

为了使理论上更透彻、叙述上更一般，以后我们将讨论 n 维空间 (n 可为任意正整数). 三维空间是特殊的，特殊之处将在相应的地方专门指出.

今后还将出现上标. 这时指标是上标和下标的统称，取值约定和求和约定仍有效. 但这时的"重复指标"应理解为"上标和下标分别相同地出现一次"，如 $t^{ij}n_j$ 中的指标 j, $E^{ijkl}\varepsilon_{kl}$ 中的指标 k, l 均为哑指标. 应注意的是，在既有上标，又有下标的情况，同一类型的指标是不允许重复的，如 $P^{ij}{}_{kk}$ 是不允许的. 在任何情况下，指标重复一次以上，如 $L^k{}_{kk}$, M_{kkkk} 都是不允许的，这时求和约定自动失效.

§2 若干符号

为了行文简练，将应用某些近代数学通用的符号：

(i) 设集合 A 由元素 x_1, x_2 和 x_3 组成. 我们用

$$A = \{x_1, x_2, x_3\} \tag{1}$$

表示. 当元素较多时，用特征描述法较方便. 这时上式可写为

$$A = \{x_i | i = 1, 2, 3\}, \tag{2}$$

这里一竖"|"后面陈述 x_i 所具有的特征. 利用取值约定，(2) 式又可写成 $A = \{x_i\}$，这里我们默认了空间的维数是 3. 又如

$$B = \{a | a \text{ 是矩形，} a \text{ 的面积} = 1\}. \tag{3}$$

若 x 是集合 A 的一个元素，我们说 x 属于 A，用符号

$$x \in A \tag{4}$$

表示. 而"$x \notin A$"则表示"x 不属于 A".

设有另一集合 B. 如果 B 的每一个元素也是 A 的元素，我们说"A 包含 B"或"B 是 A 的一个子集"，用"$B \subset A$"表示.

(ii) "$\forall$"表示"对于所有". 例："对于所有属于实数域 $\mathbb{R}$ 的

x，$x^2 \geqslant 0$” 可写成

$$“\forall x \in \mathbf{R}: x^2 \geqslant 0” \text{ 或 } “x^2 \geqslant 0, \forall x \in \mathbf{R}”. \tag{5}$$

(iii) “$\exists$” 表示“存在”。例：“$\exists x: x^2 = 4$” 是“存在一个 x，使 $x^2=4$” 的缩写。

“$\exists!$” 表示“存在唯一的”。例：“$\exists! x \in \mathbf{Z}: 3 < x < 5$” 表示“在整数系 $\mathbf{Z}$ 中存在唯一的大于 3，小于 5 的数 x”。

(iv) “$A \Longrightarrow B$” 表示“如果 A 成立，则 B 也成立”，或者说“B 是 A 的一个推论”。我们也说：“A 是 B 的一个充分条件，而 B 是 A 的必要条件”。“$A \Longleftrightarrow B$” 表示“A 成立，当且仅当 B 成立”，或者说“A 和 B 是等价的”，“A 是 B 的充分必要条件”。

(v) “$F: A \to B: a \longmapsto b$” 表示“$F$ 是从集合 A 到集合 B 的一个映射，即是一个法则，它使每个 $a \in A$ 有唯一的一个 $b \in B$ 与之对应”。应注意：“$\to$”表示从集合到集合，而“$\longmapsto$”表示从元素到元素。

(vi) “$:=$” 表示左边由右边的表达式定义。也用到反过来的符号“$=:$”。

(vii) 设有 r 个集合 $A_1, \cdots, A_r$，它们的**笛氏乘积**是一个新的集合，定义为

$$A_1 \times \cdots \times A_r := \{(a_1, \cdots, a_r) \mid a_1 \in A_1, \cdots, a_r \in A_r\}, \tag{6}$$

其中 $(a_1, \cdots, a_r)$ 称为 **r 元有序组**。

(viii) “$\square$” 表示诸如定义，证明，注解或例题等逻辑单元的终止。但“$\square$” 只在该单元的终止可能和下文不明显分清时使用。

§3 置 换

设 K 是 k 元集 $\{i_1, i_2, \cdots, i_k\}$。从 K 到自身的 1—1 变换

$$\sigma: K \to K: i_r \longmapsto \sigma(i_r), \quad r = 1, 2, \cdots, k \tag{1}$$

称为 **k 元置换**，也可写成

$$\sigma = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots i_k \\ \sigma(i_1) & \sigma(i_2) & \sigma(i_k) \end{pmatrix}. \tag{2}$$