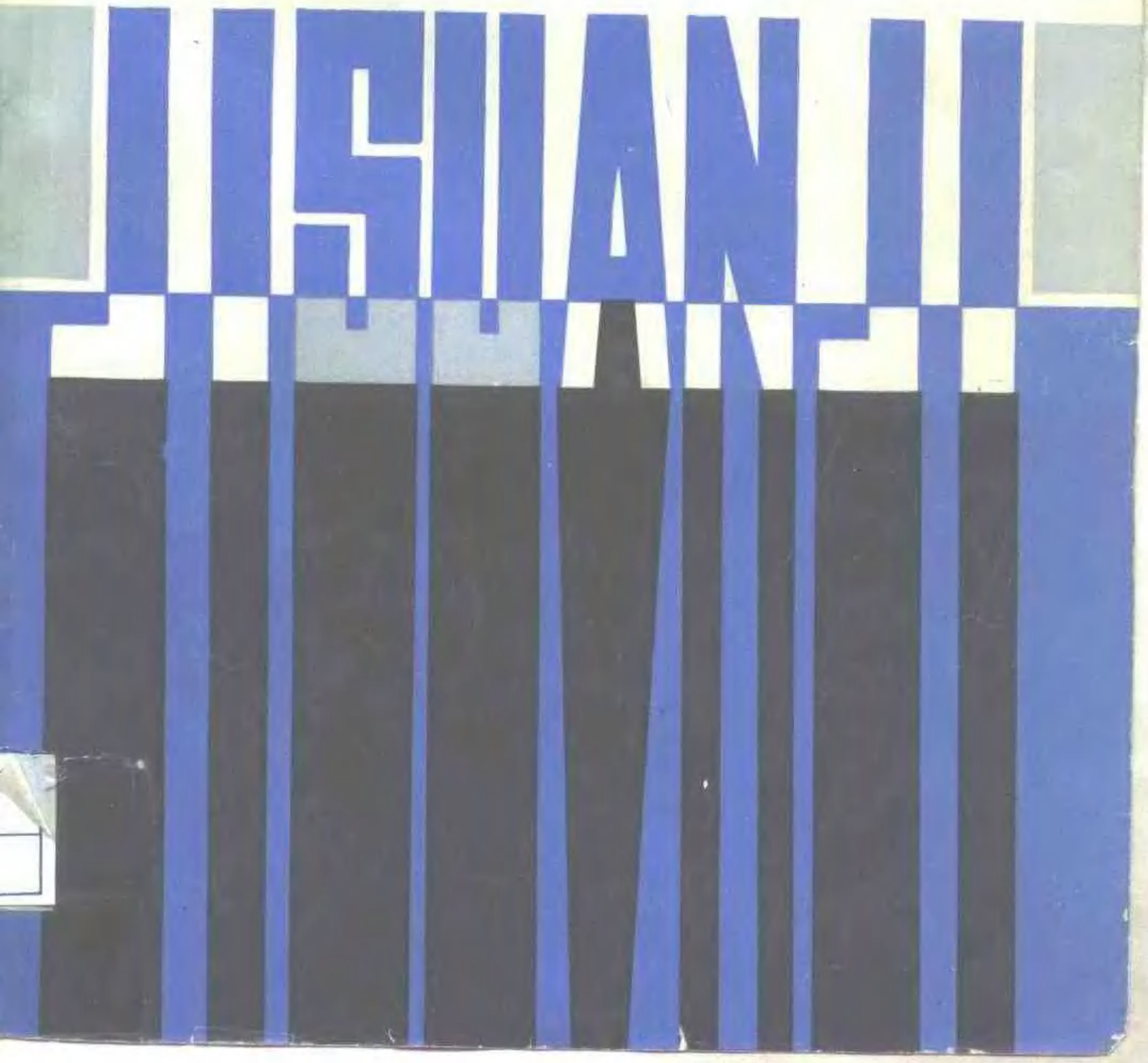
计算机基础教育丛书

计算机常用算法

徐士良

清华大学出版社



计算机常用算法

徐士良 编

海淀走读大学
89 13
藏书

清华大学出版社

内 容 简 介

本书适于高等理工科院校非数学专业作为计算机常用算法与计算机实践课程的教材．为了便于广大读者理解，省略了某些数学上的繁琐证明过程，而突出算法的叙述和例题的分析，可作为工程技术人员的参考书。

全书共分十一章。前四章从实际应用出发，主要介绍了数值计算中的误差及其算法分析中的基本问题。第五章至第九章系统介绍了数值问题的实用算法及近几年算法研究的某些新成果。第十章、十一章分别讨论了数字信号处理中的一些快速算法与非数值问题中的主要常用算法。对于大部分算法，书中都给出了详细的计算步骤，除了最后一章外，每章均附有习题。

计算机常用算法
徐士良
责任编辑 王仁康 李幼哲
☆
清华大学出版社出版
北京 清华园
北京京辉印刷厂印刷
新华书店总店科技发行所发行
☆
开本：787×1092 1/16 印张：18.75 字数：444千字
1989年11月第1版 1989年11月第1次印刷
印数：00001—8000
ISBN 7-302-00466-8/TP·161
定价：3.40 元

丛书出版说明

近年来，我国的计算机应用事业迅速发展，大批科技人员、大中学生、管理人员、以及各行各业的在职人员都迫切要求学习计算机知识，他们已经认识到，计算机知识是当代知识分子的知识结构中不可缺少的重要部分。

计算机应用人才的队伍由两部分人组成：一部分是从计算机专业毕业的计算机专门人才，他们是计算机应用人才队伍中的骨干力量；另一部分是各行各业中从事计算机应用的人才，他们既熟悉本专业的业务，又掌握计算机应用的技术，人数众多，是计算机应用人才队伍的基本力量。他们掌握计算机知识的情况和应用计算机的能力在相当大程度上决定了我国计算机应用的水平。因此，在搞好计算机专业教育的同时，在广大非计算机专业中开展计算机基础教育是十分必要的。

非计算机专业中的计算机教学，无论就目的、内容、教学体系、教材、教学方法等各方面都与计算机专业有很大的不同，它以应用为目的，以应用为出发点。如果不注意这个特点，将会事倍功半。广大非计算机专业的师生、在职干部迫切希望有一套适合他们的教材，以便循序渐进地迈入计算机应用领域，并且不断地提高自己的水平。我们在前几年陆续编写了一些适合初学者使用的教材，受到广大群众的欢迎。许多读者勉励我们在此基础上进一步摸索和总结规律，为我国的广大非计算机专业人员编写一整套合适的教材。

近年来，全国许多专家、学者在这个领域作了有益的探索，写出了一批受到群众欢迎的计算机基础教育的教材。特别是全国高等学校计算机基础教育研究会作了大量的工作，在集思广益的基础上，提出了在高等学校的非计算机专业中进行计算机教育的四个层次的设想，受到广泛的注意和支持。我们认为：计算机的应用是分层次的，同样，计算机人才的培养也是分层次的；非计算机专业中各个领域的情况不同，也不能一律要求，在进行计算机教育时也应当有不同的层次。对于每一个学习计算机知识的人，还有一个由浅入深，逐步提高的过程。

我们认为，编辑出版一套全面而有层次的计算机基础教育的教材，目前不仅是十分必要的，而且是完全有条件的。在全国高等学校计算机基础教育研究会和许多同志的积极推动和清华大学出版社的大力支持下，我们决定编辑《计算机基础教育丛书》。它的对象是：高等学校非计算机专业的学生、计算机继续教育或培训班的学员、广大在职自学人员。

本丛书包括计算机科学技术的一些最基本的内容，例如计算机各种常用的高级语言、计算机软件技术基础、计算机硬件技术基础、微型计算机的原理与应用、算法与数据结构、数据库基础、计算机辅助设计基础、微机网络与应用、系统分析与设计等，形成多层次的结构，读者可以根据需要与可能选学。

本丛书的宗旨是针对广大非计算机专业的需要和特点来组织教材。敢于破除框框，从实际出发，用读者容易理解的体系和叙述方法，深入浅出、循序渐进地帮助读者更好地掌握课

程的基本内容。希望我们的丛书能在这方面闯出自己的风格，在实践中接受检验。

本丛书的作者大多数是高等学校中有较丰富教学经验的教师。但是，由于计算机科学技术的飞速发展以及我们的水平有限，丛书肯定会存在许多不足，丛书的书目和内容也应当不断发展和更新。我们热情地希望得到社会各界和广大读者的批评指正。

主编　谭浩强　林定基　刘瑞挺

1988.10.

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

前　言

由于计算机技术的发展，许多复杂的数值计算问题才能得以解决。一个数学问题，甚至是一个数值计算公式，如何在计算机上实现，而在计算机处理计算的过程中又会产生哪些新的问题，这是在工程实际应用中经常会遇到的问题。

本书是在近几年教学实践的基础上编写成的。阅读本书只需要具备微积分与线性代数方面的基础知识。前三章介绍了关于误差、多项式和连分式的基本概念。第四章介绍了算法分析的基本方法，并且有实例分析，可以作为算法分析的入门。第五章至第九章，介绍了工程上常用的数值计算方法，并尽可能将目前比较有效的算法收集到本书。其中对于主要的算法还进行了详细的讨论，读者在实际应用时可以很方便地在计算机上具体实现。因而本书也可以作为学习工程中一些常用算法的基本教材。第十章还介绍了数字信号处理领域中常用的一些快速算法。在第十一章中又对非数值计算问题的一些主要的基本算法作了讨论。尽管以上所介绍的基本算法不可能解决工程实际中所遇到的全部问题，但只要我们理解并实践了这些常用算法，就可以方便地在计算机上处理与计算通常所遇到的数学问题了。

希望读者在阅读本书时，除了掌握和理解书中所介绍的一些常用算法与初步的分析结果以外，在有条件的情况下，对于书中的每个算法（或至少是某些主要算法）去编写相应的计算机程序，在计算机上检验算法（或者某些结论）以及你自己编写的程序的正确性。

全书的各章之间是互相独立的，因此，在作为教材时，可以根据课时和实际的需要选取其中的一些章节。例如，多项式这一章，除了多项式求值以外，其余内容主要是为数字信号处理中的快速算法这一章作准备的，如果不讲授第十章，则多项式这一章也可以不作介绍。

作者在讲授与编写本书的过程中，得到了有关同志的关心和帮助，特别是王作英教授对本书的部分章节提出了许多改进意见。蔡大用教授和王祐民老师审阅了本书的原稿，提出了不少宝贵意见。在此，谨向他们表示衷心的感谢。

限于水平，书中难免会有错误和不当之处，敬请读者批评指正。

作者

1988年5月于清华

目　录

第一章 误　　差

误差在数值计算中是不可避免的。也就是说，在数值方法中，绝大多数情况下不存在绝对的严格和精确。对于一个好的计算工作者来说，主要在于能够分析误差产生的原因，并将误差限制在许可的范围之内。本章将讨论误差的来源，误差的一些基本概念，以及在计算过程中所应注意的一些问题。

§1.1 误差的来源

为了弄清误差的来源，我们先初步了解一下，一个实际问题的解决需要经过哪些步骤。

首先，为了便于进行数值计算，必须将实际问题归纳为数学问题，建立一个合适的数学模型。

数学模型建立后，计算机还不能直接解决。这是因为对于计算机来说，只能作一些它所规定的、且是有限的运算或判断，以及在一些规定的设备上进行数据输入或输出。所以，还必须解决计算的近似公式，以便于利用计算机来进行计算。

一个数学问题的解决，可能不只有一个计算公式，那么就有从多个计算公式中选择一个最优公式的问题；对于某个计算公式来说，又有可能存在多种计算步骤，那么就有选择最佳方案的问题。总之，计算的近似公式解决以后，还有一个制定准确而完整的解题方案的问题，以上两步即所谓选择合适的算法。

解题方案（即算法）制定后，就可以通过某种手段来描述具体的解题步骤。通常先画出流程图，然后编制计算机程序。最后，在计算机上进行调试通过后，可以正式运行而得到所需要的结果。

以上程序设计的几个步骤，可以简单地用图 1.1.1 来描述。

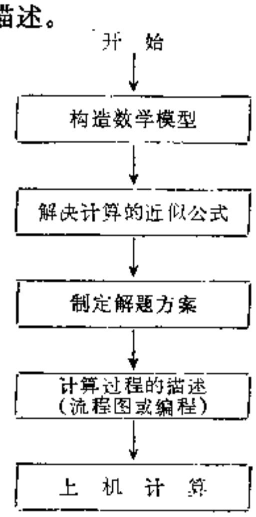


图 1.1.1　程序设计的一般步骤

由以上解决一个实际问题的过程可以看出，误差的产生是不可避免的。

首先，在将实际问题归纳为数学问题时，通常总要加上许多限制，并且要忽略一些次要的因素，以便建立起一个“理想化”的数学模型。因此，这样得到的数学模型只是客观现象的一种近似描述。而这种数学描述上的近似必然会产生误差。我们称这种误差为模型误差。

其次，在建立的各种计算公式中，通常总包括有一些参数，而有些参数往往是由观测和实验得到的。因此，它们与真值之间有一定的差异，这样，也就给计算带来了一定的误差。这种误差，我们称之为观测误差。

另外，许多数学运算（如微分、积分以及无穷级数求和等）是通过极限过程来定义的。实际上计算机只完成有限次的算术运算及逻辑运算。因此，在实际应用时，还需将解题方案加工成算术运算与逻辑运算的有限序列，而这种加工又往往表现为某种无穷过程的“截断”。例如，对于收敛的无穷级数，常用它的前 n 项的部分和来代替无穷级数的和，实际上抛弃了无穷级数的后段，由此便产生了误差。还例如，用梯形公式计算积分的近似值，这方法本身就有误差。这类误差我们统称为方法误差或截断误差。

最后，当计算机执行算法时，由于受机器字长的限制，参加运算的数据总是只能具有有限位的有效数字，因而也就造成了舍入误差。

综上所述，在数值计算过程中，往往会出现各种各样的误差，它们会直接影响到计算的结果。还必须指出，除了对这些误差要引起足够的重视以外，还要注意到这些误差在计算过程中所产生的效应。例如，某个参数由于观测引起的误差可能是微不足道的，或者少量的舍入误差对中间的计算结果影响并不大，但是，这些误差经过计算机的千百万次运算以后，误差的积累就可能大得惊人，初始数据的微小误差也可能会引起严重错误，甚至会得到完全错误的结果。因此，在进行任何一种计算时，首先要保证满足精度的要求，而为了保证结果的可靠性，挑选和设计好的算法，是一个很重要的环节，必须加以足够的重视。

§1.2 绝对误差和相对误差

设 x^* 代表准确值 x 的一个近似值。定义

$$E(x)=x-x^*$$

为近似值 x^* 的绝对误差。通常，由于准确值 x 是未知的，因此，无法准确地算出绝对误差的真值，只能根据具体测量或计算的情况估计出它的绝对值的一个范围，也就是去估计 $|E(x)|$ 的上界。

设

$$|E(x)|=|x-x^*|\leqslant\eta$$

则称 η 为近似值 x^* 的绝对误差限，通常也把它简称为绝对误差。有了绝对误差限以后，显然，准确值 x 的范围为

$$x^*-\eta\leqslant x\leqslant x^*+\eta$$

有时也用

$$x=x^*\pm\eta$$

来表示近似值 x^* 的精确度或准确值 x 所在的范围。

但是，绝对误差的大小不能完全反映近似值的准确程度。例如，设 $x=10\pm1$，$y=1000\pm5$。显然，近似数 $y^*=1000$ 的绝对误差比 $x^*=10$ 的绝对误差大四倍，但 y^* 的准确程度却明显优于 x^*。为了表示一个近似数的准确程度，我们引进一个相对误差的概念。

定义 x 的近似值 x^* 的相对误差为

$$E_r(x)=\frac{E(x)}{x}=\frac{x-x^*}{x}$$

实际上，由于准确值 x 并不知道，通常又定义为

$$E_r(x)=\frac{E(x)}{x^*}=\frac{x-x^*}{x^*}$$

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

相对误差说明了近似值x^*的绝对误差与x^*本身比较起来所占的比例，从另一方面反映了一个近似数的准确程度。

和绝对误差一样，由于准确值x并不知道，其绝对误差 $E(x)=x-x^*$ 无法准确地算出，因而也就无法确定出相对误差$E_r(x)$的准确值，只能估计出它的一个范围。如果

$$|E_r(x)|=\left|\frac{x-x^*}{x^*}\right|\leqslant\delta$$

则称δ为x^*的相对误差限，通常也把它简称为相对误差。显然，相对误差限δ与绝对误差限η有如下关系

$$\delta=\left|\frac{\eta}{x^*}\right|$$

§1.3 有效数字

在表示一个近似数时，常常要用到“有效数字”的概念。

设有一个数为 x，x^* 是它的近似数，若

$$|x-x^*|\leqslant\frac{1}{2}\cdot10^{-k} \tag{1.3.1}$$

则称用x^*近似表示x时准确到小数点后第k位。称从小数点之后的第k位数字起直到最左的非零数字之间的一切数字为有效数字。称有效数字的位数为有效数位。

如果将x^*写成如下形式：

$$x^*=\pm10^m(x_1\cdot10^{-1}+x_2\cdot10^{-2}+\cdots+x_n\cdot10^{-n}) \tag{1.3.2}$$

其中x_1，x_2，…，x_n都是0，1，…，9这十个数字之一，且$x_1\neq0$，n是正整数，m是整数。若

$$|x-x^*|\leqslant\frac{1}{2}\cdot10^{m-n} \tag{1.3.3}$$

则近似数x^*具有 n 位有效数字。

如果一个近似数x^*具有n位有效数字，根据（1.3.2）式可知

$$x_1\cdot10^{m-1}\leqslant|x^*|\leqslant(x_1+1)\cdot10^{m-1} \tag{1.3.4}$$

则近似数x^*的相对误差为

$$|E_r(x)|=\left|\frac{x-x^*}{x^*}\right|\leqslant\frac{\frac{1}{2}\cdot10^{m-n}}{x_1\cdot10^{m-1}}=\frac{1}{2x_1}\cdot10^{-(n-1)} \tag{1.3.5}$$

但反过来，不能从(1.3.5)推出x^*一定具有n位有效数字。例如，设$A=\sin29°20'=0.4900$，其近似值为 $A^*=0.484$，则其相对误差为

$$\frac{0.4900-0.484}{0.484}=0.012397<0.0125=\frac{1}{2\times4\times10}$$

但我们不能由此推出A^*有两位有效数字，这是因为

$$A-A^*=0.4900-0.484=0.0060>0.005$$

由此可知，近似值A^*并不具有两位有效数字。

通常我们在书写数字时，要求从其最左边第一位非零的数字起，到它最右边的一位数字止，都是有效数字。例如，0.00203的有效数字为2、0、3；3.14的有效数字为3、1、4。需要注意的是，0.0023与0.002300的有效数字位数是不同的，前者具有两位有效数字，其绝对误差不超过$\frac{1}{2}\cdot 10^{-4}$，而后者具有四位有效数字，其绝对误差不超过$\frac{1}{2}\cdot 10^{-6}$。

在这里还必须指出一点，通常我们采用的舍入规则是四舍五入，但实际上比较好的舍入规则是采取如下原则：

小数点之后第$k+1$位数字小于5时应舍去；

小数点之后第$k+1$位数字大于5时应进入；

小数点之后第$k+1$位数字等于5时，被保留的最后一位数字为奇（或偶）数时应进入，为偶（或奇）数时应舍去。这种方法称为对称舍入。

§1.4 运算误差分析

前面已经提到，在数值计算过程中，由于计算机（别的计算工具也是如此）只能对有限位数进行运算，因而在运算过程中不可避免地要产生误差。但是，如果能够掌握产生误差的规律，那么就可以使得误差被限制在最小的范围之内。实际上，在运算过程中所产生的误差的大小，往往与运算步骤有关。例如，在计算机上进行算术运算时，$a+b+c$可能不等于$a+c+b$；同样，$(a+b)c$也可能不等于$ac+bc$。下面我们以一个例子来说明在运算过程中产生误差的情形。

例 1　给定$G(x)=10^7(1-\cos x)$，试用四位数学用表求$G(2°)$的近似值。

这个例子可以有以下两种解法：

解法（1）

由于$\cos 2°\approx 0.9994$（查四位数学用表），所以

$$G(2°)=10^7(1-\cos 2°)\approx 10^7(1-0.9994)=6000$$

解法（2）

由于$G(x)=10^7(1-\cos x)\equiv 2\cdot 10^7\sin^2(x/2)$

且$\sin 1°\approx 0.0175$（查四位数学用表），所以

$$G(2°)=2\cdot 10^7\sin^2 1°\approx 2\cdot 10^7(0.0175)^2\approx 6125$$

以上两种解法共用一本数学手册，且表中的每个数（即$\cos 2°$与$\sin 1°$）都是准确到小数点后第四位，答案为什么不一致呢？哪一个答案较准确一些呢？

如果我们用相对误差的概念来分析，不难发现，由解法（2）所得的结果较接近于准确值。在更精密的计算下，正确的答案为6091.73（具有六位有效数字）。

在上述例子中，如果假设

$$A=\cos 2°,\quad B=\sin 1°$$

则

$$G_1=10^7(1-A),\quad G_1^*=10^7(1-A^*)$$
$$G_2=2\cdot 10^7B^2,\quad G_2^*=2\cdot 10^7(B^*)^2$$

其中G_1和G_2分别表示解法（1）和解法（2）中的$G(2°)$，A^*和B^*分别为$\cos 2°$和$\sin 1°$查表所得的近似值。

下面分别计算两种算法所得结果的相对误差。

解法（1）的相对误差为

$$|E_r(G_1)| = \left|\frac{E(G_1)}{G_1^*}\right| = \left|\frac{G_1 - G_1^*}{G_1^*}\right| = \left|\frac{10^7(1-A) - 10^7(1-A^*)}{10^7(1-A^*)}\right|$$

$$= \left|\frac{A - A^*}{1 - A^*}\right|$$

由于我们用的是四位数学用表，所以

$$|A - A^*| \leqslant \frac{1}{2} \cdot 10^{-4}$$

由此可得

$$|E_r(G_1)| \leqslant \frac{\frac{1}{2} \cdot 10^{-4}}{1 - 0.9994} = \frac{1}{12} \approx 8.3\%$$

解法（2）的相对误差为

$$|E_r(G_2)| = \left|\frac{G_2 - G_2^*}{G_2^*}\right| = \left|\frac{2 \cdot 10^7 B^2 - 2 \cdot 10^7 (B^*)^2}{2 \cdot 10^7 (B^*)^2}\right| = \left|\frac{B^2 - (B^*)^2}{(B^*)^2}\right|$$

$$= \frac{|B - B^*|\ |B + B^*|}{(B^*)^2}$$

由于$B + B^* \approx 2B^*$，所以

$$|E_r(G_2)| \approx \frac{2|B - B^*|}{B^*}$$

由于在解法（2）中也是利用四位数学用表，所以

$$|B - B^*| \leqslant \frac{1}{2} \cdot 10^{-4}$$

由此可得

$$|E_r(G_2)| \leqslant \frac{10^{-4}}{0.0175} = \frac{1}{175} \approx 0.57\%$$

由以上分析可以看出，解法（2）所得结果的相对误差比解法（1）所得结果的相对误差要小，因此，解法（2）所得的结果较接近于准确值。

通过这个例子，可以说明这样一个事实，在数值计算中必须要考虑运算误差对结果的影响。一般说来，在分析运算误差时，要考虑如下一些原则。

（一）两个相近的数相减，会严重丢失有效数字。

对于这个问题，我们可以通过相对误差的概念来说明。设

$$y = x - A$$

其中A与x均为准确数。为了简单起见，假设A在运算时不发生误差；而x有误差，其近似值为x^*。由此可以计算当用x^*近似代替x时y的相对误差为

$$E_r(y)=\frac{E(y)}{y^*}=\frac{(x-A)-(x^*-A)}{x^*-A}=\frac{x-x^*}{x^*-A}=\frac{E(x)}{x^*-A}$$

由这个结果可以看出，在x的绝对误差$E(x)$不变时，若x^*越接近A，则y的相对误差$E_r(y)$会变得越大（因为分母上的x^*-A越小)，而相对误差的增大必然会导致有效数字的位数大大减少。在例 1 的解法(1)中，$\cos 2°\approx 0.9994$，具有四位有效数字，但$1-\cos 2°\approx 0.0006$，却至多具有一位有效数字。这就说明了在两个相近的近似数作减法运算时，精度会大大降低。因此，为了避免精度的下降，有时需要对运算公式作适当的处理，以避免作减法运算，在例 1 中的解法(2)就是这样处理的。下面列出一些常见的公式变换的例子。

当x_1很接近于x_2时

$$\lg x_1-\lg x_2=\lg(x_1/x_2)$$

当x接近于 0 时

$$\frac{1-\cos x}{\sin x}=\frac{\sin x}{1+\cos x}$$

当x充分大时

$$\operatorname{arc\,tg}(x+1)-\operatorname{arc\,tg}x=\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{1+x(x+1)}$$

$$\sqrt{x+1}-\sqrt{x}=\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$$

当$f(x^*)$很接近$f(x)$，需要作$f(x)-f(x^*)$运算时，为避免有效数字的丢失，可用台劳(Taylor）展开式，即

$$f(x)-f(x^*)=(x-x^*)f'(x^*)+\frac{1}{2}(x-x^*)^2f''(x^*)+\cdots$$

必要时还可以让x和x^*多取几位有效数字，使$f(x)-f(x^*)$保持适当的有效数字位数。

（二）除数较小时，商的绝对误差会增大。

假设

$$z=\frac{x}{y}$$

其中x和y的近似值分别为x^*和y^*，则

$$z^*=\frac{x^*}{y^*}$$

由此可以得到z的绝对误差为

$$E(z)=z-z^*=\frac{x}{y}-\frac{x^*}{y^*}=\frac{xy^*-yx^*}{yy^*}=\frac{y^*x-y^*x^*-x^*y+x^*y^*}{yy^*}$$

$$=\frac{y^*(x-x^*)-x^*(y-y^*)}{yy^*}=\frac{y^*E(x)-x^*E(y)}{yy^*}$$

其中分母上的准确值y实际上是未知的，但可以用它的近似值y^*来代替，这样就得到

$$E\left(\frac{x}{y}\right)=\frac{y^*E(x)-x^*E(y)}{(y^*)^2}$$

由这个式子可以看出，当两个数相除时，如果分母（即除数）越小，则商的绝对误差就越

大。

（三）在运算过程中必须注意合理安排运算顺序，以便提高运算的精度或保护重要的参数。

在制定一个计算步骤时，还需要注意到某些重要参数是否会被“吃掉”的问题。前面已经提到，在计算过程中，有可能出现$a+b+c$与$a+c+b$不相等的现象，我们可以用具体的数来说明这个问题。假设要对a、b、c三个数作加法运算，其中$a=10^{12}$，$b=10$，$c=-10^{12}$。如果按$(a+b)+c$的顺序来计算，而有效数字为十位以下，则在作$a+b$的运算时，a“吃掉”了b，其结果为10^{12}，再与c相加时，正好互相抵消，最后结果为0。但若按$(a+c)+b$的顺序来计算时，首先a和c互相抵消，再与b相加，其最后结果为10，从而保护了参数b。

由此可以看出，如果在计算时，事先分析一下计算方案中各数值的数量级，然后合理安排它们的运算顺序，那么，一些重要的参数就不致于在计算过程中被其它参数“吃掉”。特别在作连加运算时，合理安排它们的运算顺序，可以获得较高精度的结果，读者在做完习题1.5后，就可以很清楚地看到这一点。

我们还可以从下面的例子中看出关于大数“吃掉”小数的现象。

例 2　在具有四位有效数字的计算机上作下列运算，则有

$$10^3(0.8961)+10^{-5}(0.4688)$$
$$\longrightarrow 10^3(0.8961)+10^3(0.0000) \qquad \text{（对阶）}$$
$$\longrightarrow 10^3(0.8961) \qquad \text{（规格化）}$$

其结果是大数“吃掉”了小数；

$$10^0(0.6108)+10^3(0.6871)$$
$$\longrightarrow 10^3(0.0006)+10^3(0.6871) \qquad \text{（对阶）}$$
$$\longrightarrow 10^3(0.6877) \qquad \text{（规格化）}$$

其结果是大数“吃掉”了部分的小数；

$$10^{-1}(0.3311)-10^{-1}(0.3307)$$
$$\longrightarrow 10^{-1}(0.0004)$$
$$\longrightarrow 10^{-4}(0.4000) \qquad \text{（规格化）}$$

其计算结果的有效数字位数大大丢失，尽管印出的结果为$10^{-4}(0.4000)$，但包括4在内都不一定是有效数字。

（四）注意计算步骤的简化，减少算术运算的次数。

如上所述，计算过程中的每一步都有可能产生误差。而且计算过程中的每一步误差都有可能传递到下一步去，而这种传递有时是增加的，有时是减小的。同时，计算过程中每一步产生的误差，都会积累到最终的计算结果中去，只不过误差的积累有时是增加的，有时则互相抵消而导致减小。总而言之，在计算过程中都有可能引起导致结果误差增大的误差传播或误差积累等问题。因此，在数值计算中，必须要考虑简化计算步骤的问题，一方面可以减小计算的工作量，另一方面由于减少了算术运算的次数，使计算的积累误差有可能减小。对于误差的积累和传播以及计算工作量的问题，将在第四章中深入讨论。

（五）“坏条件”函数值的判别法。

设有函数

$$y=f(x), \quad a\leqslant x\leqslant b$$

如果在计算函数值$f(x)$时，用x的近似值x^*来代替，那么函数值$f(x)$就被$f(x^*)$所代替，其绝对误差为

$$E[f(x)]=f(x)-f(x^*)$$

通常，我们总是希望当x^*很接近x时，$f(x^*)$也能很好地接近$f(x)$。但是，实际情形往往不是这样。对于某些x^*，$f(x^*)$能很好地接近$f(x)$，而对于另外一些x^*则不能。这种现象主要是与$f(x)$的特性有关。

设$f(x)$在$[a,\ b]$上具有一阶导数，则对于x，$x^*\in[a,\ b]$时，由微分中值定理有

$$E[f(x)]=f(x)-f(x^*)=f'(\xi)(x-x^*)=f'(\xi)E(x)$$

$$\xi\in[a,b]$$

如果在区间$[a,b]$上有$|f'(x)|\leqslant 1$，则有

$$|E[f(x)]|\leqslant|E(x)|$$

这就是说，当满足$|f'(x)|\leqslant 1$时，自变量的微小变化引起的函数值的变化更微小。如果对于某一点$\hat{x}$，$|f'(\hat{x})|$的值很大，则我们就说函数$f(x)$在$\hat{x}$这一点的计算在绝对误差意义下是坏条件的。$|f'(\hat{x})|$的值究竟多大才算坏条件，可以随解题的要求而定。

例 3 当x在0点附近，而n很大时，计算函数$f(x)=\frac{1}{n}\sin(n^2x)$的值。

由于$f'(x)=n\cos(n^2x)$，所以在$x=0$点将是坏条件的。

如上所述，对于实际问题的计算效果可以用绝对误差来衡量。但是，对于比较多的问题，其计算效果往往要用相对误差来衡量。

如果$x\neq 0$，设

$$E(x)=x-x^*,\quad E[f(x)]=f(x)-f(x^*)$$

则

$$E_r(x)=\frac{E(x)}{x}=\frac{x-x^*}{x}$$

$$E_r[f(x)]=\frac{E[f(x)]}{f(x)}=\frac{f(x)-f(x^*)}{f(x)}$$

由此可以计算

$$C_p=\left|\frac{E_r[f(x)]}{E_r(x)}\right|=\left|\frac{x[f(x)-f(x^*)]}{f(x)(x-x^*)}\right|$$

当$x-x^*$充分小时

$$C_p\approx\left|\frac{xf'(x)}{f(x)}\right|$$

上式表明，C_p的大小反映了函数值的变动相对于自变量的变动程度。如果对于某点$\hat{x}$，C_p很大，则称函数$f(x)$在$\hat{x}$点的计算在相对误差意义下是坏条件的。同样，C_p的值究竟多大才称为坏条件，也是根据计算的要求来确定。

例 4 给定$f(x)=\ln x$，则

$$C_p=\frac{xf'(x)}{f(x)}=\frac{1}{\ln x}$$

由此看出，当x很接近于1时，函数$f(x)$的计算是坏条件的。

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com