

广义相对论 引论

王仁川 著



中国科学技术大学出版社

广义相对论引论

王 仁 川 著



中国科学技术大学出版社

1996

图书在版编目(CIP)数据

广义相对论引论 / 王仁川 著. ——合肥: 中国科学技术大学出版社,

1996年1月

ISBN 7-312-00759-7

I 广义相对论……

II 王仁川

III ①相对论

IV O

2468/06

中国科学技术大学出版社出版发行

(安徽省合肥市金寨路96号,230026)

安徽科技开发公司科佳电脑排印技术部排版

安徽省金寨县印刷厂印刷

全国新华书店经销

开本:850×1168/32 印张:9 字数:233千

1996年1月第1版 1996年1月第1次印刷

印数:1—2000册

ISBN 7-312-00759-7/O·172 定价:8.50元

序

最近六、七年,作者一直在中国科学技术大学,给天体物理和理论物理专业的研究生讲授广义相对论。这本书是作者长期在这个基础的理论领域中的思考、研究和教学的总结。它称之为“引论”,并非内容浅显,而是它仅涉及广义相对论中最基本的理论问题。无论从物理或从数学角度看,都可以说本书的理论跨度大,涉及内容较多。但是,由于它是教科书,要求学生通过自学也能掌握,因而在难点上给出了详尽的注解。作者相信,有一般数学、物理背景的学生都能看懂。本书没有特别编入习题,读者可以把注解当习题做,并从本书的学习中培养看文献的能力。只要正确理解书中的物理内容,熟悉其数学方法,再适当补充点背景知识,阅读与相对论有关的文献,不会有太大的困难。

书中介绍黎曼几何,采用把黎曼空间镶嵌在高维欧氏空间中讨论的方法。此法优点是直观,因而容易为物理系的学生所接受。书中对自然标架方法和嘉当活动标架方法平行介绍,虽然在内容上有点重复,然而这种重复对初学者既有好处,亦是必要的。如果只限于在自然标架上介绍黎曼几何,作为表述相对论的工具显得有点陈旧。在阅读近代理论物理和引力理论的文献时,可能会遇到较大的困难。嘉当活动标架的表述和外微分方法,无论对数学和物理都极其重要,也是具体计算中强有力的工具。作为近代广义相对论理论不能不作介绍。如果只限于介绍嘉当方法,对于几何背景知识很少的物理系学生,也会不适应大量用经典微分几何方法表述的文献和参考书。两种方法都介绍,有些结论的证明反复出现,有助于初学者对这门复杂而又陌生的数学方法的理解、掌握与应用。

尽管本书在物理方面仅涉及广义相对论的最基本的内容,然而并不回避难点。如推广光速不变原理,并利用它区分两类时空坐标和两类物理量。而这两类坐标和两类物理量,正好对应数学中两类标架上的表述。在作者看来,本书首先揭示嘉当标架的特殊物理含义,以新的观点和方法论述广义相对论的基本问题,这能使广义相对论置于更坚实的数学与物理的基础上。利用时空的洛伦兹群对称的规范理论,可把广义相对论推广到微观世界。由规范理论得到了广义相对论推广的可能形式,以及度规场的能量动量张量的形式。同时揭示了可能存在新的类似引力的规范力,这种力在微观世界与引力不同,是不能被忽

略的。

书中的大部分公式可在有关的文献或教科书中找到。其证明有的是采用原始文献或书中的,只是叙述更详尽,以使初学者更容易看懂。原始文献中缺少证明的,作者补上证明或加上注解。有的作者重新给出证明。也有的公式和证明均是新的,是作者一家之言,仅供读者参考。

作者很难保证这本书没有错误,印刷排版错误,作者笔误,或者定义不确切,叙述不严谨,逻辑推理不恰当,甚至观点出错,计算出错等等。作者希望不出大错,不犯明显的原则性的错误,目前对作者来说也仅仅是一种良好的愿望而已。众所周知,在理论物理和天体物理中,不是所有的课题的基础都十分牢固的。甚至包括广义相对论自身。它的时空坐标意义不清楚,实验和理论均没有证明,在局部惯性系中一定观测不到静止电荷的辐射。如果实验和理论一旦给出相反的结果,广义相对论这座庞然大厦势必倒塌,在这个领域的一切工作均要付之东流。问题是人们之所以对广义相对论坚信不疑,不仅在于它的形式优美,有它,自然界似乎更和谐,而且更重要的是在太阳系中它有比较可靠的检验。即使这样,补基础工作仍不可少。不能说修建大厦往上盖就是前沿,补基础或者研究基础的可靠性就不是前沿。实际上,这是更重要、更困难的前沿。其工作决不是简单的重复劳动,或者照猫画虎所能完成的。通过对学科基础的研究,会带来新原理、新方法的发现。这些新的发现反过来会促进学科自身更健康地发展。作者尝试在这方面迈开的一步,不管成功与否,至少希望它能起到抛砖引玉的作用,为物理学的发展贡献一点微薄的力量。

感谢朱栋培教授阅读了全稿,提了许多有益的建议。博士生范靖云同学复核了全部计算,吴北珍同志给予了大力协助,并对天体物理中心同事们的关心和支持深表谢意。

谨以此书纪念我的母亲!

王仁川于合肥

一九九五年二月四日

目 次

序	(I)
第一章 引 言	(1)
§ 1.1 时间与空间	(1)
I 空间和时间的描述	(1)
II 时空观念的演变	(2)
§ 1.2 物理量与物理规律	(4)
I 物理量	(4)
II 物理规律	(5)
§ 1.3 物理规律的协变性与不变性	(5)
I 静止系之间的变换	(6)
II 相对运动惯性系之间的变换	(7)
III 惯性系与非惯性系之间的变换	(11)
§ 1.4 引力理论与等效原理	(12)
I 牛顿引力理论	(12)
II 时空弯曲理论	(14)
第二章 狭义相对论	(16)
§ 2.1 矢量与张量	(16)
I N 维仿射空间 R^N	(16)
II 欧氏空间和伪欧氏空间	(18)
III 特殊形式张量及张量内积	(22)
IV 曲线坐标与黎曼空间中的矢量和张量	(30)
§ 2.2 洛伦兹变换	(33)
I 闵可夫斯基空间	(33)
II 洛伦兹群分类	(36)

III	空间标架方向不变的洛伦兹变换	(38)
§ 2.3	相对论效应	(40)
I	时间的延缓	(40)
II	刚尺缩短	(41)
III	速度合成	(42)
IV	多普勒效应	(44)
§ 2.4	光速不变原理的推广, 非惯性系	(47)
I	非惯性系中光速不变	(48)
II	一般非惯性系广义量与测量量之变换	(53)
III	特例说明: 论伽利略变换的意义	(57)
第三章	相对论力学	(61)
§ 3.1	相对论单质点动力学	(61)
I	修改牛顿力学的必要性	(61)
II	相对论质点动力学	(62)
III	牛顿第一和第三定律	(65)
§ 3.2	相对论单质点运动	(66)
I	四速方程	(66)
II	几种简单的典型解	(67)
§ 3.3	相对论质点系力学	(71)
I	相对论质点力学的新形式	(72)
II	相对论质点系力学	(76)
§ 3.4	惯性系中的电动力学	(79)
I	电流密度四矢 j^α	(79)
II	麦克斯韦方程	(80)
III	洛伦兹力	(82)
IV	规范不变性	(84)
§ 3.5	相对论流体力学	(84)
I	流体运动	(85)
II	理想流体	(86)

III	独立质点系的物态方程	(89)
IV	非理想流体	(90)
第四章	黎曼空间张量分析	(95)
§ 4.1	特殊的非惯性系的时空参数	(95)
I	匀加速系	(96)
II	旋转系	(98)
§ 4.2	度规与联络	(99)
I	度规 $g_{\mu\nu}$	(100)
II	联络 $\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}$ 和 ω_{bc}^a	(103)
§ 4.3	绝对微分与协变微商	(106)
I	绝对微分 D	(107)
II	嘉当标架上的绝对微分	(109)
III	绝对微分应用举例	(111)
§ 4.4	外微分与微分形式	(113)
I	Pfaff 微分形式	(114)
II	外微分	(115)
III	Hodge 映射	(117)
IV	伴随外微分	(120)
§ 4.5	李微分	(122)
I	李微分	(122)
II	等长无穷小运动, Killing 矢量场	(126)
III	最大的对称空间	(128)
第五章	弯曲时空中的宏观物理规律	(130)
§ 5.1	引力与时空弯曲	(130)
I	引力场与弯曲时空的相似性	(130)
II	引力场与弯曲时空的不同性	(131)
III	引力场与时空弯曲联系的条件	(131)
IV	存在时空弯曲的观测根据	(132)
§ 5.2	弯曲时空中的物理规律	(133)

I	单质点力学	(134)
II	电动力学	(137)
III	质点系力学	(139)
IV	弯曲时空中的流体力学	(142)
§ 5.3	弯曲时空中的流形坐标与时空测量	(145)
I	弯曲时空中光速不变	(145)
II	弯曲时空流形坐标及坐标变换的物理意义	(149)
III	局部惯性系	(151)
IV	局域性观测理论	(153)
§ 5.4	嘉当标架上的物理规律	(156)
I	物理量与物理规律在嘉当标架上的表述	(156)
II	应用一:自由质点运动和牛顿极限	(158)
III	应用二:引力红移	(159)
IV	应用三:自由落体升降机内静止电荷的辐射问题	(161)
第六章	曲率与嘉当结构方程	(165)
§ 6.1	曲率张量	(165)
I	曲率张量 $R^\lambda_{\tau\mu}$ 的定义	(165)
II	曲率张量的性质	(167)
III	黎曼空间的几何性质与曲率	(171)
§ 6.2	嘉当结构方程	(179)
I	嘉当结构方程	(179)
II	嘉当方程相容的条件	(180)
III	比安基恒等式的推广	(181)
IV	黎曼空间 ω^a_b 的计算	(181)
V	例:二维球面曲率	(183)
§ 6.3	Hodge 映射的特征矢与时空曲率新表示	(183)
I	Hodge 映射的特征矢	(183)
II	以 Hodge 特征矢为基表示的曲率张量	(184)

III Ricci 平直	(186)
第七章 爱因斯坦场方程	(187)
§ 7.1 爱因斯坦场方程	(187)
I 场方程建立的根据和条件	(188)
II 场方程	(189)
III 坐标条件与哥西问题	(191)
§ 7.2 场方程变分原理	(193)
I 作用量原理	(193)
II 用变分方法导出场方程	(195)
§ 7.3 物质场方程及能动张量	(200)
I 物质场能量动量张量的变分表示形式	(200)
II 物质场方程	(201)
第八章 真空场方程的几个严格解	(203)
§ 8.1 史瓦西(Schwarzschild)解	(203)
I 线元的形式	(203)
II 真空场方程	(204)
III 史瓦西度规的意义	(208)
§ 8.2 Birkhoff 定理	(210)
I 球对称的度规	(211)
II 曲率的计算	(212)
III 真空场方程解 $C^+ = 0$ 的解	(213)
§ 8.3 Kerr 解	(214)
I 爱丁顿度规的形式	(214)
II 爱丁顿度规下的真空场方程	(216)
III 真空场方程解	(218)
IV 特例	(222)
第九章 广义相对论在太阳系中的检验	(228)
§ 9.1 史瓦西度规中的自由质点	(228)
I 测地线方程在嘉当活动标架上的表述	(228)

II	史瓦西度规中的自由质点的运动方程	(228)
§ 9.2	太阳引起光线偏折	(232)
§ 9.3	水星近日点进动	(234)
§ 9.4	雷达回波的延迟	(235)
§ 9.5	附录	(238)
第十章	时空洛伦兹对称的规范理论	(242)
§ 10.1	预备知识	(243)
I	背景空间	(243)
II	李群与李代数的基本概念	(245)
III	矩阵作为变量的微商	(251)
§ 10.2	规范变换与规范场	(253)
I	规范变换	(253)
II	规范场	(256)
III	自由规范场的拉氏量 $\mathcal{L}_G$	(259)
IV	物质与规范场的耦合方程	(261)
§ 10.3	时空洛伦兹对称的规范理论	(264)
I	$e^a{}_\mu, \omega^a{}_{b\mu}$ 和 $R^a{}_{b\mu\nu}$	(265)
II	自由规范场方程	(267)
III	物质场方程	(270)
IV	规范场方程	(271)
V	微观世界的爱因斯坦场方程	(272)

第一章 引言

§ 1.1 时间与空间

物理学是研究物质的最简单运动规律的科学。最终目的是：找到物质运动、变化与相互作用的内在联系，以最少的假设通过分析、推理，解释所有的相关实验结果，预言新的实验现象。物理学所指的物质及其运动既脱离不了空间、也脱离不了时间，同样，时空也不能脱离物质及其运动而独立存在。显然，没有物质就没有“尺”，无法定义空间；没有物质运动与变化也就没有“钟”，同样无法定义时间。因此，时空观念是物理学中最基本的也是最重要的概念，任何对时空观念的更新与深化，势必对整个物理学产生巨大的和革命性的影响，从中引出的任何结论都是普适的，任何物理定律均不能与之相矛盾。

I 空间和时间的描述

经验告知，我们所生存的空间是三维的，即用三个独立参数完全确定空间点的位置。为实现它需建立一个标架，并做三件事：

- a. 选定标架原点
- b. 确定标架三个独立方向
- c. 选定长度单位

以上三条均带有观测者的随意性，然而相对标架静止的点之间的距离，不因其选择不同而改变，因此，相对静止的各种空间标架均等价。如果可以把这种不变性推广到非相对静止标架，则称此空间是绝对的。

时间，是一维的。即用一个参数能表明所有事件发生的先后顺

序。它同样有选择时间起点和单位的问题,与空间不同的是时间标架的方向是确定的,不带有观测者的随意性。为了给出发生在空间不同点的事件的先后顺序和时间间隔,需选择时间标架,即在已定空间标架的固定点上选择标准钟,并使空间所有相对静止点上的钟与标准钟同步。选择不同的标准钟记录同一事件的时间可能不同,但两事件发生的先后顺序和时间间隔不会因钟选择不同而改变。显然相对静止的空间标架相互等价。如果可以把这种不变性推广到非相对静止标架,则称此时间是绝对的。

选择时空标架在物理上称为选择参考系,不同参考系其空间标架之间有如下三种情况

- a. 相对静止
- b. 相对匀速直线平动
- c. 相对非匀速直线平动

II 时空观念的演变

1 牛顿的绝对时空观

时间最初被看成是描述物质运动和变化的参数,自然与空间无关。不同参考系给出的同一时空点的坐标数值可以不同,而两时空点之间的时-空间隔却是不变的,如果不同参考系均取相同的时空单位,则有

$$\Delta t = \Delta t' \quad \Delta l = \Delta l' \quad (1.1)$$

Δt 和 $\Delta t'$; Δl 和 $\Delta l'$, 分别代表两参考系 O, O' 所观测到的时间间隔与空间距离的数值, (1.1) 式代表了牛顿的绝对时空观, 与经典力学适用范围相对应, 当物体速度(包括参考系之间的相对速度)远远低于光速时, 牛顿时空观与观测是一致的。

2 相对论的时空观

与牛顿时空观不同, 相对论时空观认为, 时空不能截然分开而是统一的整体。不变的不是时间间隔和空间距离, 而是时空线元长度, 即

$$\Delta s = \Delta s' \quad (1.2a)$$

其中

$$\Delta s^2 = \Delta l^2 - c^2 \Delta t^2, \quad \Delta s'^2 = \Delta l'^2 - c^2 \Delta t'^2 \quad (1.2b)$$

在经典力学范围内,可以把光速 c 看成无穷大。很明显当 $c \rightarrow \infty$ 时, (1.2)式与(1.1)两式相互等价,两时空观不会显出差异。如果把 Δl 看成一质点在 O 系中 Δt 时间内移动的空间距离,而此质点在另一参考系 O' 中静止($\Delta l' = 0$),把 $\Delta t'$ 记为 $\Delta \tau$, τ 称之为原时。即是固定在质点上的钟所计的时。(1.2)式可改写成

$$c^2 \Delta \tau^2 = c^2 \Delta t^2 - \Delta l^2 \quad (1.3)$$

给出线元形式为 $\Delta s^2 = \Delta l^2 - c^2 \Delta t^2$ 的空间称为闵可夫斯基空间,它是平直的。由微分几何可知,给定了线元形式相应给出了度量,从而决定了空间结构。(1.3)式两边除以 $\Delta \tau^2$,再乘 $m^2 c^2$,其中 m 代表质点的质量,利用相对论质点力学中的能量和动量表示式(参看(3.5—6)式)

$$mc^2 \frac{\Delta t}{\Delta \tau} = E \quad (1.4a)$$

$$m \frac{\Delta l}{\Delta \tau} = P \quad (1.4b)$$

即可得到著名的爱因斯坦的质能公式

$$E^2 = P^2 c^2 + m^2 c^4 \quad (1.5)$$

爱氏质能公式与物质自身性质无关;是时-空结构性质的反映,惯性质量 m 在这里仅仅起比例常数的作用。在导出(1.5)式过程中,暗藏了一条极其重要的假定,即物质对时空结构没有作用,否则 m 就不能作为简单的比例常数乘以(1.3)式两边。除了极端的条件,此假定均能得到满足,而极端条件只有在天体和宇宙中才可能出现。因此,爱因斯坦的质能公式是普适的,对地球上的宏观和微观世界均适用。

3 广义相对论的时空观

广义相对论以前的物理学只知道时空会影响物质的存在和运

动,却不知其反作用。虽然早在牛顿时代已经发现了万有引力定律,知道物质的彼此存在会影响各自的运动。这种影响是以引力或引力场的形式出现,其背景时空仍是平直的,表面上与其它物理场没有区别,但本质是不同的。因为在局域时空内,引力能用惯性力完全抵消,其它物理场力则不能。由此在引力场中自由粒子的运动轨迹只与其初始条件有关而与其质量无关,这与稳定的理想约束系统中“自由粒子”沿测地线运动非常相似。按广义相对论时空观,引力的存在是物质影响时空结构的一个明显证据。

广义相对论研究物质的存在与运动怎样决定时空构造,以及时空的构造如何影响物质的存在与运动。由于物质对时空结构的影响极其微弱,只有在具有巨大质量的天体和宇宙中才能观测到其效应。故广义相对论是研究宇宙学和天体物理最重要的理论工具。

§ 1.2 物理量与物理规律

I 物理量

标明物质运动,相互作用和形态特征的量统称为物理量。它可以按自身的固有性质和随参考系变化的性质分类。

按自身固有性质分类:

(1)基本物理量:静止质量 m , 电荷 Q , 时空坐标 $x = (r, t)$, 力 F 、电磁四矢势 A, φ 等。

(2)派生物理量:速度 v 、动量 P 、能量 E 、角动量 L 、加速度 a 、电磁场强度 E, H , 电荷密度 ρ 和电流密度 j 。

按随参考系变化的特征分类:

(1)不随参考系标架方向变化的物理量,数学上称为标量。如普适常数——光速 c 、普朗克常数 h 、万有引力常数 G 和电子电荷 e 等,但普适常数只是其中的一种。标量还可以是时空点的函数,只是它不依赖参考系标架方向的选择,如自旋为零的玻色子的波函数就

是标量波函数。

(2) 随参考系标架方向变化而变化的物理量, 又能分成:

第一类: 随参考系标架方向按某种规律变化的量, 如矢量、张量。

第二类: 无固定规律变化, 或只有对某些特殊参考系才有意义的量。

这两类并没有不可逾越的鸿沟, 均要看参考系具体变化而定。如: 对于两个空间标架相对静止系, 通常速度 $v = \frac{dr}{dt}$ 、力 F 、加速度 $a =$

$\frac{d^2r}{dt^2}$, 电场 E 、磁场 H 、电磁矢势 A 等均可以看成矢量。如果两参考

系是相对运动的惯性系, 在牛顿时空观下, v 不是通常数学定义的矢量, a 、 F 仍可看成矢量, 而 A 、 E 、 H 、 φ 则什么都不是, 既不能看成矢量、张量, 也不能看成标量。在相对论时空观下, 牛顿力学中 v 、 a 、 F 则什么都不是, 而 (A, φ) 构成矢量, E 、 H 合起来构成二阶反称张量。物理量与参考系的关系, 由物理量所满足的动力学方程所决定。

II 物理规律

物理量之间的关系称为物理规律, 即物理量之间所满足的方程式。物理规律既不是凭空想出来的, 也不是简单的实验归纳和总结, 它体现了人类对客观世界认识由感性到理性的飞跃。其方程的正确性不仅决定于它能解释现有的结果, 而且要预言新的现象, 并为实验所证实。物理规律中有基本的、有派生的。如, 力学中牛顿三大定律、电磁学中麦克斯韦方程组, 均属于基本的物理规律。流体力学、弹性力学、天体力学、磁流体力学、辐射理论、光学中的基本方程都是在具体条件下, 基本物理规律的应用和推广。

§ 1.3 物理规律的协变性与不变性

参考系之间的变换是时空标架之间的变换, 它对物理量满足方

程的形式必然产生影响,只有那些形式不变的方程才算是基本的。下面以牛顿方程和麦克斯韦方程为例来说明。

I 静止系之间的变换

如图 1.1 所示,空间任一固定点 P ,在 O 、 O' 系的位置矢量分别记为

$$\begin{aligned} x &= x^k e_k \\ x' &= x'^k e'_k \end{aligned} \quad (1.6)$$

其中上下指标相同表示求和,省略了 $\sum_{k=1}^3$ 符号。

$$x' = x - b \quad (1.7)$$

两参考系 O 与 O' 的空间标架均取正交归一基,它们之间的变换是

$$e'_k = R_k^j e_j \quad (1.8)$$

其变换矩阵 $R = (R_k^j)$ 是 3×3 空间转动矩阵,其矩阵元指标前者为行,后

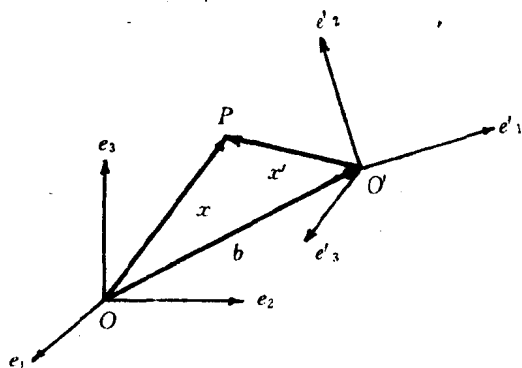


图 1.1

者为列,转动矩阵满足

$$\tilde{R} R = 1 \quad (1.9)$$

(1.7)式用坐标分量表示为

$$\begin{aligned} x'^k &= R_k^j x^j - b^k \\ t' &= t \end{aligned} \quad (1.10)$$

空间原点平移 b , 和空间标架旋转矩阵 R , 均是与时空无关的常矢量和常矩阵。在(1.10)式变换下,牛顿方程和麦克斯韦方程均不改变,它表明空间没有特优的点和特优的方向。