现代数学译丛

有限群的线性表示

〔法〕J.-P. 塞尔 著

科学出版社

现代数学译丛

有限群的线性表示

〔法〕J.-P. 塞尔 著

郝钢新 译

科学出版社

1984

DS99/20

内 容 简 介

本书从表示论的最基本的内容入手，逐步深入，直到这方面最近代的成果. 它深入浅出地介绍了有限群表示论的最主要的内容. 全书共分三部分：第一部分介绍了表示论中最基本内容，这部分只要具备初步的线性代数知识即可阅读；第二部分论述了特征零的表示论，用到比线性代数略进一步的知识(群代数、张量积、模、半单代数等)；第三部分论述了模表示论，初步介绍了特征 p 情形的表示论，处理方法极有特色. 书中附有习题，以便加深理解.

本书是根据第二版的英译本 (Springer-Verlag, 1977) 翻译的，并根据法文修订第三版作了校订.

读者对象为大学数学系高年级学生、研究生、教师及有关专业的工作者.

Jean-Pierre Serre

Représentations linéaires des groupes finis

Troisième édition corrigée

Hermann Paris 1978

现代数学译丛

有限群的线性表示

〔法〕J.-P. 塞尔 著

郝锕新 译

责任编辑 吕 虹 张鸿林

科学出版社 出版

北京朝阳门内大街137号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1984年2月第 一 版 开本：850×1168 1/32

1984年2月第一次印刷 印张：6

印数：0001—8,200 字数：153,000

统一书号：13031·2478

本社书号：3404·13—1

定价： 1.15 元

序

这本书由三部分组成，每部分的程度和目的有所不同.

第一部分最初是为量子化学工作者而写的. 它阐述了由 Frobenius 所建立的关于线性表示与特征标之间的对应关系. 这是在数学里以及在量子化学或物理里经常要用到的基本结果. 我力图仅用群的定义和线性代数的初步知识，将证明写得尽可能的浅显. 例子(第五章)都是从对于化学工作者有用的那些例子里选出来的.

第二部分是 1966 年为高等师范学校（l'École Normale）二年级学生所写的教程. 它在以下几点完善了第一部分:

(a) 表示的级和特征标的整性(第六章);

(b) 诱导表示，Artin 定理和 Brauer 定理及其应用（第七章—第十一章);

(c) 有理性问题(第十二章和第十三章).

所用到的是线性代数中这样一些方法（比第一部分里的意义广泛一些）: 群代数，模，非交换张量积，半单代数.

第三部分是对 Brauer 理论的一个介绍: 从特征零过渡到特征 p (和相反的情形). 我无所顾忌地使用了 Abel 范畴的语言(投射模，Grothendieck 群). 对于这一类问题来说，这种语言是非常合适的. 主要结果是:

(a) 分解同态映射是满射: 在特征 p 里的一切不可约表示都可以"虚拟地"提升到特征零里(即提升到一个适当的 Grothendieck 群内).

(b) 方- Swan 定理: 当所考虑的群是 p-可解的时候，上述论断中"虚拟地"这个词可以删去.

在这一部分里还给出了关于 Artin 表示的若干应用.

我以愉快的心情感谢:

Gaston Berthier 和 Josiane Serre，他们同意我转录第一部分，这原是作为附录写在他们所著的《量子化学》一书中的;

Yves Balasko，他根据一些讲义写出了第二部分的初稿;

Alexandre Grothendieck，他同意我转录第三部分，这部分最初是在他的代数几何讨论会 (Séminaire de Géométrie Algébrique, I. H. E. S., 1965/1966)上发表的。

目　　录

第一部分　表示和特征标

第二部分 在特征零情形的表示

第三部分 Brauer 理论导引

第一部分　表示和特征标

第一章　线性表示通论

1.1　定义

令 V 是复数域 $\mathbf{C}$ 上一个向量空间，$\mathbf{GL}(V)$ 是由 V 到自身的一切同构所组成的群．按照定义，$\mathbf{GL}(V)$ 的一个元素 a 是 V 到 V 内的一个线性映射，它有一个逆映射 a^{-1}；这个逆映射也是线性的．当 V 具有一个 n 元有限基 (e_i) 时，每一个线性映射 $a: V \to V$ 由一个 n 阶方阵 (a_{ij}) 所确定，系数 a_{ij} 都是复数；这些系数是通过将象 $a(e_j)$ 用基 (e_i) 来表示：

$$a(e_j) = \sum_i a_{ij} e_i$$

而得到的．

说 a 是一个同构相当于说 a 的行列式 $\det(a) = \det(a_{ij})$ 不等于零．因此，群 $\mathbf{GL}(V)$ 可以与一切 n 阶可逆方阵所组成的群等同起来．

现在设 G 是一个有限群，具有单位元 1 和运算 $(s, t) \longmapsto st$．群 G 到群 $\mathbf{GL}(V)$ 内的一个同态 ρ 叫做 G 在 V 内的一个线性表示．换句话说，对于每一元素 $s \in G$，令 $\mathbf{GL}(V)$ 的一个元素 $\rho(s)$ 与它对应，使得对于 $s, t \in G$，等式

$$\rho(st) = \rho(s) \cdot \rho(t)$$

成立(我们常把 $\rho(s)$ 写作 ρ_s)．由上面的等式可以推出：

$$\rho(1) = 1; \quad \rho(s^{-1}) = \rho(s)^{-1}.$$

当 ρ 被给定时，我们就说 V 是 G 的一个表示空间(或者为了简单起见，就说 V 是 G 的一个表示)．今后我们只限于考虑 V 是有限维向量空间的情形．这并不是一个过分的限制．事实上，对于多数应

用来说，人们感兴趣的只是V的有限个元素x_i，并且总可以找到V的一个有限维子表示（稍后将定义，参看 1.3），它包含这些x_i：就取由这些x_i的象$\rho_s(x_i)$所生成的子空间作为表示空间.

现在设V是有限维的，令n是它的维数. 我们也称n是所考虑的表示的级. 令(e_i)是V的一个基，令R_s是ρ_s关于这个基的矩阵. 我们有

$$\det(R_s) \neq 0; \quad R_{st} = R_s \cdot R_t, \quad s, t \in G.$$

如果令$r_{ij}(s)$表示矩阵R_s的系数，那么第二个公式变成

$$r_{ik}(st) = \sum_j r_{ij}(s) r_{jk}(t).$$

反之，给了满足上面等式的可逆矩阵$R_s = (r_{ij}(s))$，相应地就有G在V内的一个线性表示ρ；这就是说，用“矩阵形式”给出一个表示.

设ρ和ρ'是同一个群G分别在向量空间V和V'内的表示. 这两个表示说是等价的（或同构的），如果存在一个线性映射τ：$V \to V'$，它把ρ“变为”ρ'，也就是说，以下等式成立：

$$\tau \circ \rho(s) = \rho'(s) \circ \tau, \quad 对一切\ s \in G.$$

当ρ和ρ'是通过矩阵形式分别由R_s和R'_s给出时，这个等式的意义就是，存在一个可逆矩阵T使得

$$T \cdot R_s = R'_s \cdot T, \quad 对一切\ s \in G,$$

或写成$R'_s = T \cdot R_s \cdot T^{-1}$. 我们可以把这样的两个表示看作同一个（对于每一$x \in V$令$\tau(x) \in V'$与它对应）；特别，$\rho$和$\rho'$有相同的级.

1.2 基本例子

(a) 群G的一个 1 级表示是一个同态$\rho: G \to \boldsymbol{C}^*$，这里$\boldsymbol{C}^*$表示非零复数乘法群. 因为$G$的每一元素都有有限阶，所以$\rho$的值$\rho(s)$都是单位根. 特别，我们有$|\rho(s)| = 1$.

如果对一切$s \in G$都取$\rho(s) = 1$，我们就得到G的一个表示，叫做单位（或平凡）表示.

(b) 令 g 是群 G 的阶，V 是一个 g 维向量空间，而 $(e_t)_{t\in G}$ 是 V 的一个基，以 G 的元素 t 为指标．对于 $s\in G$，令 ρ_s 是 V 到 V 内的线性映射，它将 e_t 变到 e_{st}；这样就定义了一个线性表示，叫做 G 的**正则表示**．这个表示的级等于 G 的阶．注意 $e_s=\rho_s(e_1)$，所以 e_1 的象组成 V 的一个基．反之，令 W 是 G 的一个表示，它含有这样一个向量 w，使得 $\rho_s(w)$，$s\in G$，组成 W 的一个基，那么 W 与正则表示同构(令 $\tau(e_s)=\rho_s(w)$，就定义了一个同构 $\tau: V\to W$)．

(c) 更一般地，设 G **作用在**一个有限集 X 上．这就是说，对于每一 $s\in G$，都给出 X 的一个置换 $x\longmapsto sx$，满足等式

$$1x=x,\ s(tx)=(st)x,$$

这里 s，$t\in G$，$x\in X$．令 V 是一个向量空间，它具有一个基 $(e_x)_{x\in X}$，这里取 X 的元素作为指标．对于 $s\in G$，令 ρ_s 是 V 到 V 内的线性映射，它把 e_x 变到 e_{sx}；这样得到的 G 的表示叫做 G 关于 X 的**置换表示**．

1.3 子表示

令 $\rho: G\to \mathbf{GL}(V)$ 是一个线性表示，W 是 V 的一个子空间．假设 W 在 G 的作用下是**稳定的**(或者说是“不变的”)，换句话说，假设对于一切 $s\in G$，$x\in W$，都有 $\rho_s x\in W$．于是 ρ_s 在 W 上的限制 ρ_s^W 是 W 到它自身上的一个同构，并且 $\rho_{st}^W=\rho_s^W\cdot\rho_t^W$．这样一来，$\rho^W: G\to\mathbf{GL}(W)$ 就是 G 在 W 内的一个线性表示．W 叫做 V 的一个**子表示**．

例 取 V 是 G 的正则表示 [参看 1.2 (b)]．令 W 是由元素 $x=\Sigma_{s\in G}e_s$ 所生成的 V 的一维子空间．那么对一切 $s\in G$ 都有 $\rho_s x=x$，从而 W 是 V 的一个子表示．这个子表示与单位表示同构．(在 2.4 我们将确定正则表示的一切子表示．)

在往下进行之前，让我们先来回顾一下线性代数中的某些概念．向量空间 V 叫做子空间 W 与 W' 的**直和**，如果每一 $x\in V$ 可以唯一地写成 $x=w+w'$ 的形式，这里 $w\in W$，$w'\in W'$；这相当于说 W 与 W' 的交 $W\cap W'$ 是 0，并且 $\dim(V)=\dim(W)+$

$\dim(W')$. 这时就写作 $V = W \oplus W'$ 而 W' 叫做W在V里的一个余子空间. 将每一 $x \in V$ 变到它在W中的分量w的映射 p 叫做对于分解 $V = W \oplus W'$ 来说V在W上的射影, p 的象就是W,并且对于一切 $x \in W$, $p(x) = x$. 反之, 如果 p 是V到自身内满足上述两个条件的一个线性映射,可以验证,V是W与 p 的核 (一切满足条件 $p(x) = 0$ 的 x 所成的集)的直和. 这样一来,V在W上的射影和W在V中的余子空间之间就建立了一个一一对应.

现在让我们再回到子表示上来.

定理 1 令 $\rho: G \to \mathbf{GL}(V)$ 是G在V内的一个线性表示, 而W是V的一个在G之下稳定的子空间. 那么存在W在V中的一个余子空间 W^0, 它也在G之下稳定.

令 W' 是W在V中的任意一个余子空间, p 是相应的V在W上的射影. 作 p 在G的元素之下的共轭,并且求平均得

$$p^0 = \frac{1}{g}\sum_{t \in G} \rho_t \cdot p \cdot \rho_t^{-1} \quad (g \text{ 是 } G \text{ 的阶}).$$

因为 p 将V映入W而 ρ_t 使W不变, 所以 p^0 将V映入W. 如果 $x \in W$, 那么 $\rho_t^{-1}x \in W$. 因此

$$p \cdot \rho_t^{-1}x = \rho_t^{-1}x, \quad \rho_t \cdot p \cdot \rho_t^{-1}x = x, \quad \text{从而 } p^0x = x.$$

这样, p^0 是V在W上的一个射影,它对应着W的一个余子空间W^0. 再者,对一切 $s \in G$, 我们有

$$\rho_s \cdot p^0 = p^0 \cdot \rho_s.$$

事实上,计算一下 $\rho_s \cdot p^0 \cdot \rho_s^{-1}$, 就得到

$$\begin{aligned}\rho_s \cdot p^0 \cdot \rho_s^{-1} &= \frac{1}{g}\sum_{t \in G} \rho_s \cdot \rho_t \cdot p \cdot \rho_t^{-1} \cdot \rho_s^{-1} \\ &= \frac{1}{g}\sum_{t \in G} \rho_{st} \cdot p \cdot \rho_{st}^{-1} = p^0.\end{aligned}$$

现在设 $x \in W^0$, $s \in G$, 那么 $p^0x = 0$, 因此 $p^0 \cdot \rho_s x = \rho_s \cdot p^0 x = 0$, 所以 $\rho_s x \in W^0$. 这就证明了 W^0 在G之下是稳定的. 定理证毕. □

注记 设V带有一个内积 $(x|y)$, 满足通常的条件: 对 x 是

线性的，对 y 是半线性的，并且当 $x \neq 0$ 时，$(x|x) > 0$. 又假设这个内积在 G 之下不变，即对于一切 $s \in G$，都有 $(\rho_s x|\rho_s y) = (x|y)$. 我们取 $\sum_{t \in G} (\rho_t x|\rho_t y)$ 来代替 $(x|y)$，总可以归结为这一情形. 在这样的前提下，W 在 V 中的正交余 W^0 是 W 的一个余子空间，并且在 G 之下稳定. 这样就得到定理 1 的另一证明. 注意内积 $(x|y)$ 的不变性意味着，如果 (e_i) 是 V 的一个标准正交基，那么 ρ_s 关于这个基的矩阵是一个酉阵.

保持定理 1 的前提和记法. 令 $x \in V$ 而 w 和 w^0 是 x 在 W 和 W^0 上的射影. 我们有 $x = w + w^0$，同时 $\rho_s x = \rho_s w + \rho_s w^0$，并且由于 W 和 W^0 都在 G 之下稳定，所以 $\rho_s w \in W$，$\rho_s w^0 \in W^0$. 这样，$\rho_s w$ 和 $\rho_s w^0$ 是 $\rho_s x$ 的射影. 因此，表示 W 和 W^0 确定了表示 V. 我们就说 V 是 W 和 W^0 的直和，并且记作 $V = W \oplus W^0$. V 的元素可以与元素对 (w, w^0) 等同起来，这里 $w \in W$，$w^0 \in W^0$. 如果 W 和 W^0 由矩阵形式 R_s 和 R_s^0 给出，那么 $W \oplus W^0$ 就由矩阵形式

$$\begin{pmatrix} R_s & 0 \\ 0 & R_s^0 \end{pmatrix}$$

给出. 任意有限多个表示的直和可以类似地定义.

1.4 不可约表示

令 $\rho: G \to \mathbf{GL}(V)$ 是 G 的一个线性表示. 我们说，ρ 是不可约的或单的，如果 V 不是 0 并且除了 0 和 V 之外，V 没有在 G 之下稳定的子空间. 由定理 1，第二个条件相当于说，V 不是两个表示的直和(除开显然的分解 $V = 0 \oplus V$). 一级的表示自然都是不可约的. 以后将会看到(3.1)，每一个非交换群至少有一个级 $\geqslant 2$ 的不可约表示.

通过作直和，不可约表示被用来构造其它的表示：

定理 2 每一个表示都是不可约表示的直和.

令 V 是 G 的一个线性表示. 我们对 $\dim(V)$ 作归纳法. 若 $\dim(V) = 0$，定理是显然的 (0 是不可约表示的空集的直和). 假设 $\dim(V) \geqslant 1$. 如果 V 不可约，那么已经没有什么要证的了；否

则，由定理 1，V 可以分解为直和 $V'\oplus V''$，而 $\dim(V')<\dim(V)$，$\dim(V'')<\dim(V)$. 由归纳法的假设，V' 和 V'' 都是一些不可约表示的直和，因而 V 也是一些不可约表示的直和. □

注记　令 V 是一个表示，$V=W_1\oplus\cdots\oplus W_k$ 是 V 的一个不可约表示的直和分解. 我们会问，这个分解是否唯一. 在一切 ρ_s 都等于 1 的情形，这个分解一般不是唯一的（这时 W_i 都是直线，而一个向量空间分成一些直线的直和的分解是很多的）. 然而，我们将在 2.3 看到，与一个给定的不可约表示同构的 W_i 的个数不依赖于分解的选取.

1.5　两个表示的张量积

同直和运算（这个运算具有通常加法的性质）在一起，还有一种"乘法"：张量积，有时也叫做 Kronecker 积. 它的定义如下：

设 V_1 和 V_2 是两个向量空间. 向量空间 W，连同一个 $V_1\times V_2$ 到 W 内的映射 $(x_1, x_2)\longmapsto x_1\cdot x_2$，叫做 V_1 与 V_2 的张量积，如果下列条件被满足：

(a) $x_1\cdot x_2$ 对于变量 x_1 和 x_2 中每一个都是线性的.

(b) 若 (e_{i_1}) 是 V_1 的一个基，(e_{i_2}) 是 V_2 的一个基，则一切乘积 $e_{i_1}\cdot e_{i_2}$ 是 W 的一个基.

容易证明，这样一个空间是存在且唯一的（在同构的意义下）. 记作 $V_1\otimes V_2$. 条件 (b) 表明，

$$\dim(V_1\otimes V_2)=\dim(V_1)\cdot\dim(V_2).$$

现在设 $\rho^1: G\to \boldsymbol{GL}(V_1)$ 和 $\rho^2: G\to \boldsymbol{GL}(V_2)$ 是群 G 的两个表示. 对于 $s\in G$，由以下条件定义 $\boldsymbol{GL}(V_1\otimes V_2)$ 的一个元素 ρ_s：

$$\rho_s(x_1\cdot x_2)=\rho_s^1(x_1)\cdot\rho_s^2(x_2), x_1\in V_1, x_2\in V_2.$$

[ρ_s 的存在和唯一性容易由条件 (a) 和 (b) 得出.] 我们记作

$$\rho_s=\rho_s^1\otimes\rho_s^2.$$

ρ_s 定义了 G 到 $V_1\otimes V_2$ 内的一个线性表示，叫做原来两个表示的张量积.

把这个定义转换成矩阵的说法就是：令 (e_{i_1}) 是 V_1 的一个

基，$(r_{i_1j_1}(s))$ 是 ρ_s^1 关于这个基的矩阵；完全类似地定义 (e_{i_2}) 和 $(r_{i_2j_2}(s))$. 由

$$\rho_s^1(e_{j_1}) = \sum_{i_1} r_{i_1j_1}(s)e_{i_1},$$

$$\rho_s^2(e_{j_2}) = \sum_{i_2} r_{i_2j_2}(s)e_{i_2}$$

推出：

$$\rho_s(e_{j_1}\cdot e_{j_2}) = \sum_{i_1,i_2} r_{i_1j_1}(s)\cdot r_{i_2j_2}(s)\cdot e_{i_1}\cdot e_{i_2}.$$

因此 ρ_s 的矩阵就是 $(r_{i_1j_1}(s)r_{i_2j_2}(s))$；它是 ρ_s^1 的矩阵与 ρ_s^2 的矩阵的张量积.

两个不可约表示的张量积一般说来不是不可约的，它被分解成一些不可约表示的直和，这些不可约表示可以利用特征标的理论来确定(参看 2.3).

在量子化学中，张量积常常表现为以下形式：V_1 和 V_2 是两个函数空间,它们都在 G 之下稳定，分别有基 (φ_{i_1}) 和 (ψ_{i_2})，而 $V_1\otimes V_2$ 是由乘积 $\varphi_{i_1}\cdot\psi_{i_2}$ 所生成的向量空间，这些乘积是线性无关的. 最后的条件是重要的. 这里有两个特殊情形,对于这两个情形来说,上面的条件都被满足：

（1）一些函数 φ 只依赖于变量 $(x, x', \cdots)$ 而另一些函数 ψ 只依赖于与第一组变量无关的变量 $(y, y', \cdots)$.

（2）空间 V_1（或 V_2）具有一个只由单独一个函数 φ 所组成的基，这个函数在任何区域内都不等于零；于是空间 V_1 是一维的.

1.6 对称方和交错方

假设表示 V_1 和 V_2 都恒同于同一个表示 V. 那么 $V_1\otimes V_2 = V\otimes V$. 如果 (e_i) 是 V 的一个基，令 θ 是 $V\otimes V$ 的一个自同构，使得

$$\theta(e_i\cdot e_j) = e_j\cdot e_i,\quad 对一切\ (i,j).$$

由此推出，对一切 $x, y\in V$ 都有 $\theta(x\cdot y) = y\cdot x$，因此 θ 不依赖于基 (e_i) 的选取. 再者，$\theta^2 = 1$. 于是空间 $V\otimes V$ 被分解为直和：

$$V\otimes V = \mathbf{Sym}^2(V)\oplus\mathbf{Alt}^2(V),$$