

现代数学译丛

# 有限群的线性表示

[法] J.-P. 塞尔 著



科学出版社

51.451

598

现代数学译丛

# 有限群的线性表示

〔法〕J.-P. 塞尔 著

郝钢新 译

科学出版社

1984

DS99/20  
01  
内 容 简 介

本书从表示论的最基本的内容入手,逐步深入,直到这方面最近代的成果. 它深入浅出地介绍了有限群表示论的最主要的内容. 全书共分三部分: 第一部分介绍了表示论中最基本内容,这部分只要具备初步的线性代数知识即可阅读;第二部分论述了特征零的表示论,用到比线性代数略进一步的知识(群代数、张量积、模、半单代数等);第三部分论述了模表示论,初步介绍了特征  $p$  情形的表示论,处理方法极有特色. 书中附有习题,以便加深理解.

本书是根据第二版的英译本(Springer-Verlag, 1977)翻译的,并根据法文修订第三版作了校订.

读者对象为大学数学系高年级学生、研究生、教师及有关专业的工作者.

Jean-Pierre Serre

Représentations linéaires des groupes finis

Troisième édition corrigée

Hermann Paris 1978

现代数学译丛

有限群的线性表示

[法] J.-P. 塞尔 著

郝钢新 译

责任编辑 吕虹 张鸿林

科学出版社出版

北京朝阳门内大街137号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

\*

1984年2月第一版 开本: 850×1168 1/32

1984年2月第一次印刷 印张: 6

印数: 0001—8,200 字数: 153,000

统一书号: 15031·2478

本社书号: 3404·13-1

定价: 1.15 元

## 序

这本书由三部分组成,每部分的程度和目的有所不同。

第一部分最初是为量子化学工作者而写的。它阐述了由 Frobenius 所建立的关于线性表示与特征标之间的对应关系。这是在数学里以及在量子化学或物理里经常要用到的基本结果。我力图仅用群的定义和线性代数的初步知识,将证明写得尽可能的浅显。例子(第五章)都是从对于化学工作者有用的那些例子里选出来的。

第二部分是 1966 年为高等师范学校 (l'École Normale) 二年级学生所写的教程。它在以下几点完善了第一部分:

(a) 表示的级和特征标的整性(第六章);

(b) 诱导表示, Artin 定理和 Brauer 定理及其应用(第七章—第十一章);

(c) 有理性问题(第十二章和第十三章)。

所用到的是线性代数中这样一些方法(比第一部分里的意义广泛一些): 群代数, 模, 非交换张量积, 半单代数。

第三部分是对 Brauer 理论的一个介绍: 从特征零过渡到特征  $p$  (和相反的情形)。我无所顾忌地使用了 Abel 范畴的语言(投射模, Grothendieck 群)。对于这一类问题来说, 这种语言是非常合适的。主要结果是:

(a) 分解同态映射是满射: 在特征  $p$  里的一切不可约表示都可以“虚拟地”提升到特征零里(即提升到一个适当的 Grothendieck 群内)。

(b) 方- Swan 定理: 当所考虑的群是  $p$ -可解的时候, 上述论断中“虚拟地”这个词可以删去。

在这一部分里还给出了关于 Artin 表示的若干应用。

我以愉快的心情感谢：

Gaston Berthier 和 Josiane Serre, 他们同意我转录第一部分, 这原是作为附录写在他们所著的《量子化学》一书中的；

Yves Balasko, 他根据一些讲义写出了第二部分的初稿；

Alexandre Grothendieck, 他同意我转录第三部分, 这部分最初是在他的代数几何讨论会 (Séminaire de Géométrie Algébrique, I. H. E. S., 1965/1966) 上发表的。

# 目 录

## 第一部分 表示和特征标

<b>第一章 线性表示通论</b> .....	1
1.1 定义 .....	1
1.2 基本例子 .....	2
1.3 子表示 .....	3
1.4 不可约表示 .....	5
1.5 两个表示的张量积 .....	6
1.6 对称方和交错方 .....	7
<b>第二章 特征标理论</b> .....	9
2.1 表示的特征标 .....	9
2.2 Schur 引理. 基本应用.....	12
2.3 特征标的正交关系 .....	14
2.4 正则表示的分解 .....	17
2.5 不可约表示的个数 .....	19
2.6 一个表示的典型分解 .....	21
2.7 表示的明显分解式 .....	23
<b>第三章 子群, 群的积, 诱导表示</b> .....	26
3.1 Abel 子群 .....	26
3.2 两个群的积 .....	27
3.3 诱导表示 .....	29
<b>第四章 紧群</b> .....	35
4.1 紧群 .....	35
4.2 紧群上的不变测度 .....	35
4.3 紧群的线性表示 .....	36
<b>第五章 例子</b> .....	38
5.1 循环群 $C_n$ .....	38
5.2 群 $C_n$ .....	38

5.3	二面体群 $D_n$ .....	39
5.4	群 $D_{nh}$ .....	41
5.5	群 $D_{\infty}$ .....	42
5.6	群 $D_{\infty h}$ .....	43
5.7	交错群 $\mathfrak{A}_n$ .....	44
5.8	对称群 $\mathfrak{S}_n$ .....	45
5.9	立方体群 .....	46
参考文献(第一部分) .....		48

## 第二部分 在特征零情形的表示

<b>第六章</b>	<b>群代数</b> .....	49
6.1	表示和模 .....	49
6.2	$C[G]$ 的分解 .....	50
6.3	$C[G]$ 的中心 .....	52
6.4	整元的基本性质 .....	53
6.5	特征标的整性质. 应用 .....	54
<b>第七章</b>	<b>诱导表示. Mackey 判定</b> .....	57
7.1	导引 .....	57
7.2	诱导表示的特征标. 互反公式 .....	58
7.3	在子群上的限制 .....	61
7.4	Mackey 的不可约性判定 .....	62
<b>第八章</b>	<b>诱导表示的例子</b> .....	64
8.1	正规子群. 对于不可约表示的级的应用 .....	64
8.2	与一个 Abel 群的半直积 .....	65
8.3	几类有限群摘要 .....	67
8.4	Sylow 定理 .....	69
8.5	超可解群的线性表示 .....	70
<b>第九章</b>	<b>Artin 定理</b> .....	72
9.1	环 $R(G)$ .....	72
9.2	Artin 定理的表述 .....	74
9.3	第一个证明 .....	75
9.4	(i) $\Rightarrow$ (ii) 的第二个证明 .....	76
<b>第十章</b>	<b>Brauer 定理</b> .....	79

10.1	$p$ -正则元素, $p$ -初等子群	79
10.2	由 $p$ -初等子群所产生的诱导特征标	80
10.3	特征标的构造	81
10.4	定理 18 和 18' 的证明	83
10.5	Brauer 定理	84
<b>第十一章</b>	<b>Brauer 定理的应用</b>	<b>86</b>
11.1	特征标的刻画	86
11.2	Frobenius 的一个定理	88
11.3	Brauer 定理的逆	90
11.4	$A \otimes R(G)$ 的谱	91
<b>第十二章</b>	<b>有理性问题</b>	<b>96</b>
12.1	环 $R_K(G)$ 和 $\bar{R}_K(G)$	96
12.2	Schur 指标	98
12.3	在割圆域上的可实现性	100
12.4	群 $R_K(G)$ 的秩	101
12.5	Artin 定理的一般化	103
12.6	Brauer 定理的一般化	104
12.7	定理 29 的证明	106
<b>第十三章</b>	<b>有理性问题: 例子</b>	<b>110</b>
13.1	有理数域的情形	110
13.2	实数域的情形	114
参考文献(第二部分)		120

### 第三部分 Brauer 理论导引

<b>第十四章</b>	<b>群 <math>R_K(G)</math>, <math>R_k(G)</math> 和 <math>P_k(G)</math></b>	<b>121</b>
14.1	环 $R_K(G)$ 和 $R_k(G)$	122
14.2	群 $P_k(G)$ 和 $P_A(G)$	123
14.3	$P_k(G)$ 的结构	123
14.4	$P_A(G)$ 的结构	125
14.5	对偶性	127
14.6	纯量扩张	129



<b>第十五章</b>	<b><math>cde</math> 三角</b> .....	132
15.1	$c: P_A(G) \rightarrow R_A(G)$ 的定义 .....	132
15.2	$d: R_K(G) \rightarrow R_A(G)$ 的定义 .....	132
15.3	$e: P_A(G) \rightarrow R_K(G)$ 的定义 .....	135
15.4	$cde$ 三角的基本性质 .....	135
15.5	例: $p'$ -群 .....	136
15.6	例: $p$ -群 .....	137
15.7	例: $p'$ -群与 $p$ -群的积 .....	138
<b>第十六章</b>	<b>若干定理</b> .....	139
16.1	$cde$ 三角的性质 .....	139
16.2	对 $e$ 的象的刻画 .....	141
16.3	通过特征标对投射 $A[G]$ -模的刻画 .....	142
16.4	投射 $A[G]$ -模的例: 亏指数为零的不可约表示 .....	144
<b>第十七章</b>	<b>证明</b> .....	146
17.1	群的变更 .....	146
17.2	在模表示情形的 Brauer 定理 .....	147
17.3	定理 34 的证明 .....	148
17.4	定理 36 的证明 .....	150
17.5	定理 38 的证明 .....	151
17.6	定理 39 的证明 .....	153
<b>第十八章</b>	<b>模特特征标</b> .....	156
18.1	表示的模特特征标 .....	156
18.2	模特特征标的无关性 .....	158
18.3	重新表述 .....	160
18.4	$d$ 的一个截影 .....	162
18.5	例: 对称群 $\mathfrak{S}_n$ 的模特特征标 .....	163
18.6	例: 交错群 $\mathfrak{A}_n$ 的模特特征标 .....	166
<b>第十九章</b>	<b>对 Artin 表示的应用</b> .....	169
19.1	Artin 和 Swan 表示 .....	169
19.2	Artin 和 Swan 表示的有理性 .....	170
19.3	一个不变量 .....	172
<b>附录</b>	.....	173

参考文献(第三部分).....	175
记号索引.....	176
汉英名词索引.....	177
英汉名词索引.....	180

# 第一部分 表示和特征标

## 第一章 线性表示通论

### 1.1 定义

令  $V$  是复数域  $\mathbf{C}$  上一个向量空间,  $GL(V)$  是由  $V$  到自身的一切同构所组成的群. 按照定义,  $GL(V)$  的一个元素  $\alpha$  是  $V$  到  $V$  内的一个线性映射, 它有一个逆映射  $\alpha^{-1}$ ; 这个逆映射也是线性的. 当  $V$  具有一个  $n$  元有限基  $(e_i)$  时, 每一个线性映射  $\alpha: V \rightarrow V$  由一个  $n$  阶方阵  $(a_{ij})$  所确定, 系数  $a_{ij}$  都是复数; 这些系数是通过将象  $\alpha(e_j)$  用基  $(e_i)$  来表示:

$$\alpha(e_j) = \sum_i a_{ij} e_i$$

而得到的.

说  $\alpha$  是一个同构相当于说  $\alpha$  的行列式  $\det(\alpha) = \det(a_{ij})$  不等于零. 因此, 群  $GL(V)$  可以与一切  $n$  阶可逆方阵所组成的群等同起来.

现在设  $G$  是一个有限群, 具有单位元  $1$  和运算  $(s, t) \mapsto st$ . 群  $G$  到群  $GL(V)$  内的一个同态  $\rho$  叫做  $G$  在  $V$  内的一个线性表示. 换句话说, 对于每一元素  $s \in G$ , 令  $GL(V)$  的一个元素  $\rho(s)$  与它对应, 使得对于  $s, t \in G$ , 等式

$$\rho(st) = \rho(s) \cdot \rho(t)$$

成立(我们常把  $\rho(s)$  写作  $\rho_s$ ). 由上面的等式可以推出:

$$\rho(1) = 1; \quad \rho(s^{-1}) = \rho(s)^{-1}.$$

当  $\rho$  被给定时, 我们就说  $V$  是  $G$  的一个表示空间(或者为了简单起见, 就说  $V$  是  $G$  的一个表示). 今后我们只限于考虑  $V$  是有限维向量空间的情形. 这并不是一个过分的限制. 事实上, 对于多数应

用来说,人们感兴趣的只是  $V$  的有限个元素  $x_i$ , 并且总可以找到  $V$  的一个有限维子表示(稍后将定义, 参看 1.3), 它包含这些  $x_i$ ; 就取由这些  $x_i$  的象  $\rho_s(x_i)$  所生成的子空间作为表示空间。

现在设  $V$  是有限维的, 令  $n$  是它的维数。我们也称  $n$  是所考虑的表示的级。令  $(e_i)$  是  $V$  的一个基, 令  $R_s$  是  $\rho_s$  关于这个基的矩阵。我们有

$$\det(R_s) \neq 0; \quad R_{st} = R_s \cdot R_t, \quad s, t \in G.$$

如果令  $r_{ij}(s)$  表示矩阵  $R_s$  的系数, 那么第二个公式变成

$$r_{ik}(st) = \sum_j r_{ij}(s)r_{jk}(t).$$

反之, 给了满足上面等式的可逆矩阵  $R_s = (r_{ij}(s))$ , 相应地就有  $G$  在  $V$  内的一个线性表示  $\rho$ ; 这就是说, 用“矩阵形式”给出一个表示。

设  $\rho$  和  $\rho'$  是同一个群  $G$  分别在向量空间  $V$  和  $V'$  内的表示。这两个表示说是等价的(或同构的), 如果存在一个线性映射  $\tau: V \rightarrow V'$ , 它把  $\rho$  “变为”  $\rho'$ , 也就是说, 以下等式成立:

$$\tau \circ \rho(s) = \rho'(s) \circ \tau, \quad \text{对一切 } s \in G.$$

当  $\rho$  和  $\rho'$  是通过矩阵形式分别由  $R_s$  和  $R'_s$  给出时, 这个等式的意义就是, 存在一个可逆矩阵  $T$  使得

$$T \cdot R_s = R'_s \cdot T, \quad \text{对一切 } s \in G,$$

或写成  $R'_s = T \cdot R_s \cdot T^{-1}$ 。我们可以把这样的两个表示看作同一个(对于每一  $x \in V$  令  $\tau(x) \in V'$  与它对应); 特别,  $\rho$  和  $\rho'$  有相同的级。

## 1.2 基本例子

(a) 群  $G$  的一个 1 级表示是一个同态  $\rho: G \rightarrow C^*$ , 这里  $C^*$  表示非零复数乘法群。因为  $G$  的每一元素都有有限阶, 所以  $\rho$  的值  $\rho(s)$  都是单位根。特别, 我们有  $|\rho(s)| = 1$ 。

如果对所有  $s \in G$  都取  $\rho(s) = 1$ , 我们就得到  $G$  的一个表示, 叫做单位(或平凡)表示。

(b) 令  $g$  是群  $G$  的阶,  $V$  是一个  $g$  维向量空间, 而  $(e_i)_{i \in G}$  是  $V$  的一个基, 以  $G$  的元素  $i$  为指标. 对于  $s \in G$ , 令  $\rho_s$  是  $V$  到  $V$  内的线性映射, 它将  $e_i$  变到  $e_{si}$ ; 这样就定义了一个线性表示, 叫做  $G$  的**正则表示**. 这个表示的级等于  $G$  的阶. 注意  $e_s = \rho_s(e_1)$ , 所以  $e_1$  的象组成  $V$  的一个基. 反之, 令  $W$  是  $G$  的一个表示, 它含有这样一个向量  $w$ , 使得  $\rho_s(w), s \in G$ , 组成  $W$  的一个基, 那么  $W$  与正则表示同构 (令  $\tau(e_i) = \rho_i(w)$ , 就定义了一个同构  $\tau: V \rightarrow W$ ).

(c) 更一般地, 设  $G$  作用在一个有限集  $X$  上. 这就是说, 对于每一  $s \in G$ , 都给出  $X$  的一个置换  $x \mapsto sx$ , 满足等式

$$1x = x, s(tx) = (st)x,$$

这里  $s, t \in G, x \in X$ . 令  $V$  是一个向量空间, 它具有一个基  $(e_x)_{x \in X}$ , 这里取  $X$  的元素作为指标. 对于  $s \in G$ , 令  $\rho_s$  是  $V$  到  $V$  内的线性映射, 它把  $e_x$  变到  $e_{sx}$ ; 这样得到的  $G$  的表示叫做  $G$  关于  $X$  的**置换表示**.

### 1.3 子表示

令  $\rho: G \rightarrow GL(V)$  是一个线性表示,  $W$  是  $V$  的一个子空间. 假设  $W$  在  $G$  的作用下是稳定的 (或者说是“不变的”), 换句话说, 假设对于一切  $s \in G, x \in W$ , 都有  $\rho_s x \in W$ . 于是  $\rho_s$  在  $W$  上的限制  $\rho_s^W$  是  $W$  到它自身上的一个同构, 并且  $\rho_{st}^W = \rho_s^W \cdot \rho_t^W$ . 这样一来,  $\rho^W: G \rightarrow GL(W)$  就是  $G$  在  $W$  内的一个线性表示.  $W$  叫做  $V$  的一个**子表示**.

**例** 取  $V$  是  $G$  的正则表示 [参看 1.2 (b)]. 令  $W$  是由元素  $x = \sum_{i \in G} e_i$  所生成的  $V$  的一维子空间. 那么对一切  $s \in G$  都有  $\rho_s x = x$ , 从而  $W$  是  $V$  的一个子表示. 这个子表示与单位表示同构. (在 2.4 我们将确定正则表示的一切子表示.)

在往下进行之前, 让我们先来回顾一下线性代数中的某些概念. 向量空间  $V$  叫做子空间  $W$  与  $W'$  的**直和**, 如果每一  $x \in V$  可以唯一地写成  $x = w + w'$  的形式, 这里  $w \in W, w' \in W'$ ; 这相当于说  $W$  与  $W'$  的交  $W \cap W'$  是 0, 并且  $\dim(V) = \dim(W) +$

$\dim(W')$ . 这时就写作  $V = W \oplus W'$  而  $W'$  叫做  $W$  在  $V$  里的一个余子空间. 将每一  $x \in V$  变到它在  $W$  中的分量  $w$  的映射  $p$  叫做对于分解  $V = W \oplus W'$  来说  $V$  在  $W$  上的射影,  $p$  的象就是  $W$ , 并且对于一切  $x \in W$ ,  $p(x) = x$ . 反之, 如果  $p$  是  $V$  到自身内满足上述两个条件的一个线性映射, 可以验证,  $V$  是  $W$  与  $p$  的核 (一切满足条件  $p(x) = 0$  的  $x$  所成的集) 的直和. 这样一来,  $V$  在  $W$  上的射影和  $W$  在  $V$  中的余子空间之间就建立了一个一一对应.

现在让我们再回到子表示上来.

**定理 1** 令  $\rho: G \rightarrow GL(V)$  是  $G$  在  $V$  内的一个线性表示, 而  $W$  是  $V$  的一个在  $G$  之下稳定的子空间. 那么存在  $W$  在  $V$  中的一个余子空间  $W^0$ , 它也在  $G$  之下稳定.

令  $W'$  是  $W$  在  $V$  中的任意一个余子空间,  $p$  是相应的  $V$  在  $W$  上的射影. 作  $p$  在  $G$  的元素之下的共轭, 并且求平均得

$$p^0 = \frac{1}{g} \sum_{s \in G} \rho_s \cdot p \cdot \rho_s^{-1} \quad (g \text{ 是 } G \text{ 的阶}).$$

因为  $p$  将  $V$  映入  $W$  而  $\rho_s$  使  $W$  不变, 所以  $p^0$  将  $V$  映入  $W$ . 如果  $x \in W$ , 那么  $\rho_s^{-1}x \in W$ . 因此

$$p \cdot \rho_s^{-1}x = \rho_s^{-1}x, \quad \rho_s \cdot p \cdot \rho_s^{-1}x = x, \quad \text{从而 } p^0x = x.$$

这样,  $p^0$  是  $V$  在  $W$  上的一个射影, 它对应着  $W$  的一个余子空间  $W^0$ . 再者, 对一切  $s \in G$ , 我们有

$$\rho_s \cdot p^0 = p^0 \cdot \rho_s.$$

事实上, 计算一下  $\rho_s \cdot p^0 \cdot \rho_s^{-1}$ , 就得到

$$\begin{aligned} \rho_s \cdot p^0 \cdot \rho_s^{-1} &= \frac{1}{g} \sum_{t \in G} \rho_s \cdot \rho_t \cdot p \cdot \rho_t^{-1} \cdot \rho_s^{-1} \\ &= \frac{1}{g} \sum_{t \in G} \rho_{st} \cdot p \cdot \rho_{st}^{-1} = p^0. \end{aligned}$$

现在设  $x \in W^0$ ,  $s \in G$ , 那么  $p^0x = 0$ , 因此  $p^0 \cdot \rho_s x = \rho_s \cdot p^0 x = 0$ , 所以  $\rho_s x \in W^0$ . 这就证明了  $W^0$  在  $G$  之下是稳定的. 定理证毕.  $\square$

注记 设  $V$  带有一个内积  $(x|y)$ , 满足通常的条件: 对  $x$  是

线性的,对  $\nu$  是半线性的,并且当  $x \neq 0$  时,  $(x|x) > 0$ . 又假设这个内积在  $G$  之下不变,即对于一切  $s \in G$ , 都有  $(\rho_s x | \rho_s y) = (x|y)$ . 我们取  $\sum_{s \in G} (\rho_s x | \rho_s y)$  来代替  $(x|y)$ , 总可以归结为这一情形. 在这样的前提下,  $W$  在  $V$  中的正交余  $W^0$  是  $W$  的一个余子空间, 并且在  $G$  之下稳定. 这样就得到定理 1 的另一证明. 注意内积  $(x|y)$  的不变性意味着, 如果  $(e_i)$  是  $V$  的一个标准正交基, 那么  $\rho_s$  关于这个基的矩阵是一个酉阵.

保持定理 1 的前提和记法. 令  $x \in V$  而  $w$  和  $w^0$  是  $x$  在  $W$  和  $W^0$  上的射影. 我们有  $x = w + w^0$ , 同时  $\rho_s x = \rho_s w + \rho_s w^0$ , 并且由于  $W$  和  $W^0$  都在  $G$  之下稳定, 所以  $\rho_s w \in W$ ,  $\rho_s w^0 \in W^0$ . 这样,  $\rho_s w$  和  $\rho_s w^0$  是  $\rho_s x$  的射影. 因此, 表示  $W$  和  $W^0$  确定了表示  $V$ . 我们就说  $V$  是  $W$  和  $W^0$  的直和, 并且记作  $V = W \oplus W^0$ .  $V$  的元素可以与元素对  $(w, w^0)$  等同起来, 这里  $w \in W$ ,  $w^0 \in W^0$ . 如果  $W$  和  $W^0$  由矩阵形式  $R_s$  和  $R_s^0$  给出, 那么  $W \oplus W^0$  就由矩阵形式

$$\begin{pmatrix} R_s & 0 \\ 0 & R_s^0 \end{pmatrix}$$

给出. 任意有限多个表示的直和可以类似地定义.

#### 1.4 不可约表示

令  $\rho: G \rightarrow GL(V)$  是  $G$  的一个线性表示. 我们说,  $\rho$  是不可约的或单的, 如果  $V$  不是 0 并且除了 0 和  $V$  之外,  $V$  没有在  $G$  之下稳定的子空间. 由定理 1, 第二个条件相当于说,  $V$  不是两个表示的直和(除开显然的分解  $V = 0 \oplus V$ ). 一级的表示自然都是不可约的. 以后将会看到(3.1), 每一个非交换群至少有一个级  $\geq 2$  的不可约表示.

通过作直和, 不可约表示被用来构造其它的表示:

**定理 2** 每一个表示都是不可约表示的直和.

令  $V$  是  $G$  的一个线性表示. 我们对  $\dim(V)$  作归纳法. 若  $\dim(V) = 0$ , 定理是显然的(0 是不可约表示的空集的直和). 假设  $\dim(V) \geq 1$ . 如果  $V$  不可约, 那么已经没有什么要证的了; 否

则,由定理 1,  $V$  可以分解为直和  $V' \oplus V''$ , 而  $\dim(V') < \dim(V)$ ,  $\dim(V'') < \dim(V)$ . 由归纳法的假设,  $V'$  和  $V''$  都是一些不可约表示的直和, 因而  $V$  也是一些不可约表示的直和.  $\square$

注记 令  $V$  是一个表示,  $V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_k$  是  $V$  的一个不可约表示的直和分解. 我们会问, 这个分解是否唯一. 在一切  $\rho_i$  都等于 1 的情形, 这个分解一般不是唯一的 (这时  $W_i$  都是直线, 而一个向量空间分成一些直线的直和的分解是很多的). 然而, 我们将在 2.3 看到, 与一个给定的不可约表示同构的  $W_i$  的个数不依赖于分解的选取.

### 1.5 两个表示的张量积

同直和运算 (这个运算具有通常加法的性质) 在一起, 还有一种“乘法”: 张量积, 有时也叫做 Kronecker 积. 它的定义如下:

设  $V_1$  和  $V_2$  是两个向量空间. 向量空间  $W$ , 连同同一个  $V_1 \times V_2$  到  $W$  内的映射  $(x_1, x_2) \mapsto x_1 \cdot x_2$ , 叫做  $V_1$  与  $V_2$  的张量积, 如果下列条件被满足:

(a)  $x_1 \cdot x_2$  对于变量  $x_1$  和  $x_2$  中每一个都是线性的.

(b) 若  $(e_i)$  是  $V_1$  的一个基,  $(e_j)$  是  $V_2$  的一个基, 则一切乘积  $e_i \cdot e_j$  是  $W$  的一个基.

容易证明, 这样一个空间是存在且唯一的 (在同构的意义下). 记作  $V_1 \otimes V_2$ . 条件 (b) 表明,

$$\dim(V_1 \otimes V_2) = \dim(V_1) \cdot \dim(V_2).$$

现在设  $\rho^1: G \rightarrow \mathbf{GL}(V_1)$  和  $\rho^2: G \rightarrow \mathbf{GL}(V_2)$  是群  $G$  的两个表示. 对于  $s \in G$ , 由以下条件定义  $\mathbf{GL}(V_1 \otimes V_2)$  的一个元素  $\rho_s$ :

$$\rho_s(x_1 \cdot x_2) = \rho_s^1(x_1) \cdot \rho_s^2(x_2), x_1 \in V_1, x_2 \in V_2.$$

[ $\rho_s$  的存在和唯一性容易由条件 (a) 和 (b) 得出.] 我们记作

$$\rho_s = \rho_s^1 \otimes \rho_s^2.$$

$\rho_s$  定义了  $G$  到  $V_1 \otimes V_2$  内的一个线性表示, 叫做原来两个表示的张量积.

把这个定义转换成矩阵的说法就是: 令  $(e_i)$  是  $V_1$  的一个



基,  $(r_{i_1 j_1}(s))$  是  $\rho_1^1$  关于这个基的矩阵; 完全类似地定义  $(e_{i_2})$  和  $(r_{i_2 j_2}(s))$ . 由

$$\rho_1^1(e_{i_1}) = \sum_{i_1} r_{i_1 j_1}(s) e_{i_1},$$

$$\rho_2^2(e_{i_2}) = \sum_{i_2} r_{i_2 j_2}(s) e_{i_2}$$

推出:

$$\rho_1(e_{i_1} \cdot e_{i_2}) = \sum_{i_1, i_2} r_{i_1 j_1}(s) \cdot r_{i_2 j_2}(s) \cdot e_{i_1} \cdot e_{i_2}.$$

因此  $\rho_1$  的矩阵就是  $(r_{i_1 j_1}(s) r_{i_2 j_2}(s))$ ; 它是  $\rho_1^1$  的矩阵与  $\rho_2^2$  的矩阵的张量积.

两个不可约表示的张量积一般说来不是不可约的, 它被分解成一些不可约表示的直和, 这些不可约表示可以利用特征标的理论来确定(参看 2.3).

在量子化学中, 张量积常常表现为以下形式:  $V_1$  和  $V_2$  是两个函数空间, 它们都在  $G$  之下稳定, 分别有基  $(\varphi_{i_1})$  和  $(\psi_{i_2})$ , 而  $V_1 \otimes V_2$  是由乘积  $\varphi_{i_1} \cdot \psi_{i_2}$  所生成的向量空间, 这些乘积是线性无关的. 最后的条件是重要的. 这里有两个特殊情形, 对于这两个情形来说, 上面的条件都被满足:

(1) 一些函数  $\varphi$  只依赖于变量  $(x, x', \dots)$  而另一些函数  $\psi$  只依赖于与第一组变量无关的变量  $(y, y', \dots)$ .

(2) 空间  $V_1$  (或  $V_2$ ) 具有一个只由单独一个函数  $\varphi$  所组成的基, 这个函数在任何区域内都不等于零; 于是空间  $V_1$  是一维的.

## 1.6 对称方和交错方

假设表示  $V_1$  和  $V_2$  都恒同于同一个表示  $V$ . 那么  $V_1 \otimes V_2 = V \otimes V$ . 如果  $(e_i)$  是  $V$  的一个基, 令  $\theta$  是  $V \otimes V$  的一个自同构, 使得

$$\theta(e_i \cdot e_j) = e_j \cdot e_i, \quad \text{对一切 } (i, j).$$

由此推出, 对一切  $x, y \in V$  都有  $\theta(x \cdot y) = y \cdot x$ , 因此  $\theta$  不依赖于基  $(e_i)$  的选取. 再者,  $\theta^2 = 1$ . 于是空间  $V \otimes V$  被分解为直和:

$$V \otimes V = \text{Sym}^2(V) \oplus \text{Alt}^2(V),$$