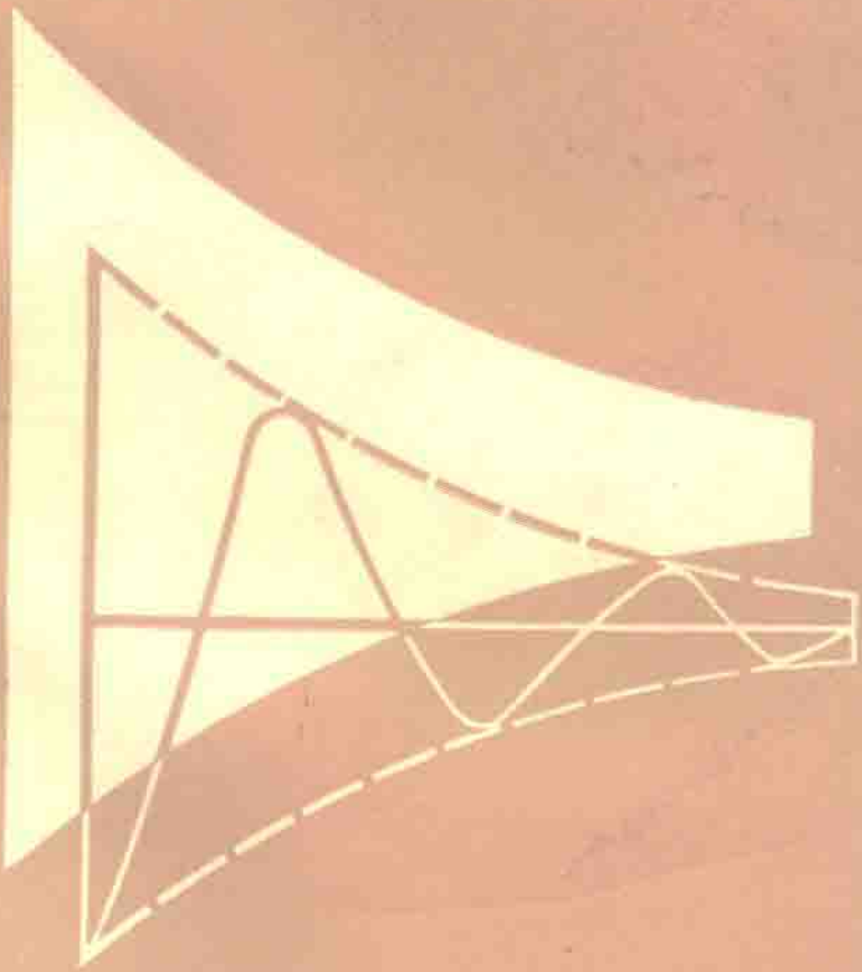
JI XIE ZHEN DONG XUE

机械振动学

贺兴书 编



上海交通大学出版社

机 械 振 动 学

贺兴书 编

上 海 交 通 大 学 出 版 社

机 械 振 动 学

上海交通大学出版社出版

（淮海中路1984弄19号）

新华书店上海发行所发行

常熟文化印刷厂印装

开本 787×1092 毫米　印张 10.25　字数 250000

1985 年 12 月第 1 版　1986 年 3 月第 1 次印刷

印数：1—5,500

统一书号：15324.38　　科技书目：119—238

定价 1.95 元

前　言

随着生产技术的不断发展、特别是军工、电子、宇航等尖端工业的日新月异，对机械产品的动态性能提出了愈来愈高的要求。但是各种机械在工作过程中所产生的振动，却使它们的动态性能严重恶化，从而大大降低其原有精度、生产效率和使用寿命。同时，由机械振动所产生的噪声，又使生产环境污染，影响工人健康。因此，研究机械振动产生的机理，掌握机械振动产生、扩展和衰减的规律，以及研究抑制机械振动的理论和方法，就成为工程技术人员面临的一个重要课题。现在许多高等院校已经开设了“机械振动”课程，并且正在逐步从选修课改为必修课。但是，国内已经出版的几种教材和专著，还不能完全适应机械类专业本科生教学的需要。因此，编者在几年来从事“机械振动学”、“机床动力学”等课程教学实践的基础上，根据机械类专业本科生教学的需要，编写了本教材。

本书简要介绍了振动运动学的基本概念，系统分析了机械振动的产生、扩展、衰减和控制，着重阐述了振动理论和计算公式的物理意义。由于受到教学时数和教材篇幅的限制，本书只介绍机械系统线性振动的基本理论，而不涉及更为深入的内容。为了便于初学者自学，在本书附录中还编入了有关的数学知识。

本书写成后，曾由浙江工学院印刷，内部发行，一些院校已经使用，并给予许多鼓励和支持，还提出一些宝贵的修改意见。对此，编者表示衷心地感谢。

浙江工学院　贺兴书

1985 年 3 月

目　录

第一章 振动运动学

§1-1 概　　述

一、机械振动的概念

机械振动(mechanical vibration)可解释为机器或结构物在静平衡位置附近的一种反复运动。在许多情况下，机械振动是有害的，它影响机器设备的工作性能和寿命，产生不利于工作的噪声和有损于机械或结构物的动载荷，严重时会使零部件失效甚至破坏而造成事故。因此,对于大多数机器设备,应将其振动量控制在允许的范围内。反之，对于利用振动原理工作的机器设备,则又应使它能产生所希望的振动,选择其应有的效能。

实际的机器或结构物可以简化为一个力学模型。如图 1.1 所示，一个不发生形变的物体放在一个忽略了质量的弹簧上,组成一个"弹簧-质量"系统。

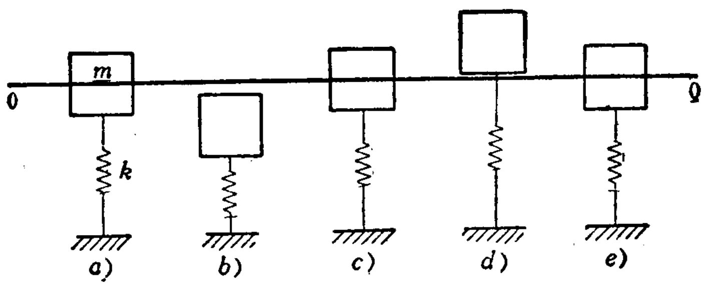


图1.1　弹簧-质量系统

物体静止时,物体处于图 1.1(a)所示的平衡位置 0—0，此时物体的重力与弹簧支持它的弹性恢复力互相平衡，即它们的合力 $Q=0$，故物体的速度 $v=0$，加速度 $a=0$；当物体受到向下的冲击作用后即向下运动,弹簧被进一步压缩，弹性恢复力逐渐加大，使物体作减速运动。当物体的速度减小到零后，物体即运动到如图 1.1(b)所示的最低位置，此时 $v=0$，而弹簧的弹性恢复力大于物体的重力，故合力 Q 的方向向上，使物体产生向上的加速度 a，物体即开始向上运动；当物体返回到如图 1.1(c)所示的平衡位置时，其所受合力 Q 又为零，但其速度 v 却不为零,由于惯性作用，物体继续向上运动；随着物体向上运动，弹簧逐渐伸长,弹性恢复力逐渐变小，物体重力大于弹性恢复力，合力 Q 方向向下，故物体又作减速运动。当物体向上的速度减小到零时，物体即运动到如图 1.1(d) 所示的最高位置。此后，物体即开始向下运动,返回平衡位置；当物体返回到如图 1.1(e)所示的平衡位置时，其所受合力 Q 又为零,但其速度 v 仍不为零。由于惯性作用，物体继续向下运动。这样，物体即在平衡位置附近来回往复运动。

物体从平衡位置开始向下运动,然后向上运动，经过平衡位置再继续向上运动，然后又向下运动回到平衡位置(从图 1.1a 到图 1.1e)，称为完成一次振动。

从运动学的观点来看,机械振动是指机械系统的某些物理量(位移、速度、加速度)，在某

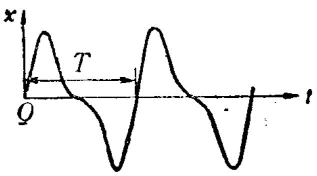


图 1.2 周期振动

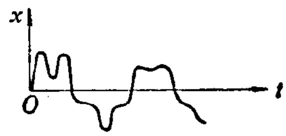


图 1.3 非周期振动

一数值附近随时间 t 的变化关系。

图 1.2 表示某物理量在相等的时间间隔内作往复运动，这种振动称为"周期振动"。往复一次所需的时间间隔 T 称为"周期"。每经过一个周期后，运动便重复前一周期中的全部过程。

周期振动可用时间的周期函数表达为：

$$x(t)=x(t+nT) \tag{1.1}$$

式中： $n=1, 2, \cdots\cdots$

周期的倒数定义为"频率"，以 f 表示：

$$f=\frac{1}{T}\ (1/s 或\ Hz) \tag{1.2}$$

图 1.3 表示在旋转机械起动过程中产生的振动，它没有一定的周期，不能表达成(1.1)式的形式。这种振动称为"非周期振动"。

二、机械振动的分类

为了便于分析讨论振动问题，有必要对振动加以分类。机械振动可根据不同的特征作如下的分类：

1. 按产生振动的原因分类

(1) 自由振动——当系统的平衡被破坏，只靠其弹性恢复力来维持的振动。

(2) 受迫振动——在外界激振力的持续作用下，系统被迫产生的振动。

(3) 自激振动——由于系统具有非振荡性能源和反馈特性，从而引起一种稳定的周期性振动。

2. 按振动的规律分类

(1) 简谐振动——能用一项正弦或余弦函数表达其运动规律的周期性振动。

(2) 非简谐振动——不能用一项正弦或余弦函数表达其运动规律的周期性振动。

(3) 随机振动——不能用简单函数或这些简单函数的简单组合来表达其运动规律，而只能用统计方法来研究的非周期性振动。

3. 按振动系统的结构参数的特性分类

(1) 线性振动——系统的惯性力、阻尼力、弹性恢复力分别与加速度、速度、位移成线性关系，能用常系数线性微分方程描述的振动。

(2) 非线性振动——系统的阻尼力或弹性恢复力具有非线性性质，只能用非线性微分方程描述的振动。

4. 按振动系统的自由度数目分类

(1) 单自由系统振动——确定系统在振动过程中任何瞬时的几何位置只需要一个独立坐标的振动。

(2). 多自由度系统振动——确定系统在振动过程中任何瞬时的几何位置需要多个独立坐标的振动。

5．按振动位移的特征分类

(1) 扭转振动——振动体上的质点只作绕轴线的振动。

(2) 纵向振动——振动体上的质点只作沿轴线方向的振动。

(3) 横向振动——振动体上的质点只作垂直轴线方向的振动。

纵向振动与横向振动又可统称之为直线振动。

§1-2 简谐振动及其表示方法

一、简谐振动及其特征

简谐振动是指机械系统的某个物理量(位移、速度、加速度)按时间的正弦(或余弦)函数规律变化的振动。这是周期振动的最简单而又极重要的一种形式。

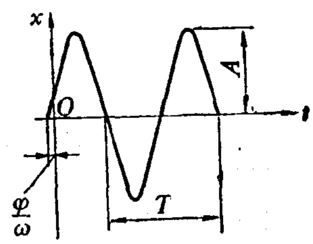


图1.4 简谐振动

简谐振动的数学表达式是：

$$x = A\sin\left(\frac{2\pi}{T}t + \varphi\right) \tag{1.3}$$

式(1.3)亦可用图1.4来表示。其中：

A——振幅，表示物体离开平衡位置的最大位移；

T——周期，若用 $t+T$，$t+2T$，……$t+nT$ 等代替上式中的 t，则所得的 x 值不变。故每隔时间 T，运动就完全重复一次，所以 T 是振动的周期。

令 $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$，称为"圆频率"或"角频率"。则式(1.3)可写成：

$$x = A\sin(\omega t + \varphi) \tag{1.4}$$

式中：$\omega t + \varphi$——相位角，它是决定振动物体在 t 时刻运动状态的重要物理量；

φ——初相位，即 $t=0$ 时的相位，表示振动物体的初始位置。

对简谐振动的位移表达式(1.4)式求一阶和二阶导数，即得简谐振动的速度和加速度表达式：

$$v = \dot{x} = A\omega\cos(\omega t + \varphi) = A\omega\sin\left(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right) \tag{1.5}$$

$$a = \ddot{x} = -A\omega^2\sin(\omega t + \varphi) = A\omega^2\sin(\omega t + \varphi + \pi) \tag{1.6}$$

比较(1.4)、(1.5)和(1.6)式，可以看出：

(1) 只要位移是简谐函数，则速度和加速度也是简谐函数，而且与位移具有相同的频率；

(2) 速度的相位比位移的相位超前 $\frac{\pi}{2}$，加速度比位移超前 π；

(3) 因为 $\ddot{x} = -\omega^2 x$，这就表明，简谐振动的加速度与位移恒成正比而反向，即加速度始终指向平衡位置。这是简谐振动的运动学特征。

二、简谐振动的矢量表示法和复数表示法

1．矢量表示法

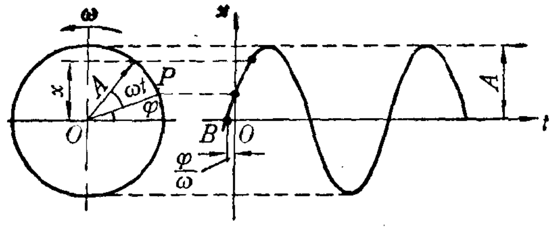


图 1.5　简谐振动的矢量表示法

简谐振动可以用旋转矢量在坐标轴上的投影来表示.

如图 1.5 所示，从始点 O 作矢量 $\overrightarrow{OP}$，其模为 A，以等角速度 ω 旋转，矢量的起始位置与水平轴的夹角为 φ. 在任一瞬时，矢量与水平轴的夹角则为 $\omega t+\varphi$.

这一旋转矢量在垂直轴上的投影即为：

$$x=A\sin(\omega t+\varphi)$$

这一旋转矢量在水平轴上的投影则为：

$$x=A\cos(\omega t+\varphi)$$

由此可见，旋转矢量在垂直轴或水平轴上的投影，均可用来表示简谐振动. 而这一旋转矢量的模，就是简谐振动的振幅；旋转矢量的角速度就是简谐振动的圆频率；旋转矢量与水平轴（或垂直轴）的夹角就是简谐振动的相位角；而简谐振动的初相位角，则是 $t=0$ 时旋转矢量与水平轴（或垂直轴）的夹角.

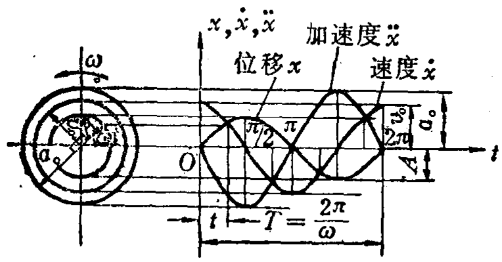


图 1.6　简谐振动的位移速度和加速度矢量

简谐振动的速度和加速度也可用旋转矢量来表示. 因为速度和加速度也是时间 t 的正弦（或余弦）函数，其圆频率仍为 ω，并分别具有以下的最大值：

$$v_0=\omega A$$

$$a_0=\omega^2 A$$

故可用等速旋转的两个矢量 v_0 和 a_0 来表示. 但速度矢量超前于位移矢量 90°，加速度矢量则超前于位移矢量 180°，如图 1.6 所示.

从图 1.6 中可以清楚地看出，所谓相位差是指两物理量达到最大值（或最小值）时时间上的差异. 若两个物理量同时达到最大值或最小值，则相位差 $\varphi=0$，称为同相；若两个物理量一个达到最大值时，另一个正好达到最小值，则相位差 $\varphi=\pi$，称为反相.

2. 复数表示法

复数可以用复数平面上的一个矢量来表示. 如图 1.7 所示，长度为 A 的矢量 $\overrightarrow{OP}$ 在实

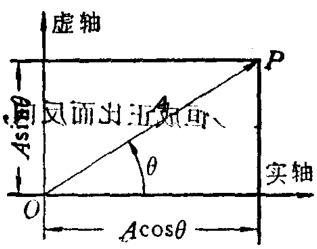


图 1.7　复数的矢量表示法

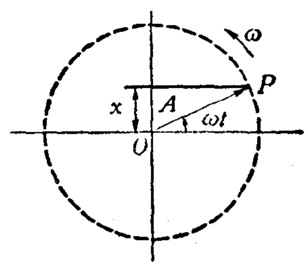


图 1.8　复数旋转矢量

数轴和虚数轴上的投影分别为 $A\cos\theta$ 及 $A\sin\theta$，故矢量 $\overrightarrow{OP}$ 就代表了下列复数：

$$Z=A(\cos\theta+i\sin\theta).$$

而 $\overrightarrow{OP}$ 的长度就代表了这一复数的模 A，$\overrightarrow{OP}$ 与实数轴的夹角就是这一复数的复角 θ。

若使 $\overrightarrow{OP}$ 绕 O 点以等角速度 ω 在复平面内逆时针旋转，就成为一个复数旋转矢量(图 1.8)。它在任一瞬间的复角为 $\theta=\omega t$。故这一旋转矢量的复数表达式即为：

$$Z=A(\cos\omega t+i\sin\omega t)$$

根据欧拉公式：$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$

则前式可改写成：

$$Z=Ae^{i\omega t}$$

如前所述，任一简谐振动都可用一个旋转矢量在直角坐标轴上的投影来表示。因此，同样可用一个复数旋转矢量在复平面的实轴或虚轴上的投影来表示一个简谐振动。也就是说，可以用复数来表示简谐振动。即：

$$x=A\sin\omega t=I_mZ=I_m[Ae^{i\omega t}].$$

式中符号 I_mZ 表示取复数 Z 的虚数部分。(当然，也可以取复数 Z 的实数部分来表示简谐振动，只不过此时的简谐振动是用余弦函数表示而已。)为了书写方便，今后对复数 $Ae^{i\omega t}$ 不作特别说明时，即表示取其虚数部分，这样可省略符号 I_m。

所以，简谐振动的复数表达式是：

$$x=Ae^{i\omega t} \tag{1.7}$$

若初相位不为零，则上式应改写成：

$$x=Ae^{i(\omega t+\varphi)}=Ae^{i\varphi}\cdot e^{i\omega t}=\overline{A}e^{i\omega t} \tag{1.8}$$

式中：$\overline{A}=Ae^{i\varphi}$，称为复振幅

简谐振动的速度和加速度也可用复数表示：

$$\because\quad x=Ae^{i\omega t}$$

$$\therefore\quad \dot{x}=i\omega Ae^{i\omega t}=A\omega e^{i\left(\omega t+\frac{\pi}{2}\right)} \tag{1.9}$$

$$\ddot{x}=-\omega^2Ae^{i\omega t}=A\omega^2e^{i(\omega t+\pi)} \tag{1.10}$$

将以上结果画在复平面上，可得到如图 1.9 所示的相互关系。

可以看出，对复数 $Ae^{i\omega t}$ 每求导一次，则相当于在它前面乘上一个 $i\omega$，而每乘上一个 i，就相当于把这个复数旋转矢量逆时针旋转 $\frac{\pi}{2}$。这就给运算带来一定的方便。

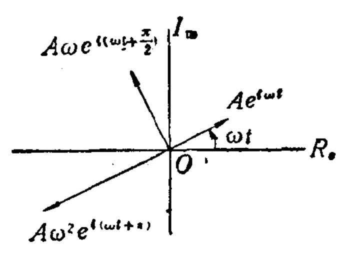


图 1.9　简谐振动位移、速度、加速度在复平面上的相互关系

三、简谐振动的合成

在实际的振动系统中，往往同时遇到几个简谐振动叠加的情况，因此有必要研究简谐振动的合成。现根据不同的情况分别讨论如下：

1. 同方向上两个简谐振动的合成

所谓同方向上的简谐振动　是指两个振动方向在同一直线方向上。由于这两个振动同时发生，最终表现出的振动形式就是它们综合的结果。

当两个简谐振动的频率相同时，可设这两个简谐振动的复数表达式为：

$$\begin{cases} x_1 = A_1 e^{i\omega t} \\ x_2 = A_2 e^{i(\omega t+\varphi)} \end{cases}$$

这是两个复数旋转矢量，根据矢量相加的原理，它们的和(即合成振动)为：

$$\begin{aligned} x &= x_1 + x_2 \\ &= A_1 e^{i\omega t} + A_2 e^{i(\omega t+\varphi)} \\ &= [(A_1 + A_2\cos\varphi) + iA_2\sin\varphi]e^{i\omega t} \end{aligned}$$

设复数 $Ae^{i\alpha} = (A_1 + A_2\cos\varphi) + iA_2\sin\varphi$

则 $x = Ae^{i\alpha}e^{i\omega t} = Ae^{i(\omega t+\alpha)}$

式中：

$$\left.\begin{aligned} &\text{合成振动振幅 } A = \sqrt{(A_1 + A_2\cos\varphi)^2 + (A_2\sin\varphi)^2} \\ &\text{合成振动初相位 } \alpha = \mathrm{tg}^{-1}\frac{A_2\sin\varphi}{A_1 + A_2\cos\varphi} \end{aligned}\right\} \tag{1.11}$$

由此可见：合成振动仍然是一个简谐振动，其频率与原来分振动的频率相同。合成振动的振幅决定于分振动的振幅及其相位差，两个分振动同相时，相位差 $\varphi = 0$，则合成振动振幅等于两个分振动的振幅和；两个分振动反相时，相位差 $\varphi = \pi$，则合成振动振幅等于两个分振动的振幅差。

当两个简谐振动的频率不同时，问题就比较复杂，因为这时两个分振动的相位差本身也成了时间的函数。

设 $t = 0$ 时，两个分振动的相位差为 θ。

则在时间为 t 时，两个分振动的相位差可用下式表示：

$$\varphi = (\omega_1 - \omega_2)t + \theta = \Delta\omega\cdot t + \theta.$$

式中：ω_1、ω_2——两个分振动的频率；$\Delta\omega = \omega_1 - \omega_2$，为两个分振动的频率差。

这时，仍可应用前面的推导结果，但必须把 φ 看成是一个变量。根据(1.11)式可得：

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{(A_1 + A_2\cos\varphi)^2 + (A_2\sin\varphi)^2} \\ &= \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos[\Delta\omega\cdot t + \theta]} \end{aligned} \tag{1.12}$$

由此可见：合成振动的振幅 A 是时间 t 的周期函数，它将以 $\Delta\omega$ 作为频率，在 $|A_1 + A_2| \geqslant A \geqslant |A_1 - A_2|$ 的范围内变动。若两个分振动的振幅相差较大，则合成振动的振幅中总是由振幅大的一个分振动占主导地位，而振幅小的分振动则只能使前者产生一些畸变。若两个分振动的振幅相差不大，那么合成振幅按一定频率时而增大、时而减小的现象就十分明显。振幅的这种变化的现象称为“拍”(beat)，如图 1.10 所示。振幅从一个最小值通过最大值再到下一个最小值的时间是拍的周期 $T_{拍}$，其倒数就称为拍频，拍频就等于两个分振动的频率之差.

只有两个分振动的频率之比是有理数时，合成振动才可能是周期振动，它的周期就是两

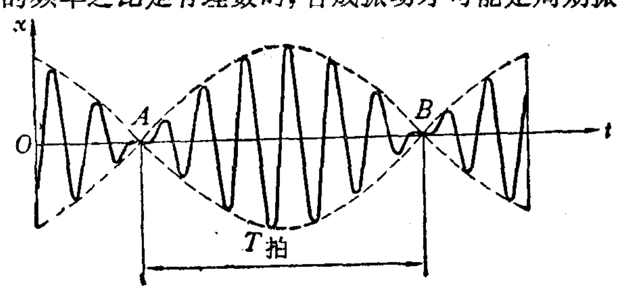


图1.10 拍

个分振动周期的最小公倍数。如果两个分振动的频率比是无理数，那么它们的周期就不可能找到最小公倍数，合成振动就不会是周期性运动。

2．互相垂直方向上两个简谐振动的合成

当一个质点在同一平面上互相垂直的两个方向同时产生简谐振动时，要研究该质点的综合运动形式，就要将这两个简谐振动合成起来。

设该质点在 x 和 y 这两个互相垂直的方向上所作的简谐振动用下式表示：

$$\left.\begin{aligned} x &= A_1\sin(\omega t+\varphi_1) \\ y &= A_2\sin(\omega t+\varphi_2) \end{aligned}\right\} \tag{1.13}$$

将上式展开，并进行消去参数 t 的运算，得出 x 与 y 的函数关系如下：

$$\frac{x^2}{A_1^2}+\frac{y^2}{A_2^2}-2\frac{xy}{A_1A_2}\cos(\varphi_1-\varphi_2)=\sin^2(\varphi_1-\varphi_2) \tag{1.14}$$

上式一般表示一个斜的椭圆，但随着相角的差与振幅的不同，可以退化为直线或正圆。例如，当 $\varphi_1-\varphi_2=0$ 时，(1.14)式变成：

$$\frac{x^2}{A_1^2}+\frac{y^2}{A_2^2}-2\frac{xy}{A_1A_2}=0$$

即

$$\frac{x}{y}=\frac{A_1}{A_2}$$

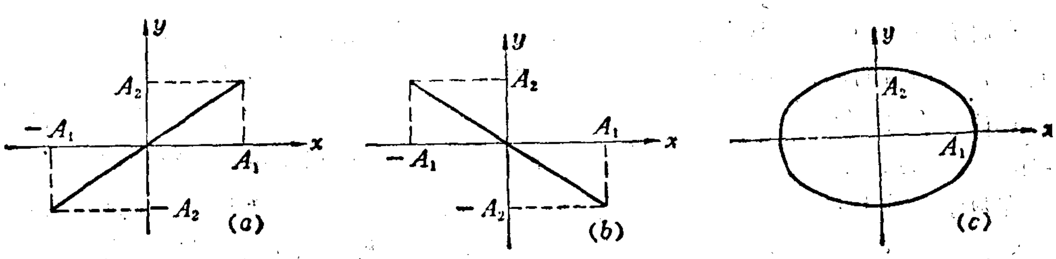


图 1.11　简谐振动的合成

显然，这就是图 1.11(a)所表示的直线。

若 $\varphi_1-\varphi_2=\pi$，则(1.14)式变成：

$$\frac{x}{y}=-\frac{A_1}{A_2}$$

这就是图 1.11(b)所表示的直线。

若 $\varphi_1-\varphi_2=\frac{\pi}{2}$ 或 $\frac{3\pi}{2}$，则(1.14)式变成：

$$\frac{x^2}{A_1^2}+\frac{y^2}{A_2^2}=1$$

这就是图 1.11(c)所表示的正椭圆。

这时，如果 $A_1=A_2$，则质点轨迹就是一个正圆。

当两个方向上的振动频率 ω_1 与 ω_2 不同时，质点的振动轨迹就极为复杂，这些轨迹（包括 ω_1 与 ω_2 相同的情况）统称为李沙如图(Lissajous figure)。

在振动试验中可将 x、y 方向上的两个振动信号分别输送到阴极示波器的 x、y 轴，在荧光屏上就会得到这两个互相垂直的简谐振动合成的图形——李沙如图。和同方向简谐振动合成一样，只有当 ω_1 与 ω_2 的比例是有理数时，所得到的李沙如图才是封闭的。在振动试验


(a)

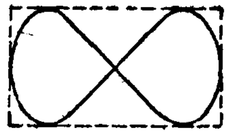

(b)

图1.12 李沙如图

中可以利用李沙如图来判断 x、y 方向的频率比，即根据李沙如图与水平线及垂直线切点的个数之比，来判断两个方向上分振动的频率比。在图 1.12(a)中，水平方向有 2 个切点，垂直方向有 3 个切点，故两个方向上分振动的频率比就是切点数的反比。这就是说，水平方向与垂直方向的频率比是 3:2。而在图 1.12(b)中，水平方向的频率是垂直方向频率的 $\frac{1}{2}$。因此，若一个方向上的频率已知，则另一个方向的频率就可根据李沙如图推算出来。

§1-3 非简谐周期振动的谐波分析

在研究机械振动时，常会遇到某些参量的变化具有周期性，但又不是简单的简谐运动，即是一种非简谐的周期运动，其振幅，速度和加速度都不一定是简谐的。此外，在激振时，激振力也往往不是简谐的，有时就要用脉冲方波或三角波来激振。对于这些非简谐的周期运动，常常需要将它分解成一系列简谐振动的叠加，这就需要应用富里哀级数的理论。

在数学理论上，把一个周期函数展开成一个富里哀级数，亦即展开成一系列简谐函数之和，称为"谐波分析"(harmonic analysis)。把这种谐波分析法用于振动理论，就可以把一个周期振动分解为一系列简谐振动的叠加。

设有一个周期振动函数 $F(t)$，它的周期为 T，展开成富里哀级数为：

$$F(t)=\frac{a_0}{2}+a_1\cos\omega_1 t+a_2\cos 2\omega_1 t+\cdots+b_1\sin\omega_1 t+b_2\sin 2\omega_1 t+\cdots$$

$$=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\omega_1 t+b_n\sin n\omega_1 t) \qquad (1.15)$$

式中：$\omega_1=\frac{2\pi}{T}$，称为基频(fundamental frequency)，

$$a_0=\frac{\omega_1}{\pi}\int_0^T F(t)dt$$

$$a_n=\frac{\omega_1}{\pi}\int_0^T F(t)\cos n\omega_1 t dt$$

$$b_n=\frac{\omega_1}{\pi}\int_0^T F(t)\sin n\omega_1 t dt$$

因为两个频率相同的简谐振动可以合成为一个简谐振动，即：

$$a_n\cos n\omega_1 t+b_n\sin n\omega_1 t=A_n\sin(n\omega_1 t+\varphi_n)$$

式中：$A_n=\sqrt{a_n^2+b_n^2}$； $\varphi_n=\mathrm{tg}^{-1}\frac{a_n}{b_n}$

因此，(1.15)式也可以写成：

$$F(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin(n\omega_1 t+\varphi_n) \tag{1.16}$$

上式中，第一项是常数，对振动没有影响，第二项 $A_1\sin(\omega_1 t+\varphi_1)$ 的频率与非简谐周期振动的原频率 ω_1 相同，故这一项称为基本和谐或第一和谐；频率等于原函数频率两倍的第三项 $A_2\sin(2\omega_1 t+\varphi_2)$ 称为第二和谐；……频率等于原函数频率 n 倍的第 $n+1$ 项 $A_n\sin(n\omega_1 t+\varphi_n)$ 称为第 n 和谐。

为了使谐波分析形象化，可以把 A_n 和 φ_n 与 ω 之间的变化关系用图形来表示，如图 1.13 所示。因为只是在 $n\omega_1(n=1, 2, 3, \cdots)$ 各点，A_n 和 φ_n 才有一定的数值，所以图形是一组离散的垂线。这种图形称为离散频谱。周期振动的频谱均为离散频谱，频谱图上每一根竖线代表一个谐波分量。

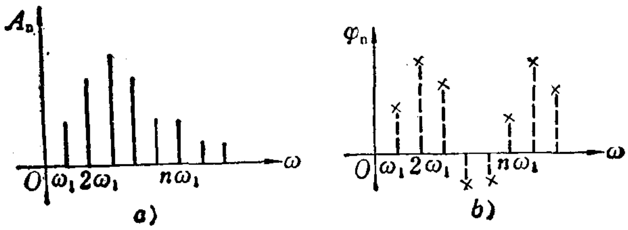


图 1.13　离散频谱图

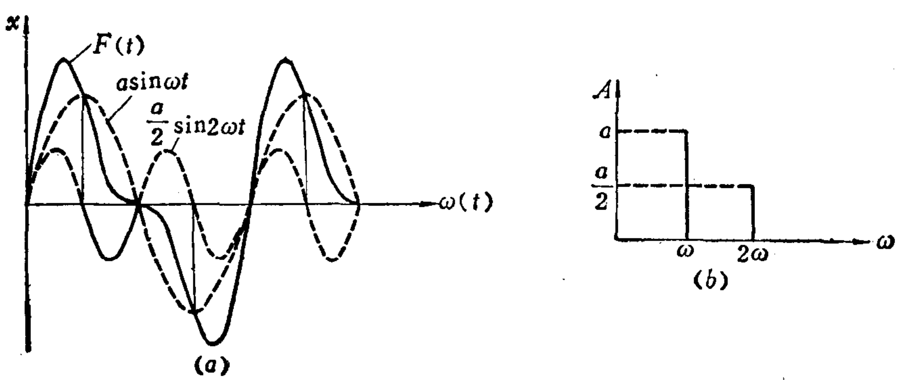


图 1.14　非简谐周期振动及其频谱图

例如，某一个非简谐周期振动：

$$F(t)=a\sin\omega t+\frac{a}{2}\sin 2\omega t$$

可以分解为 $a\sin\omega t$ 及 $\frac{a}{2}\sin 2\omega t$ 两个简谐振动的叠加，其时间历程（以时间为横坐标，以振动位移为纵坐标所作的线图）如图 1.14(a) 所示。因为这一周期振动只有两个谐波分量，故其频谱图上只有两条竖线（见图 1.14b）。

三角波与脉冲方波是振动研究中常遇到的周期波形，现分别对他们进行谐波分析。

例 1　已知一个三角波（见图 1.15）的函数表达式为：

$$F(t)=\begin{cases}\omega t & 0\leqslant\omega t<\pi\\ 2\pi-\omega t & \pi\leqslant\omega t<2\pi\end{cases}$$

试将 $F(t)$ 在 $[0, 2\pi]$ 区间展开为富里哀级数。

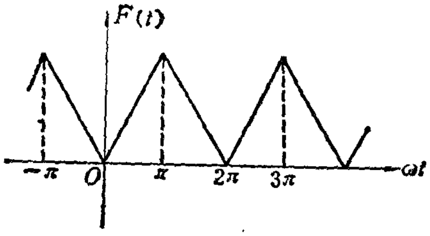


图1.15 三角波

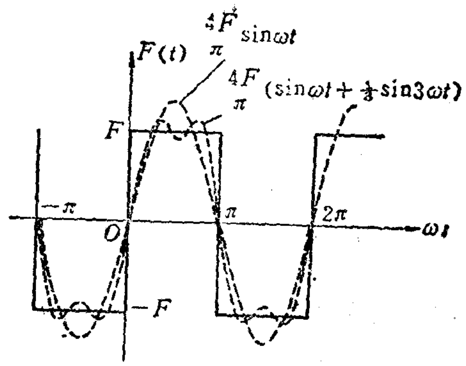


图1.16 脉冲方波及其谐波

解： $\because \quad a_0=\dfrac{\omega}{\pi}\left\{\int_0^{\pi/\omega}\omega t dt+\int_{\pi/\omega}^{2\pi/\omega}(2\pi-\omega t)dt\right\}=\pi$。

$$a_n=\frac{\omega}{\pi}\left\{\int_0^{\pi/\omega}\omega t\cos n\omega t dt+\int_{\pi/\omega}^{2\pi/\omega}(2\pi-\omega t)\cos n\omega t dt\right\}$$

$$=\frac{\omega^2}{\pi}\ \frac{1}{(n\omega)^2}\ [2\cos n\pi-2]$$

$$b_n=\frac{\omega}{\pi}\left\{\int_0^{\pi/\omega}\omega t\sin n\omega t dt+\int_{\pi/\omega}^{2\pi/\omega}(2\pi-\omega t)\sin n\omega t dt\right\}$$

$$=0$$

当 n 是奇数时，$\cos n\pi=-1$，则 $a_n=-\dfrac{4}{n^2\pi}$

当 n 是偶数时，$\cos n\pi=1$，则 $a_n=0$

$$\therefore \quad F(t)=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\left(\frac{\cos\omega t}{1^2}+\frac{\cos 3\omega t}{3^2}+\frac{\cos 5\omega t}{5^2}+\cdots\right)$$

例 2 已知一个脉冲方波的函数表达式为：

$$F(t)=\begin{cases}F & 0<\omega t<\pi\\ -F & \pi<\omega t<2\pi\end{cases}$$

试将 $F(t)$ 在 $[0,2\pi]$ 区间展开成富里哀级数。

解： $a_0=\dfrac{\omega}{\pi}\left\{\int_0^{\pi/\omega}F dt+\int_{\pi/\omega}^{2\pi/\omega}(-F)dt\right\}=0$。

$$a_n=\frac{\omega}{\pi}\left\{\int_0^{\pi/\omega}F\cos n\omega t dt-\int_{\pi/\omega}^{2\pi/\omega}F\cos n\omega t dt\right\}=0。$$

$$b_n=\frac{\omega}{\pi}\left\{\int_0^{\pi/\omega}F\sin n\omega t dt-\int_{\pi/\omega}^{2\pi/\omega}F\sin n\omega t dt\right\}$$

$$=\frac{2F}{n\pi}(1-\cos n\pi)$$

当 n 是奇数时， $b_n=\dfrac{4F}{n\pi}$

当 n 是偶数时， $b_n=0$

$$\therefore \quad F(t)=\frac{4F}{\pi}\left(\sin\omega t+\frac{1}{3}\sin 3\omega t+\frac{1}{5}\sin 5\omega t+\cdots\right)$$

若在上式中只取一次谐波 $\dfrac{4F}{\pi}\sin\omega t$ 与方波波形比较，两者有些接近，但仍然差别较